第四章 电流

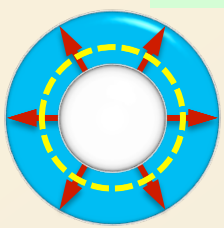
§ 4-1 电流的描述

§ 4-2 物质中的电流

§ 4-3 稳恒电路

回顾

- 欧姆定律 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ “一般”, $\vec{j}=\sigma\vec{f}$
- 功率密度 $p\equiv\vec{E}\cdot\vec{j}$
  - 焦耳定律(微分形式) $p=\sigma E^2=j^2/\sigma$ 条件：欧姆型导体
  - 焦耳定律(积分形式) $V=IR$ 条件：稳恒电流
- 电阻 $R\equiv\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{I}=\dfrac{V}{I}$ 取决于 导电材料的性质
  电流在其中的分布

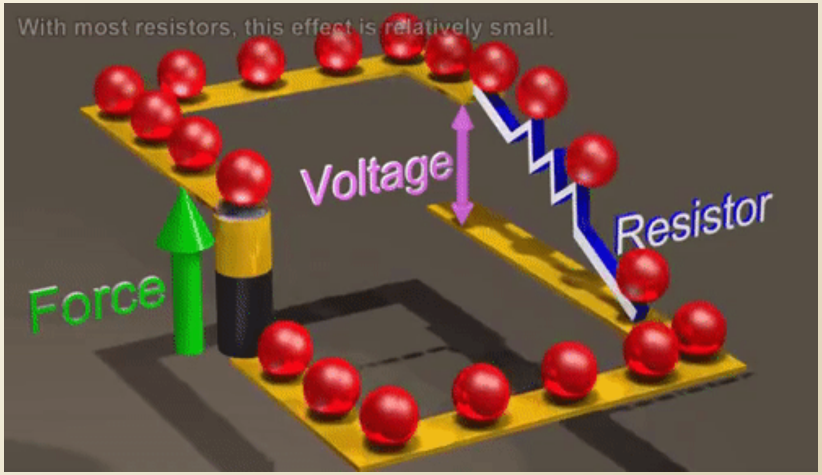


$$R=\int_1^2\frac{\rho dl}{S_\perp}$$ 条件：每一横截面上电流均匀

$$R=\frac{\rho L}{S_\perp}$$ 条件：截面相同的均匀材料

回顾

- 导电介质中的基本方程
  - 环路定理 $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ → $\nabla\times\vec{E}=0,\quad \hat{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0$
  - 稳恒条件 $\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=0$ → $\nabla\cdot\vec{j}=0,\quad \hat{n}\cdot\left(\vec{j}_2-\vec{j}_1\right)=0$
  - 本构方程 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$
- 全欧姆定律 $\vec{j}=\sigma\left(\vec{E}+\vec{K}\right)$
- 电动势 $\varepsilon \equiv \int_{负极(内)}^{正极} \vec{K}\cdot d\vec{l}$
- 路端电压 $V\equiv\varphi_+-\varphi_- = \int_{正极}^{负极}\vec{E}\cdot d\vec{l}$



开路时的路端电压

$$\vec{j}=\sigma\left(\vec{E}+\vec{K}\right) \Rightarrow \vec{E}=\rho\vec{j}-\vec{K}$$

$$\Rightarrow V=\begin{cases}\displaystyle\int_{+(\text{内})}^{-}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{+(\text{内})}^{-}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}-\int_{+(\text{内})}^{-}\vec{K}\cdot d\vec{l}=\varepsilon+\int_{+(\text{内})}^{-}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}\\ \displaystyle\int_{+(\text{外})}^{-}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{+(\text{外})}^{-}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}\end{cases}$$

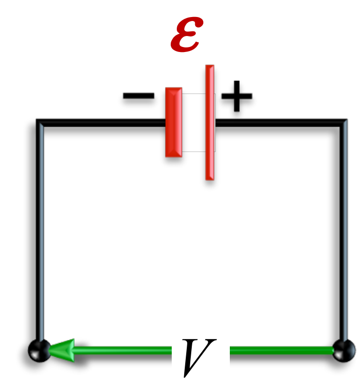
- 开路时，由于 $j=0$，因而

$$V=\varepsilon+\int_{+(\text{内})}^{-}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}=\varepsilon$$

电场做积分时，

若线元从电源正极指向负极，

则非静电力对于电势降的贡献为＋ε

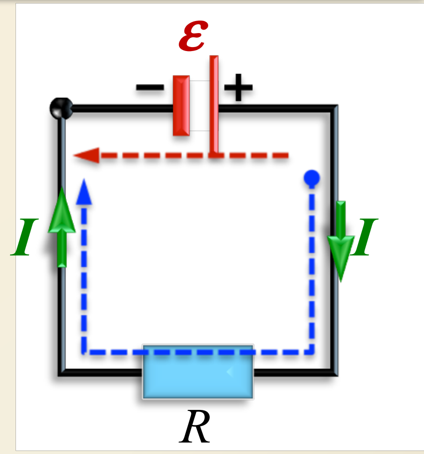


电势降

电源放电时的路端电压

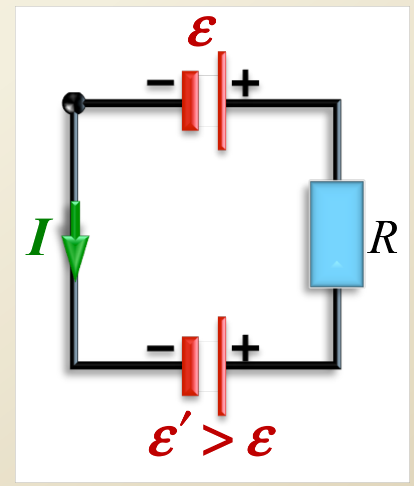
■ 电源放电：电源内部电流由负极指向正极

$$\varepsilon - Ir = IR \Rightarrow I = \varepsilon/(R+r)$$



■ 电源充电：电源内部电流由正极流向负极

$$I = \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{R + r + r'}$$



■ 若 $\varepsilon' > \varepsilon$，电流方向与图示一致：电源 ε 充电，电源 ε' 放电

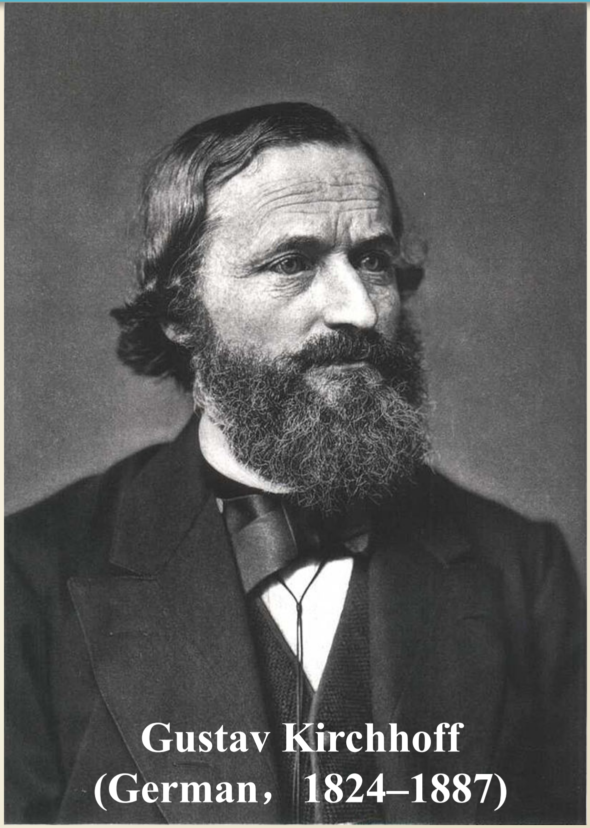
■ 若 $\varepsilon' < \varepsilon$，电流方向与图示相反：电源 ε 放电，电源 ε' 充电

基尔霍夫定律定律

- 1845年，基尔霍夫还在读大学时，就发展了稳恒电路网络中电流、电压和电阻关系的两条定律 (即**基尔霍夫定律**)，对电路理论做出了重大贡献。

- 1859年，基尔霍夫发明了**分元仪**，与本生一道创立了**光谱分析法**，并发现了元素**铯和铷**。

- 1859年，他又发现了**基尔霍夫辐射定律**：任何物体的发射与吸收本领与物质特性无关，是波长和温度的普适函数。并由此推断：太阳光谱的暗线是太阳大气中元素吸收的结果，给太阳和恒星成分分析提供了一种新方法，使天体物理进入了新时代。



Gustav Kirchhoff
(German， 1824–1887)

- 1862年，基尔霍夫又进一步得出**绝对黑体**的概念。这一概念和他的热辐射定律是开辟20世纪物理学新纪元的关键之一。由于他在光谱分析方面的杰出贡献，他和本生于1877年分享了第一届戴维奖。

基尔霍夫定律的基本思想

- 欧姆定律只能用于解比较简单的电路。复杂的电路，往往有许多条导线交汇于一点，整个电路由若干个闭合回路组成，同一回路的各段电路中的电流并不相同。对于这类复杂电路，欧姆定律无法解决。

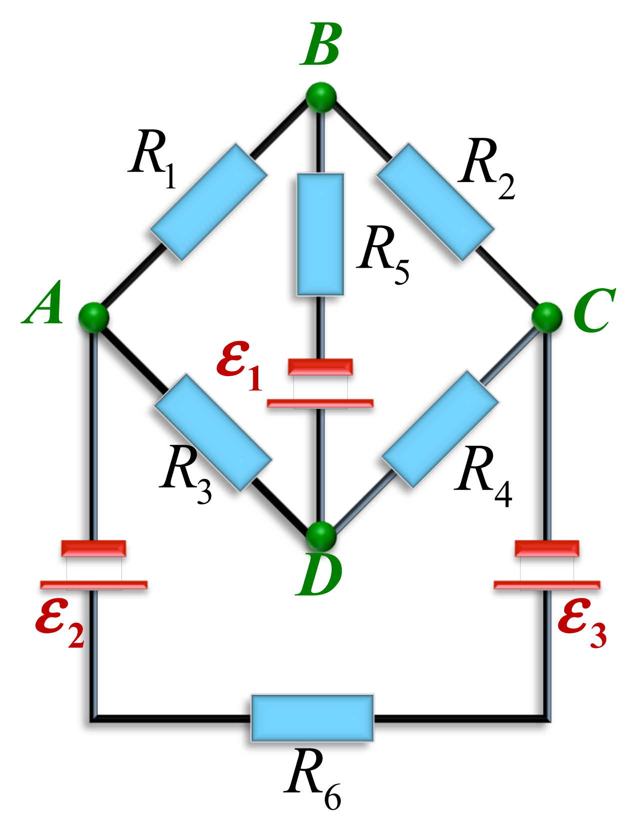
- 1847年基尔霍夫给出了求解一般复杂电路的基尔霍夫方程组，它包括节点电流方程和回路电压方程，前者是稳恒电流条件下任意闭合曲面内电荷守恒的结果，后者是稳恒电场环路积分为零（即静电场环路定理）的结果，两者构成了完备的方程组，原则上可以解决任何直流电路问题。

电路基本术语

■ **节点**：在电路中，三条或更多导线的汇合点，如点 A、B、C、D **(N=4)**

■ **支路**：相邻两节点间由电源和电阻串联而成、不含其它节点的通路，如AB、BD、DC等 **(E=6)**

■ **回路**：起点和终点重合在一个节点的环路，如环路$ABDA$、$BCDB$、$ABCDA$等。



■ **平面电路**：电路中的支路和节点都在一个平面上 (图示电路的**网孔数**为 **L=3**)

■ **非平面电路**：电路中的支路存在相互跨越的情况

独立回路

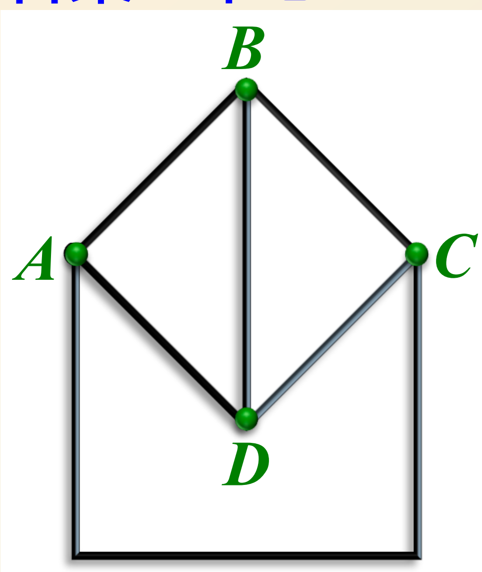
■ **独立回路**：独立回数减-1 = 支路数减去节点数

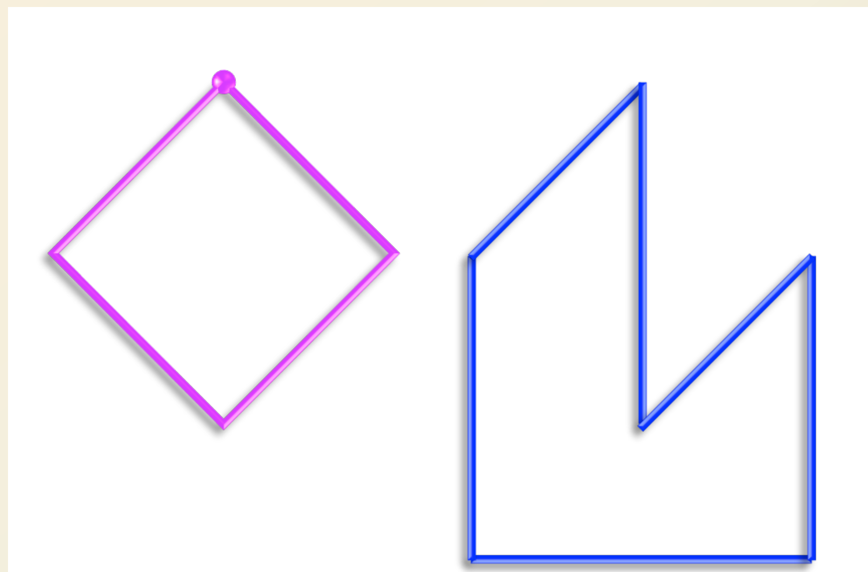
$$\ell = E - N + 1$$

对于平面回路，等于网孔数目

问题：若一组回路包含了所有支路，且不同回路至少有一条不同支路，这样可以得到所有的独立回路吗?

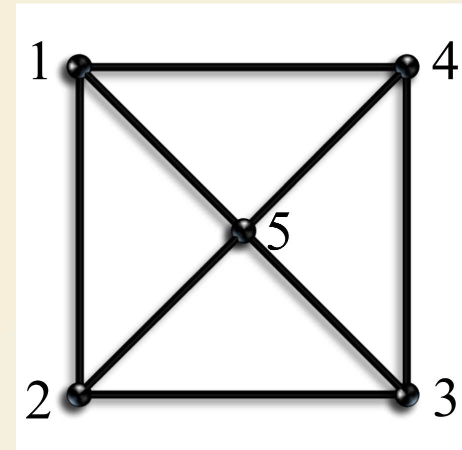
答案：未必！

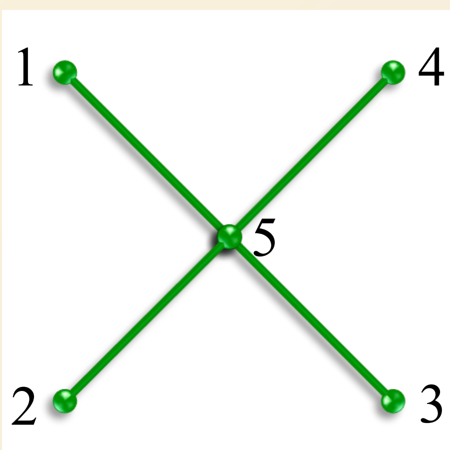


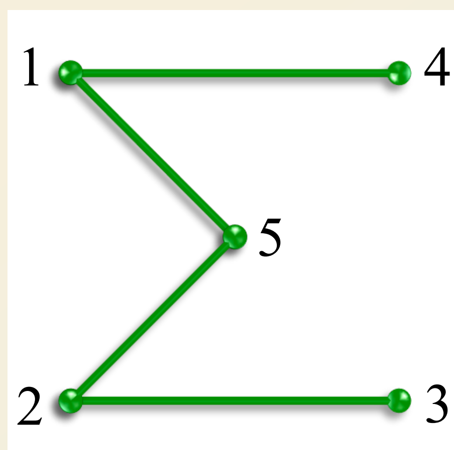


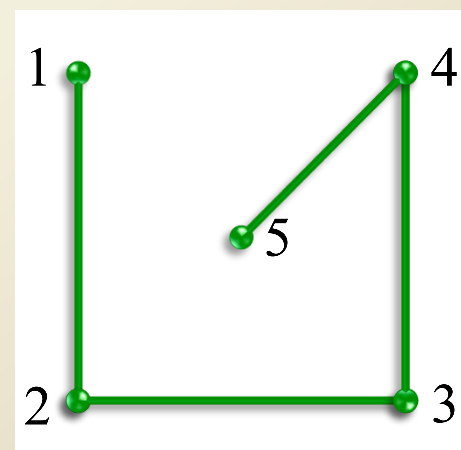
连通图与树

- **连通图 G**：任两节点都可以通过若干支路连接
- **树 T**：连通图 G 的一个连通子图，要求 T 包含 G 的全部节点但却不包含任何回路。
  - G 的树枝：连通图 G 中构成树 T 的支路。
  - G 的连支：连通图 G 中不属于 T 的支路。



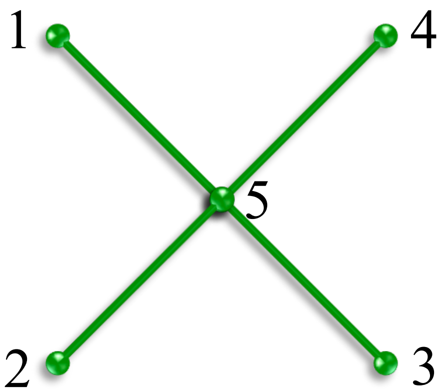






基本回路

- **基本回路**：只含一个连支的回路称为**单连支回路或基本回路**
- **基本回路组**：由全部单连支形成的基本回路构成基本回路组

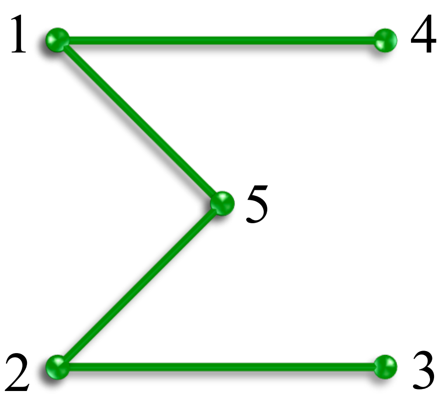


$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$

$2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2$

$3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$

$4 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 4$



$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$

$3 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

$4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 4$

$3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

基本回路组可以作为独立回路组；选择不同的树，基本回路组不同。

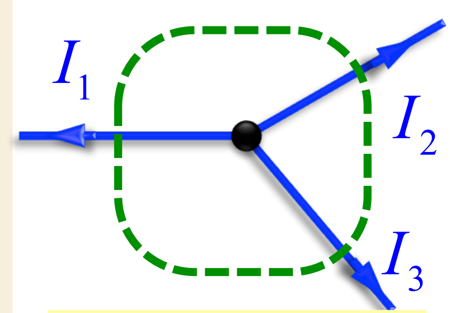
基尔霍夫第一定律

■ **基尔霍夫第一定律(节点定律)**

汇于任一节点的各电流代数和等于零

$$\sum_k I_k = 0$$

约定：流出为正；流入为负



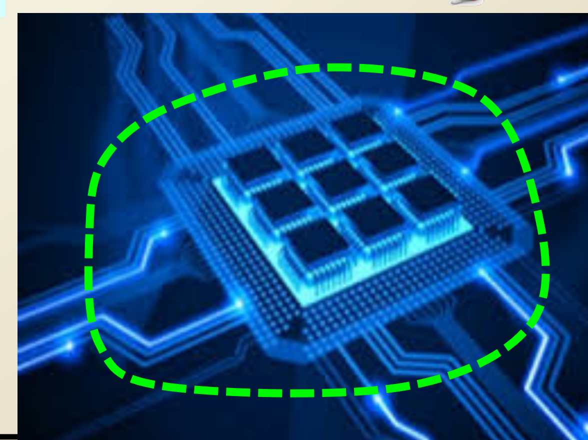
$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

■ 基尔霍夫第一定律的本质

是电荷守恒定律和稳恒电流条件 $\oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$

■ 节点定律也可以表示为 $\sum I_{出} = \sum I_{入}$

如何取正负号？



■ 对于 N个节点的连通电路，可列出 N个节点方程，但是，其中只有 $(N-1)$ 个是独立的。

■ 适用于广义节点

基尔霍夫第二定律

- 基尔霍夫第二定律(回路定律)

沿着任意闭合回路的电势降的代数和为零

$$\sum V=\sum\left(\pm\varepsilon\pm Ir\pm IR\right)=0$$

积分路径从电源正极指向负极，电势降为 $+\varepsilon$

积分路径与流经电阻的电流方向一致时，电势降为 $+IR$

流经支路电流的方向可任意设定，由结果正负确定实际方向

- 基尔霍夫第二定律的本质是稳恒电场的无旋性和欧姆定律

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=0,\ \vec{j}=\sigma\left(\vec{E}+\vec{K}\right)$$

- 回路定律给出的独立方程数目等于独立回路数目

基尔霍夫定律提供的独立方程数目等于支路数目

基尔霍夫定律提供了求解稳恒电路问题的完备方程

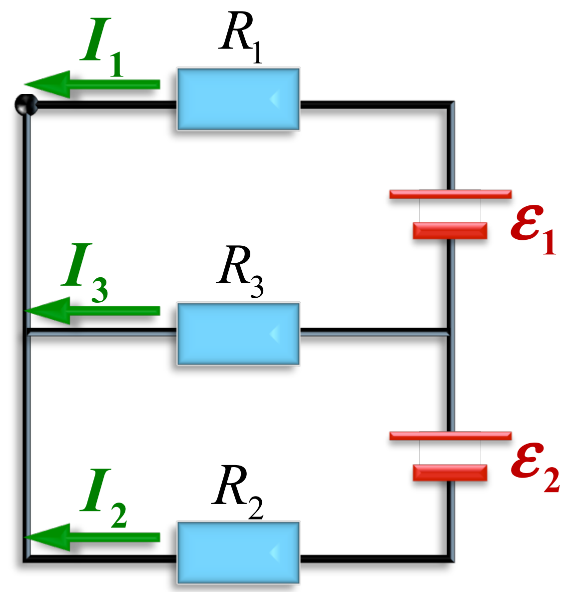
支路电流法

- 设各支路电流如图所示

节点定律： $I_1+I_2+I_3=0$

回路定律：
$$I_1R_1-I_3R_3=\varepsilon_1$$
$$I_3R_3-I_2R_2=\varepsilon_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1+I_2+I_3=0 \\ I_1-I_3=\dfrac{\varepsilon}{R} \\ I_3-2I_2=\dfrac{\varepsilon}{R} \end{cases}$$



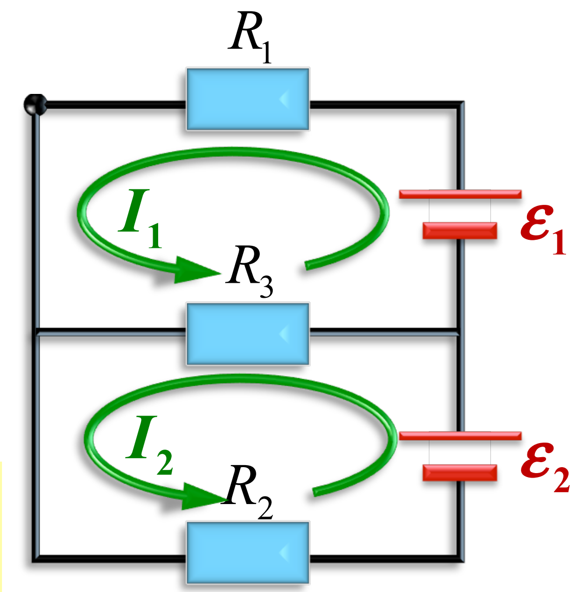
$$R_1=R_3=R$$
$$R_2=2R$$
$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$$

$$\Rightarrow I_1=\frac{4}{5}\frac{\varepsilon}{R},\quad I_2=-\frac{3}{5}\frac{\varepsilon}{R},\quad I_3=-\frac{1}{5}\frac{\varepsilon}{R}$$

回路电流法

■ **设定每个独立回路的绕行方向以及与绕行方向一致的回路电流**，只用回路定律便可解出回路的电流。然后再用已得回路电流求出各支路电流，这样求得的支路电流将自动满足节点定律。

$$\begin{cases} -\varepsilon_1 + I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_3 = 0 \\ -\varepsilon_2 + I_2 R_2 - (I_1 - I_2) R_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 4\varepsilon/5R \\ I_2 = 3\varepsilon/5R \end{cases}$$

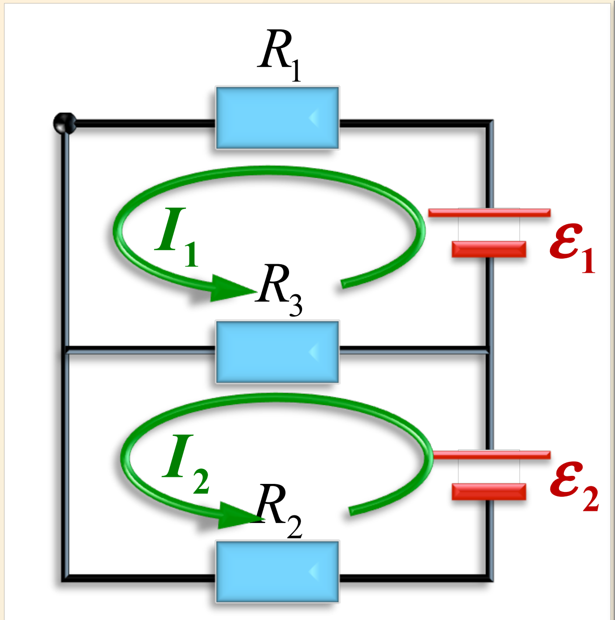


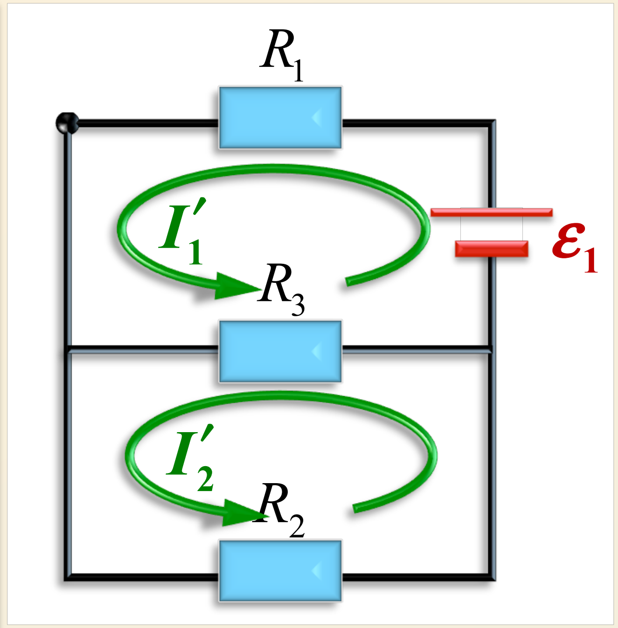
$$R_1 = R_3 = R$$
$$R_2 = 2R$$
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$$

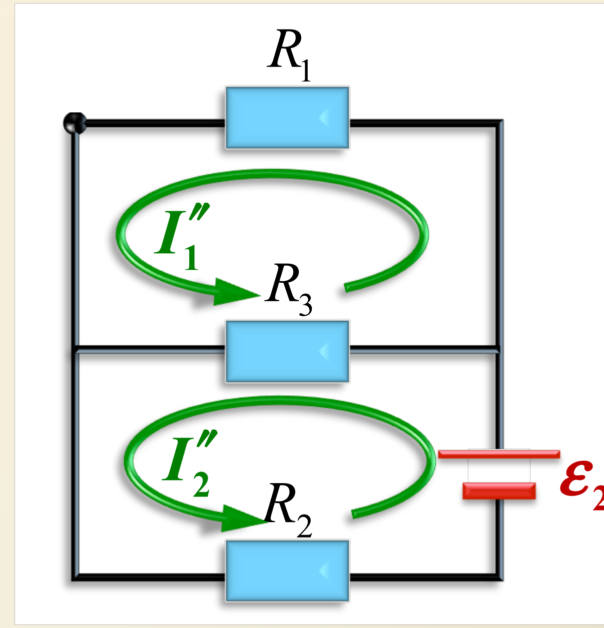
■ 流经 R_1、R_2 和 R_3 的电流分别为(向左为正)：

$$I_1 = \frac{4}{5}\frac{\varepsilon}{R}, \quad -I_2 = -\frac{3}{5}\frac{\varepsilon}{R}, \quad I_2 - I_1 = -\frac{1}{5}\frac{\varepsilon}{R}$$

叠加原理







$$2I_1 - I_2 = \varepsilon/R$$
$$3I_2 - I_1 = \varepsilon/R$$

$$I_1 = \frac{4\varepsilon}{5R}, \quad I_2 = \frac{3\varepsilon}{5R}$$

$$2I_1' - I_2' = \varepsilon/R$$
$$3I_2' - I_1' = 0$$

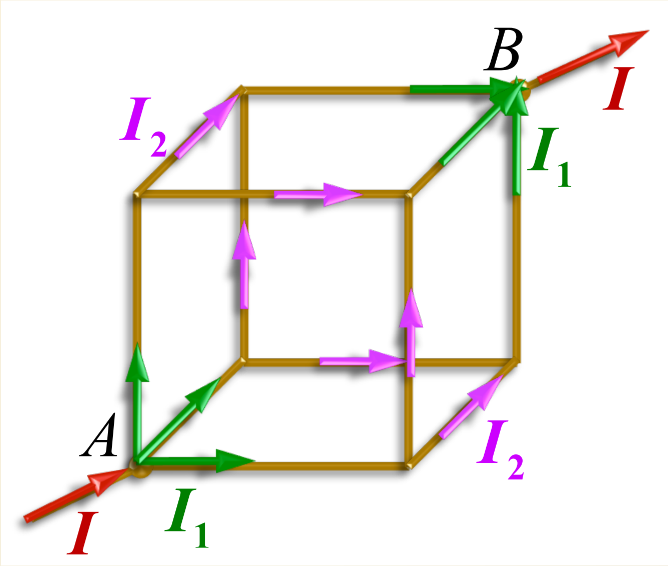
$$I_1' = \frac{3\varepsilon}{5R}, \quad I_2' = \frac{\varepsilon}{5R}$$

$$2I_1'' - I_2'' = 0$$
$$3I_2'' - I_1'' = \varepsilon/R$$

$$I_1'' = \frac{\varepsilon}{5R}, \quad I_2'' = \frac{2\varepsilon}{5R}$$

例：一立方体，每边的电阻都为 r，求对角线之间的电阻。

解：假设电流 I 由 A 点流入，B 点流出。



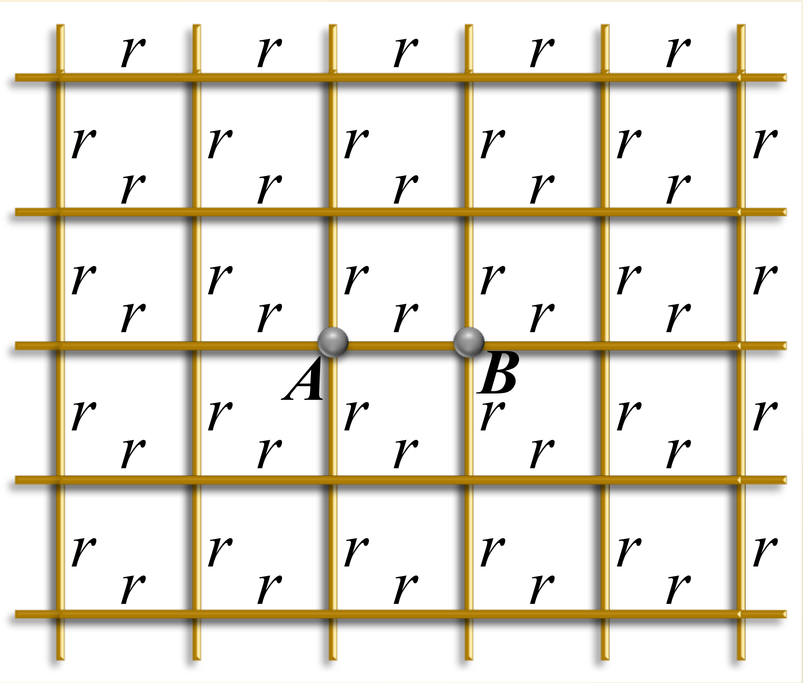
由对称性知： $I = 3I_1$ and $I_1 = 2I_2$

因而，A 与 B 的电势差为：

$$U_{AB} = I_1 r + I_2 r + I_1 r$$
$$= \frac{1}{3} Ir + \frac{1}{6} Ir + \frac{1}{3} Ir = \frac{5}{6} Ir$$

$$\Rightarrow R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{5}{6} r$$

例：一个无限延展的矩形线圈平面网络，每边的电阻都为 r，求任意相邻两点间的电阻。



解：由对称性和叠加原理

- **情形1：电流 I 由 A 点流入，则**

$$I'_{AB} = I/4$$

- **情形2：电流 I 由 B 点流出，则**

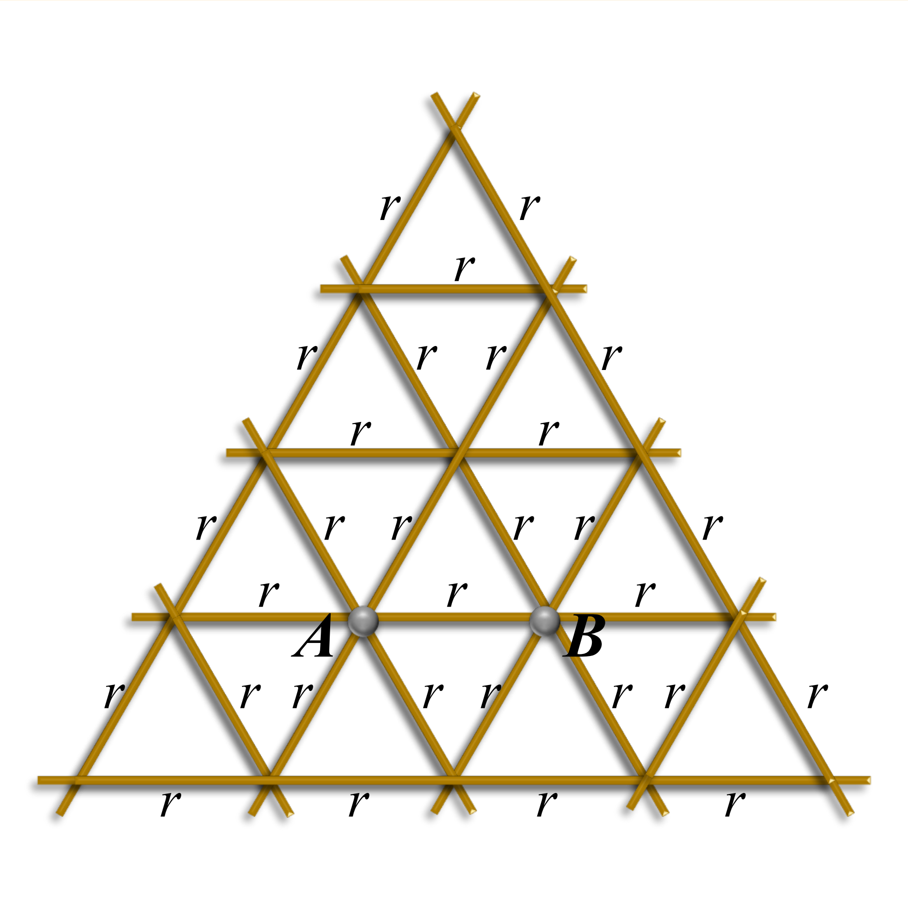
$$I''_{AB} = I/4$$

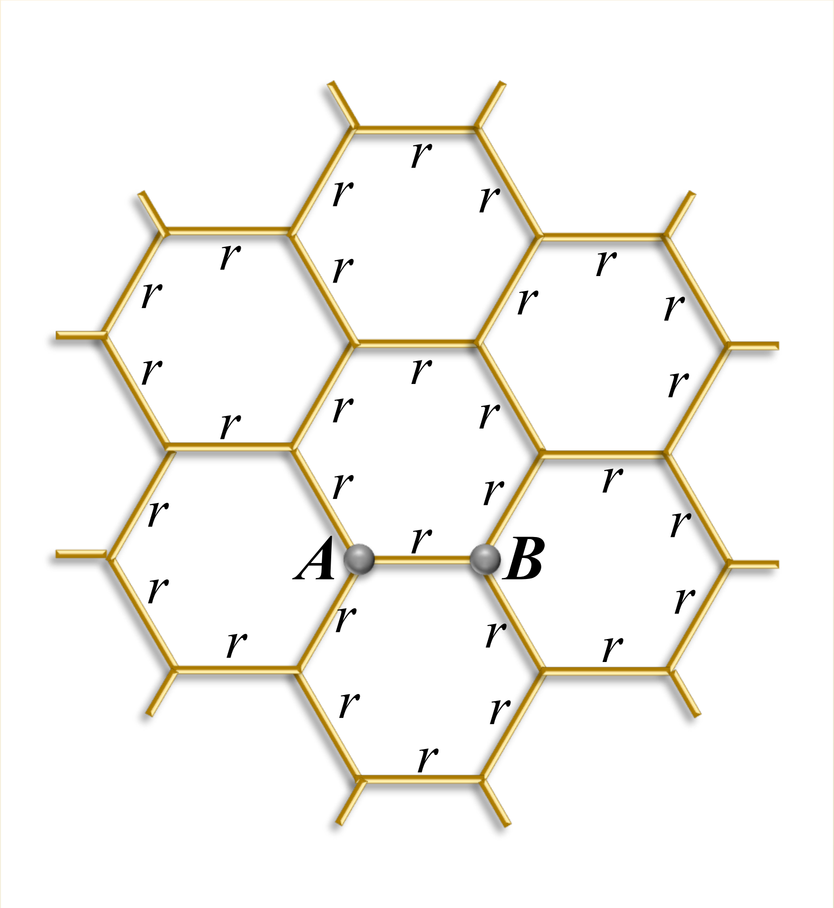
两者相加，有 $$I_{AB} = I/2$$

$$U_{AB} = IR_{AB} = I_{AB}r = \frac{1}{2}Ir \quad \Rightarrow \quad R_{AB} = \frac{1}{2}r$$

若把 AB 间的电阻 r 去掉，AB 间的等效电阻为多少？

若把 AB 间的电阻换成 R，AB 间的等效电阻为多少？

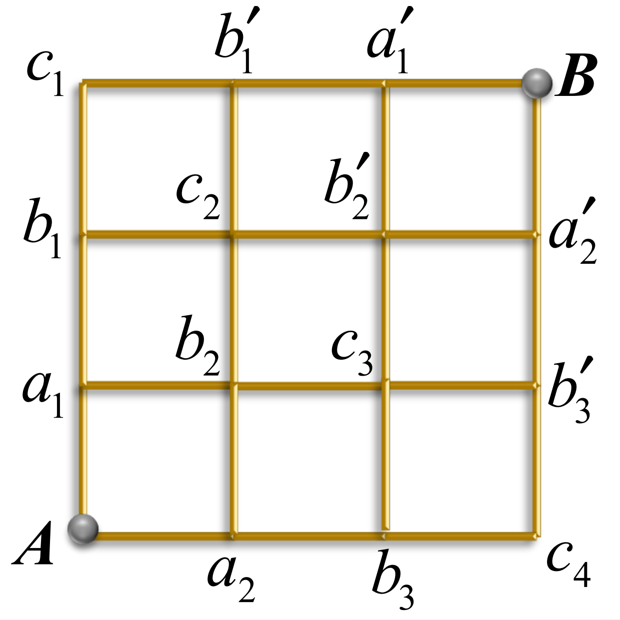




$$R_{AB}=\frac{1}{3}r$$

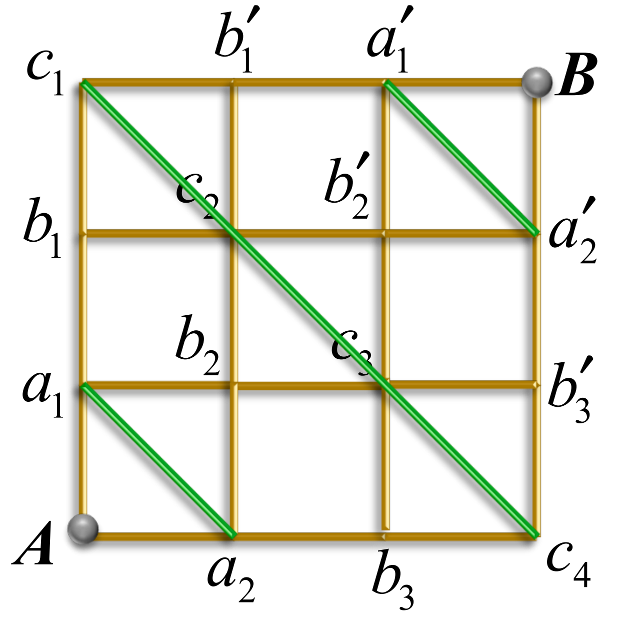
$$R_{AB}=\frac{2}{3}r$$

例：24个相同的电阻 r，联结成每边三个电阻的正方格子，试求对角 A、B 间的电阻 R_{AB}



解：AB 间加压，由对称性知：

a_1 和 a_2 两点等势；各 c_k 点等势，故可连接起来，变为下图。



$$R_{AB}=2\times\left[\frac{1}{2}r+\frac{\left(\frac{r}{2}+\frac{r}{4}\right)\left(\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\right)}{\left(\frac{r}{2}+\frac{r}{4}\right)+\left(\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\right)}\right]$$

$$\Rightarrow R_{AB}=2\times\left(\frac{1}{2}r+\frac{3}{7}r\right)=\frac{13}{7}r$$

Thank You!