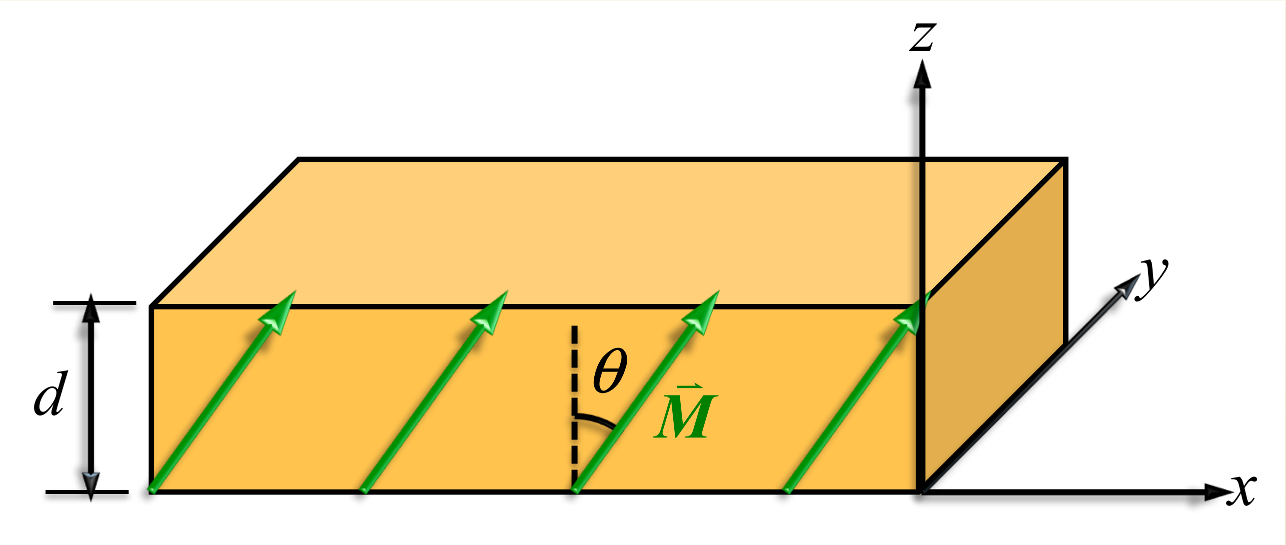
静磁场中的磁介质：几道题

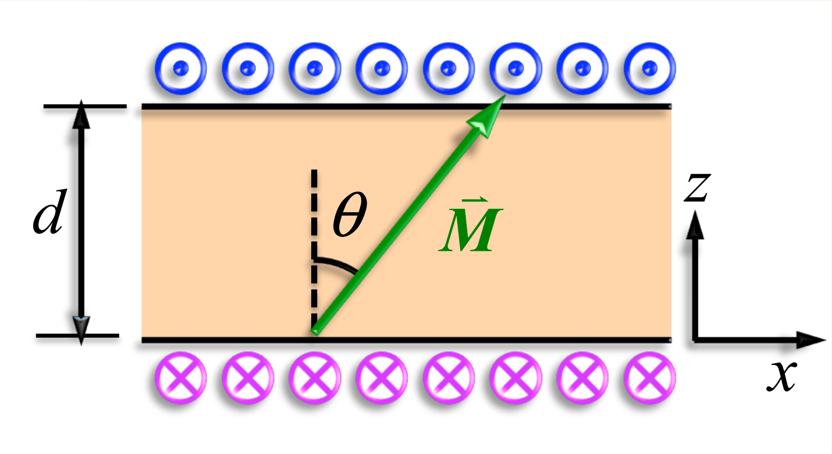
例：厚为 d 的无限大磁介质板被均匀磁化，磁化强度为

$$\vec{M} = M\left(\hat{x}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta\right)$$

试求磁化电流产生的磁场 $\boldsymbol{B}$。



电流观点 $\vec{M} = M\left(\hat{x}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta\right)$

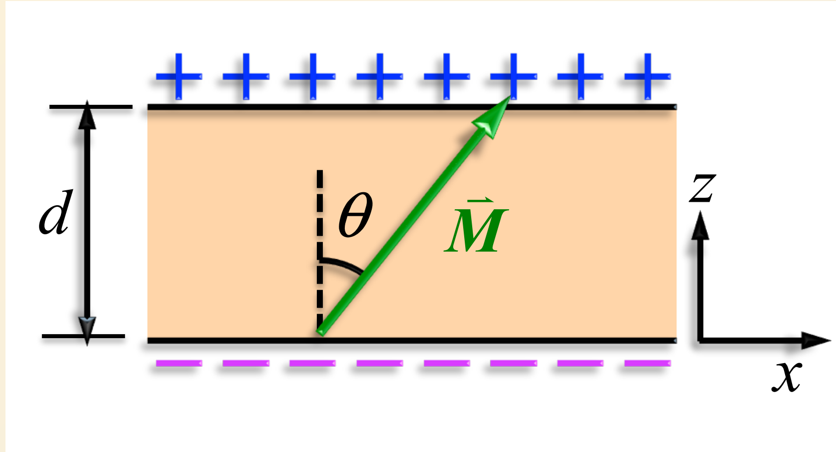


$$\vec{K}_1' = \vec{K}'_{z=d} = \vec{M}\times\left(+\hat{z}\right) = -\hat{y}\left(M\sin\theta\right) = -\vec{K}'$$

$$\vec{K}_2' = \vec{K}'_{z=0} = \vec{M}\times\left(-\hat{z}\right) = +\hat{y}\left(M\sin\theta\right) = +\vec{K}'$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0\vec{K}'\times\hat{z} = \left(\mu_0 M\sin\theta\right)\hat{x}$$

磁荷观点 $\vec{M} = M\left(\hat{x}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta\right)$



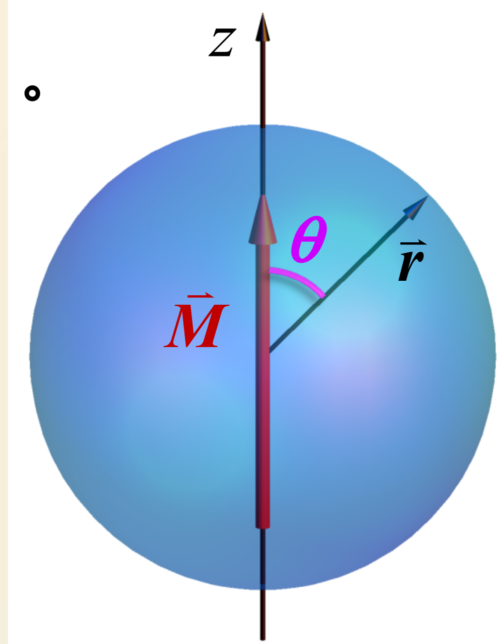
$$\sigma_1^* = \sigma^*_{z=d} = \mu_0 \vec{M}\cdot\left(+\hat{z}\right) = +\mu_0 M\cos\theta = +\sigma^*$$

$$\sigma_1^* = \sigma^*_{z=0} = \mu_0 \vec{M}\cdot\left(-\hat{z}\right) = -\mu_0 M\cos\theta = -\sigma^*$$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\frac{\sigma^*}{\mu_0}\hat{z} = -\left(M\cos\theta\right)\hat{z}$$

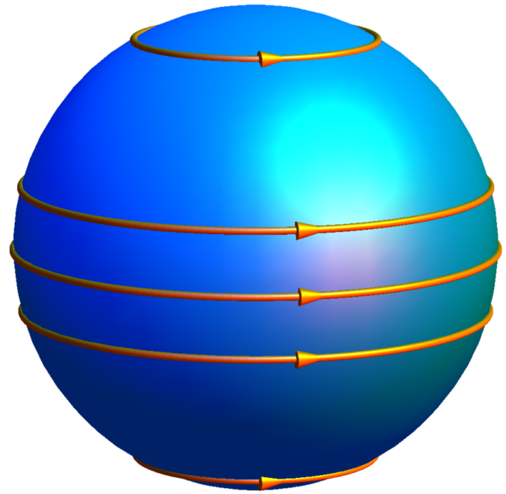
$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \left(\mu_0 M\sin\theta\right)\hat{x}$$

例：求均匀磁化介质球产生的磁场，$\vec{M} = M\hat{z}$。



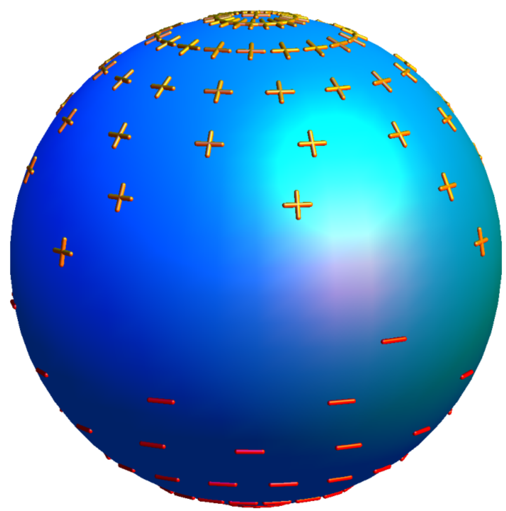
电流观点

$$\vec{K}' = \vec{M} \times \hat{r} = \left(M \sin\theta\right)\hat{\phi}$$



磁荷观点

$$\sigma^* = \mu_0 \vec{M} \cdot \hat{r} = \mu_0 M \cos\theta$$



由于球面上有电荷分布 $\sigma=\sigma_0\cos\theta$ 时空间各点的电场为

$$\vec{E}=\begin{cases}-\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\hat{z}, & r<a\\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}\right], & r>a\end{cases}$$

$$\vec{p}\equiv\frac{4\pi a^3}{3}\sigma_0\hat{z}$$

所以球面上的磁荷分布 $\sigma^*=\mu_0 M\cos\theta$ 产生的 H 矢量为

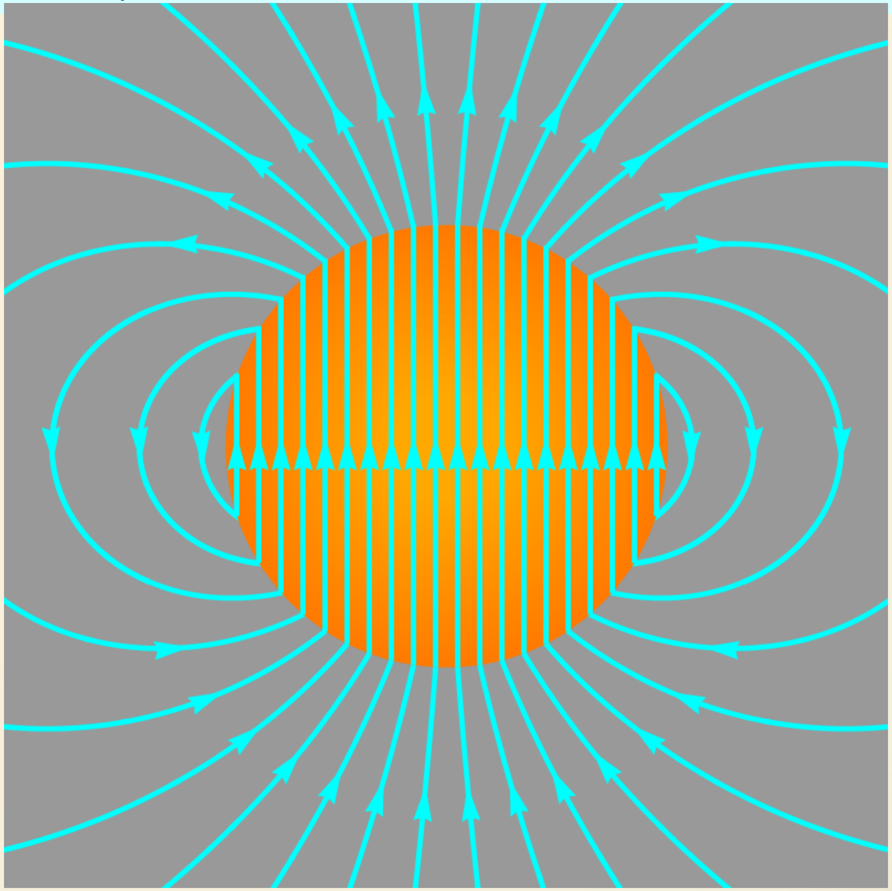
$$\vec{H}=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\vec{M}, & r<a\\[2ex] \dfrac{1}{4\pi r^3}\left[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}\right], & r>a\end{cases}$$

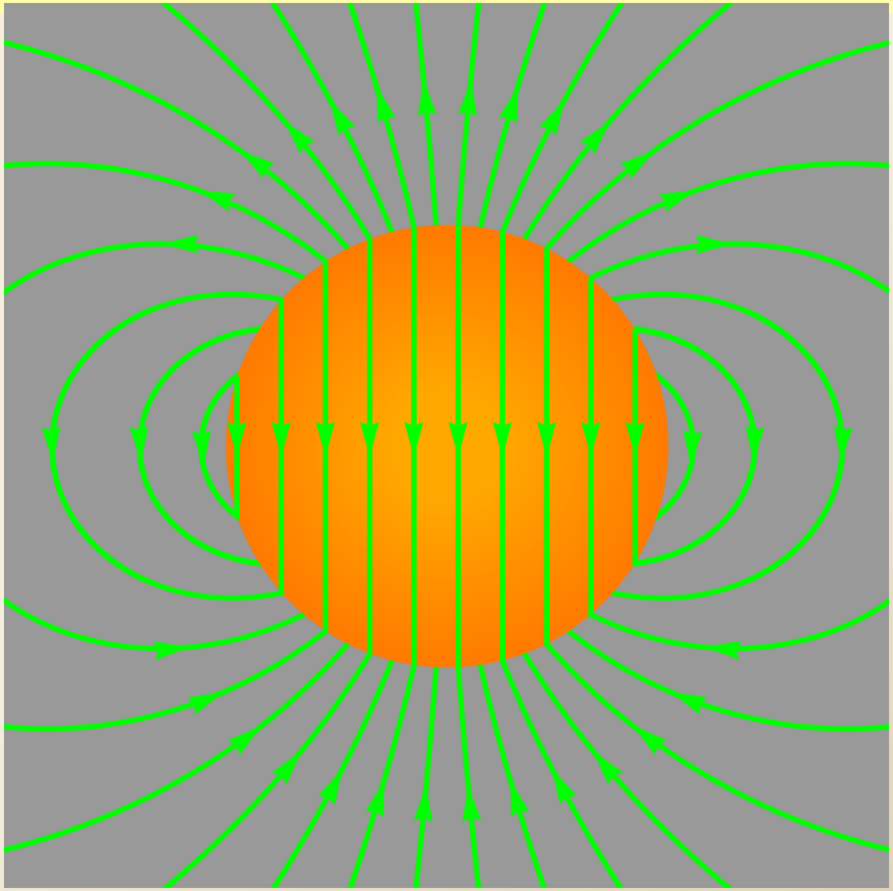
$$\vec{m}\equiv\frac{4\pi a^3}{3}\vec{M}$$

$$\vec{B}=\mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\mu_0\vec{M}, & r<a\\[2ex] \dfrac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}\right], & r>a\end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\mu_0 \vec{M}, & r < a \\ \dfrac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}\right], & r > a \end{cases}$$

$$\vec{H} = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}\vec{M}, & r < a \\ \dfrac{1}{4\pi r^3}\left[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}\right], & r > a \end{cases}$$





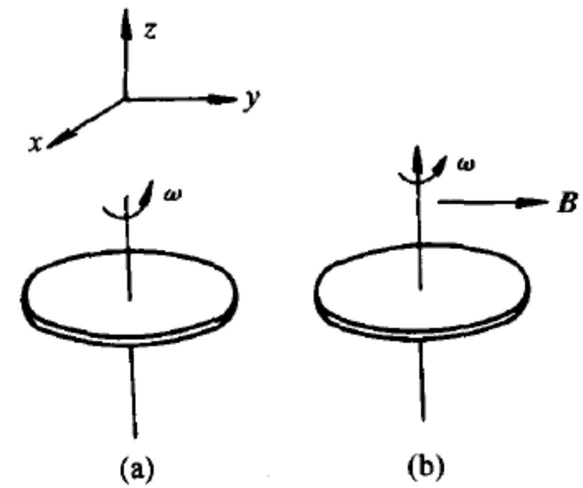
题 2.43 一个孤立导体充电到电势 V，球绕其一直径以角速度 ω 旋转. 求：(a) 球心处的 $\boldsymbol{B}$. (b) 旋转球的磁矩.

题 2.41 如果要在一个半径为 R 的球体内产生一个均匀磁场 $\boldsymbol{B}$，需要一个怎样的面电流分布？

题 2.27 一半径为 a 的均匀各向同性磁介质球，磁导率为 μ. 现把它放入一均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中，求介质球内外的磁场.

题 2.91 证明两个小磁针不管取向如何，其相互吸引力与它们间的距离的四次方成正比. 假定磁针的大小与其距离相比是很小的.

题 2.46 一个半径为 R 的圆盘上均匀带有电荷 q. 该圆盘绕着通过圆心且垂直于盘面的轴以角速度 ω 旋转，如题图 2.46(a)所示. 计算：(a) 圆盘中心的磁场强度. (b) 如果圆盘不转，在边缘处要有多大的电流才能产生与(a)中相同的磁场. (c) 当空中有一垂直于盘轴的磁场 $\boldsymbol{B}$，如题图 2.46(b)所示，而圆盘绕着轴以角速度 ω 旋转时，圆盘所受的力矩为多大?



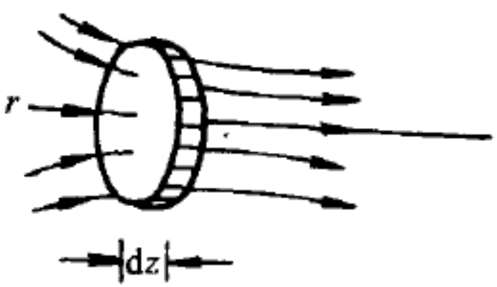
题图 2.46

题 2.23 今有一个半径为 a 的长圆柱形电介质被永久极化，其每一点极化矢量的方向都沿径向向外，极化强度的大小与该点到轴的距离成正比，即 $\boldsymbol{p} = p_0 \boldsymbol{r}/2$. (a) 求此介质内的电荷密度. (b) 如果该圆柱以一个恒定的角速度 ω 绕其轴旋转而同时保持极化强度 $\boldsymbol{p}$ 不变，求圆柱轴上远离两端处的磁感应强度.

题 2.5 有一个半无限长的螺线管，半径为 R，单位长度匝数为 n，载流 I. 求出螺线管末端、轴附近即 $r \ll R$，$z=0$ 处磁场的径向分量 $B_r(z_0)$的表达式.

题 2.10 一圆柱体内磁场 $\boldsymbol{B}$ 具有某种分布. 已知在柱坐标下 $B_z = B_0(1+\alpha r^2+\beta z^2)$(其中 B_0、α、β 均为常数)，且在轴线上($r=0$)满足 $B_r = B_\phi = 0$，而 $B_\phi \equiv 0$. 试求(a) 圆柱体内磁场 $\boldsymbol{B}$ 的径向分量 B_r. (b) 圆柱体内电流密度 j.

题 2.31 假定在正圆柱体的轴线上，磁场为



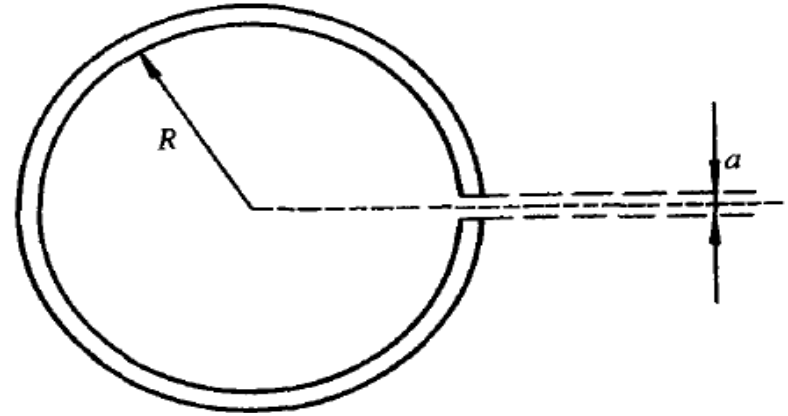
$$\boldsymbol{B} = B_0(1+\nu z^2)\boldsymbol{e}_z$$

在柱体中 $\boldsymbol{B}$ 的 θ 分量为零. (a) 计算近轴处磁场的径向分量 $B_r(r,z)$. (b) 若上述磁场对所有半径 r 均有效，柱体内部的电流密度 $\boldsymbol{j}(r,z)$ 如何?

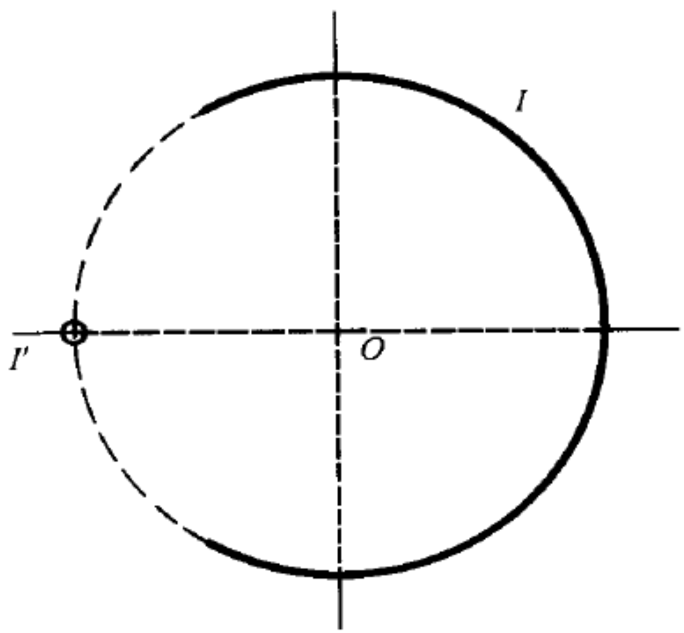
题 2.115 把一个磁矩为 m 的磁偶极子置于一磁透镜中，磁透镜的场分量为 $B_x=\alpha(x^2-y^2)$，$B_y=-2\alpha xy$，$B_z=0$，z 是透镜的轴方向，α 为常数(这叫作六极透镜场). (a) 求作用在偶极子上的作用力的各分量. (b) 能否用一个或多个这样的透镜使具有磁偶极矩的中性粒子束聚焦，说明理由.

题 2.136 某些细菌可以生活在十分腐蚀的区域，如油井或污水浇灌过的庄稼. 一些生活在绝对黑暗和基本上是均匀的油溶液中的细菌，它必须升到上面吸氧与降到下部寻找食物，就面临着如何上下游动的问题. 这个问题用什么方法解决呢? 一类细菌依靠在它的细胞内混入铁氧磁体来解决上述问题. 采用粗糙的近似，定量地分析下面的问题. (a) 为什么不用液体的压强的变化率而用磁体来解释这个问题? (b) 计算使各个细菌中的小磁针线性排列所需的最小磁矩. (c) 假设小磁针的长度是 10^{-4}cm，计算它的最小直径. (d) 为什么磁针比球形磁体好?

题 2.8 如题图 2.8 所示，半径为 R 的无限长圆柱形导体管壁(厚度可略)，沿轴向开一宽度为 a 的无限长细缝．今沿轴线方向通以面电流密度 j 的稳恒电流．试求：(a) 导体管内的磁感应强度．(b) 导体管外的磁感应强度．(c) 细缝处的磁感应强度．

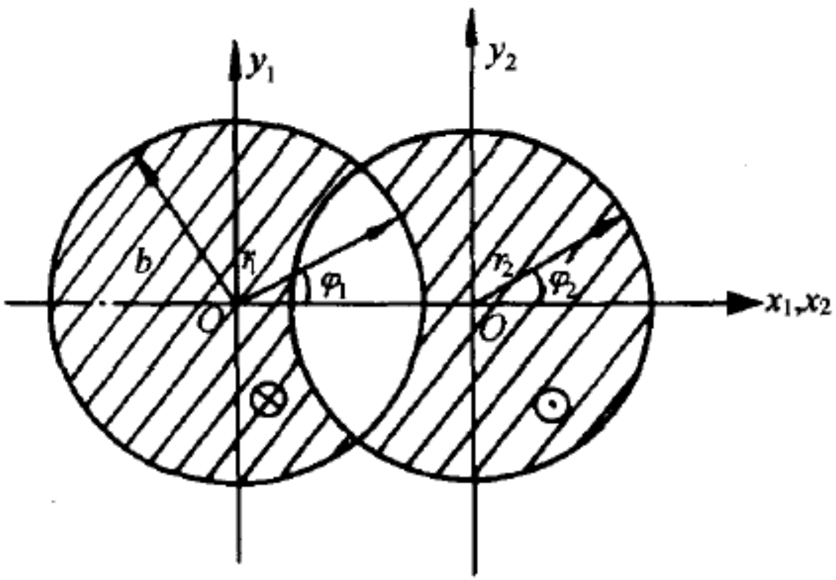


题 2.9 题图 2.9 为一横截面图．半径为 R 的无限长导体圆弧柱面沿轴向(垂直纸面)流有均匀面电流，总电流强度为 I，圆弧的弧度为 $2\theta_0(\theta_0 < \pi)$．又在离轴线 R 的另一处有一同方向的无限长线电流，电流强度为 I'，位于半圆柱面的对称面上．I、I'均垂直纸面向外．试求线电流 I' 上单位长度所受到的磁场力．

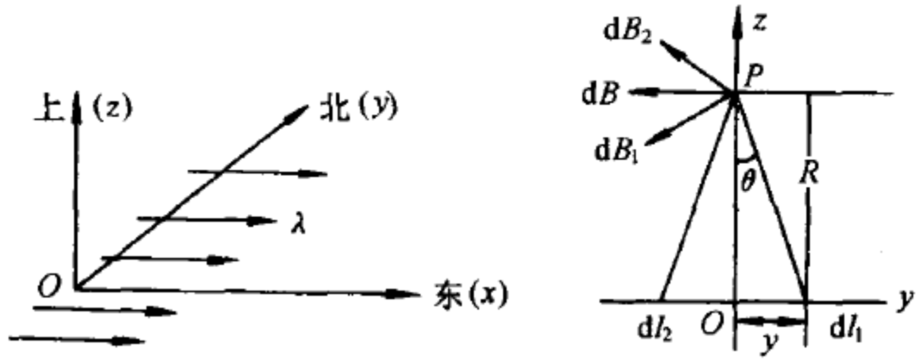


题图 2.9

题 2.21 题图 2.21 中的导体系统，其截面由两半径为 b 的圆相交而成. 两圆中心相隔 $2a$，图中阴影区为传导部分，设有阴影的透镜状区域为真空，左边的导体载有均匀电流密度 J 进入纸内，右边的导体载有指向纸外的均匀电流密度 J. 设导体的磁导率和真空相同，求由两导体所包围的真空区域内任一点的磁场强度.

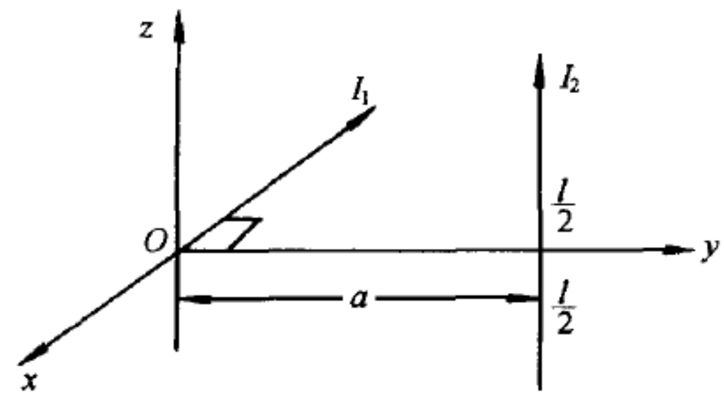


题 2.82 一个强度为λ(A/m，沿 y 方向)的均匀面电流层位于水平面($z=0$)向东(x 方向)流动，如题图 2.82(a)．求在下列位置处力的大小与方向：(a) 在电流层上方相距 R 处的长为 l 的水平导线，载电流 i(A)，向北流动．(b) 同样的线段，但电流向西流动．(c) 一半径为 r 的线圈，在电流层上方相距 R 处($r<R$)，载电流 i，磁矩方向向东．(d) 同样的线圈但磁矩向北．(e) 同样线圈但磁矩向上．对你的回答加以简单的说明．



(a) (b)

题 2.81 两条互相垂直的长导线距离为 a，载流为 I_1、I_2，考虑 I_2 上的一小段$\left(-\dfrac{l}{2},\dfrac{l}{2}\right)$ ($l\ll a$)，如题图 2.81 所示．(a) 求作用在这段导线上的净力和力矩．(b) 如果导线可沿它们的连线 a 自由转动，他们将有怎样的位形？这个位形对应于系统有最大还是最小磁能．



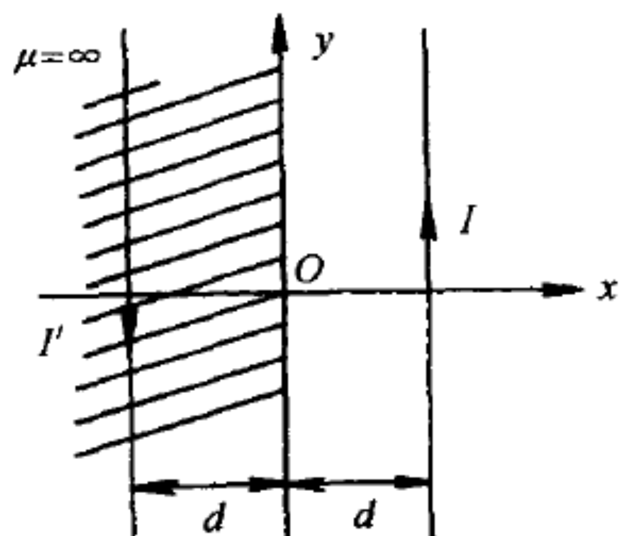
题图 2.81

解 (a) I_1 在点$(0,\ a,\ z)$处的场为

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{a^2+z^2}}\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\boldsymbol{e}_y-\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\boldsymbol{e}_z\right)$$

题 2.106 一个低速电子被引入到相互垂直的电、磁场中，即 $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$. (a) 电子的速度满足什么时，电子以恒定的速度运动？(b) 考虑一束速度任意分布的电子同时入射到一个和电场垂直的平面内，试问经过多少时间，这些电子又同时回到此平面内？

题 2.87 一根细长导线载有电流 I，离半无限大铁块距离 d，如题图 2.87 所示. 假设铁块的磁导率为无限大，求作用于导线单位长度上的力的数值及方向.



2020

题 2.135 一个磁场可以抑制二极管中的电流. 设想在 yz 平面中两块无限大导体板之间，充满 $\boldsymbol{B}=(0,\ 0,\ B_0)$ 的匀强磁场. 负极板位置在 $x=0$ 处，正极板位于 $x=d$ 处. 正极板处于正电位 V_0. 电子束以零初速度从负极板出发，电子密度使极板间形成一非均匀的电场 $\boldsymbol{E}=\left(-\dfrac{\partial\phi}{\partial x},\ 0,\ 0\right)$. (a) 在稳恒条件下，描述电子运动的哪些量是运动常数? (b) 如果要使电子在到达正极板之前返回，所加磁场应有多大?

题 2.107 一个带有 $+10^{-6}$C 电量的粒子以 $1300\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度沿着纸的平面在磁场中向右运动，它受到一个垂直纸平面向外的力，力的大小为 $F_1=2.4\times10^{-3}\mathrm{N}$，方向如题图 2.107(a)所示. 同样的一个电荷以 $1300\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度在同样的磁场中垂直于纸平面向内运动，受到力的大小为 $F_2=2.6\times10^{-3}\mathrm{N}$，方向如题图 2.107(b)所示. 由此求出磁场的大小和方向.

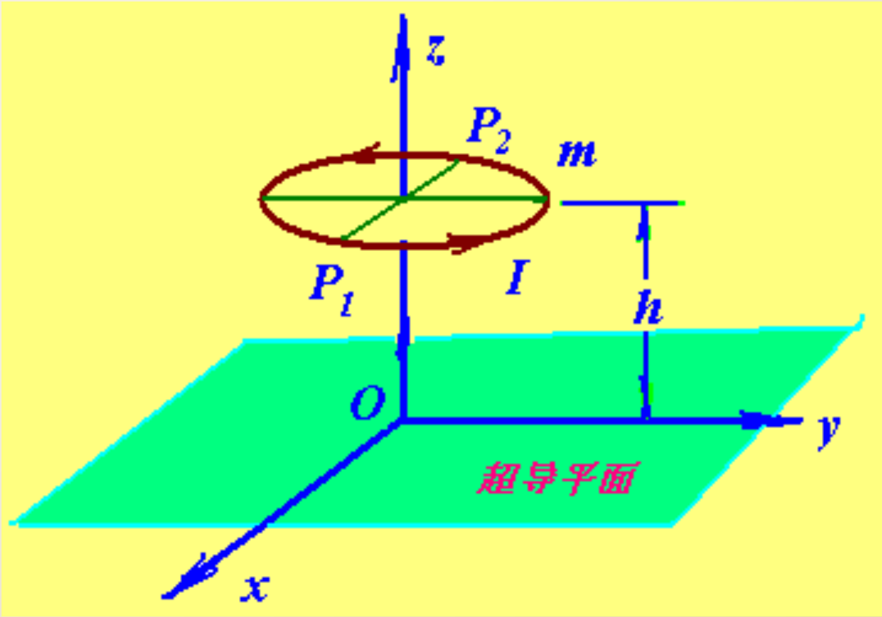
(a)

(b)

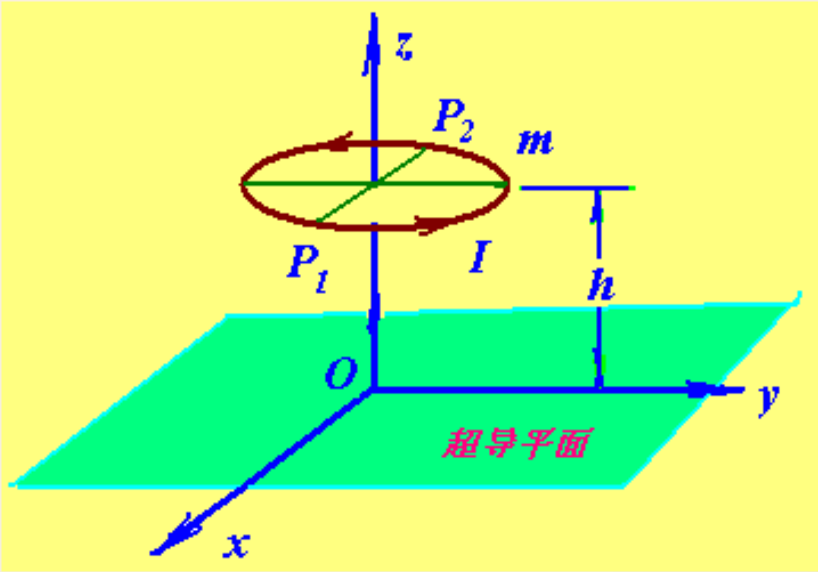
【例】在外磁场中的超导体，平衡后超导体内部的磁感应强度处处为零，超导体表面外侧的磁感应强度与表面平行。在如图所示的直角坐标中，xy平面是水平面，其中有一超导平板，位于z=0处，在z=h处有一质量为m、半径为r、环心在z轴上、环平面为水平面的匀质金属圆环，且r>>h。在圆环内通以稳恒电流，刚好使圆环漂浮在z=h处。

1．试求圆环中的电流强度；

2．若使圆环保持水平，从平衡位置稍稍偏上或偏下，圆环将上、下振动。试求振动周期T。

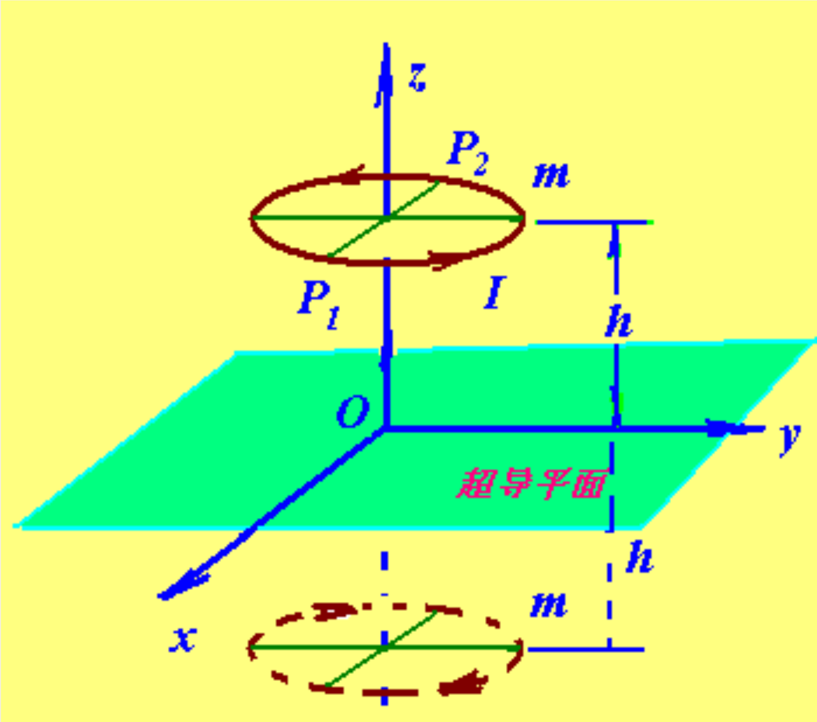


【解】 超导平板内激起感应电流，产生附加磁场。平衡后，圆环电流的磁场及超导平板内感应电流的附加磁场，在超导平板内应相互抵消。

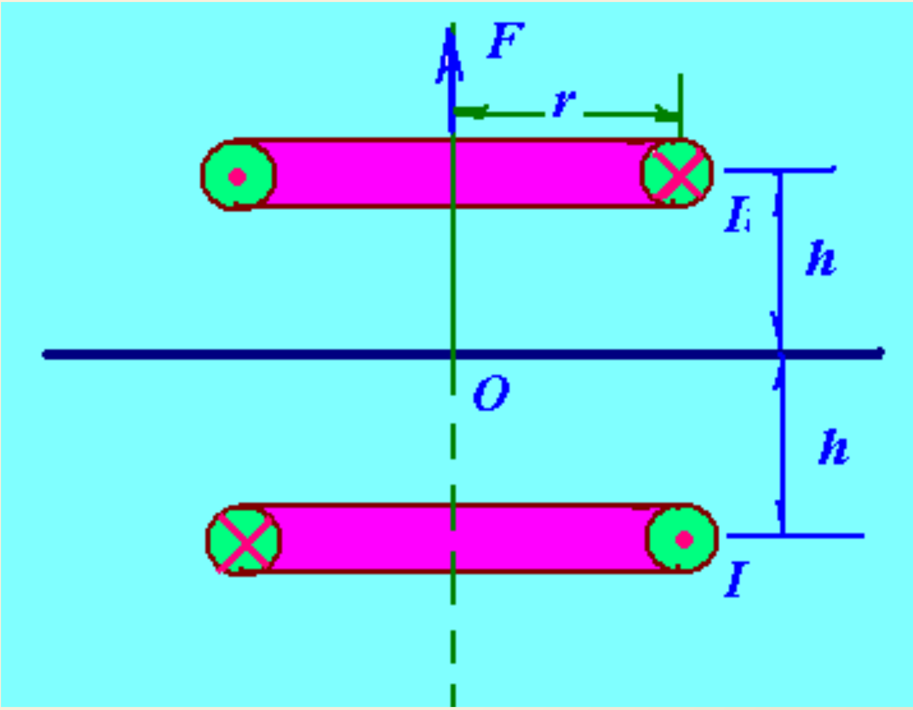


与静电镜像法相仿，超导平板内感应电流在z＞0区域产生的磁场，可用一个镜像圆环电流产生的磁场来代替，镜像圆环与原圆环相对xoy平面境对称，电流方向与原因环电流方向相反，电流大小相同，这样，两电流在xoy平面上面的总磁场沿水平方向.

因两电流反向，安培力为排斥力，方向竖直向上．当此安培力的大小与原圆环所受重力(竖直向下)的大小相同时，原圆环达到平衡，漂浮在高h处，由此可求出原圆环电流强度I．注意到r>>a的条件，两圆环电流之间的安培力可简化为两平行长直载流导线之间的安培力.



因题设r>>h，可把两圆环近似看作两长直平行导线，则F_0的方向向上，大小为：



$$F_0 = I\,2\pi r\,\frac{\mu_0 I}{2\pi\cdot 2h} = \frac{\mu_0 I^2 r}{2h}$$

圆环平衡时，F_0与重力mg抵消，有：

$$\frac{\mu_0 I^2 r}{2h} = mg \Rightarrow I = \sqrt{\frac{2mgh}{\mu_0 r}}$$

2．取圆环环心的平衡位置为坐标原点，取竖直向上的z’轴。当圆环从平衡位置保持水平上移到z’位置，镜像圆环将相应地下移z’，于是，原圆环所受向上安培力F的大小为：

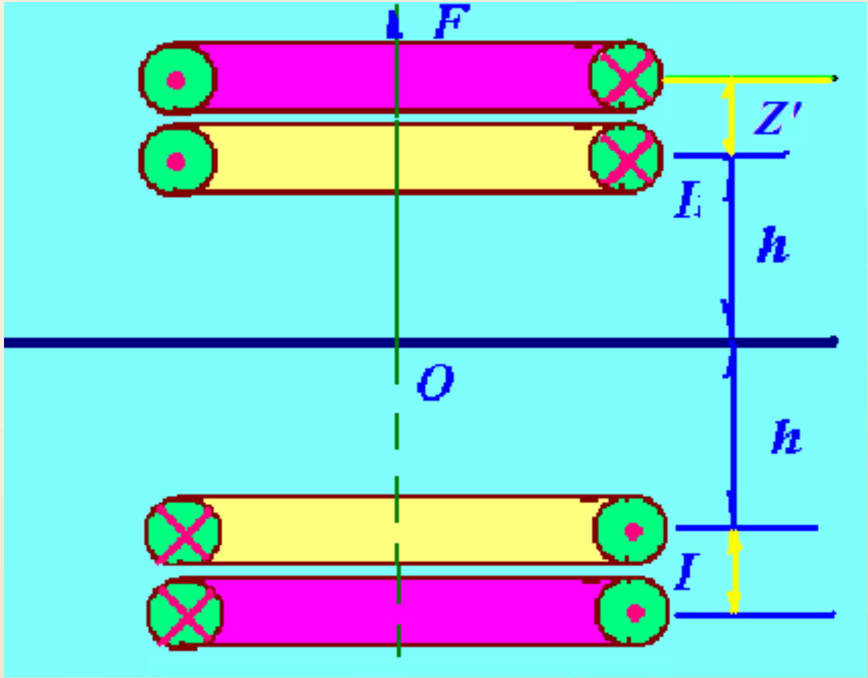
$$F = \frac{\mu_0 I^2 r}{2(h+z')} = \frac{\mu_0 I^2 r}{2h}\left(1+\frac{z'}{h}\right)^{-1} = mg\left(1+\frac{z'}{h}\right)^{-1}$$

因小编离，故z’<<h,

$$F = mg\left(1-\frac{z'}{h}\right)$$

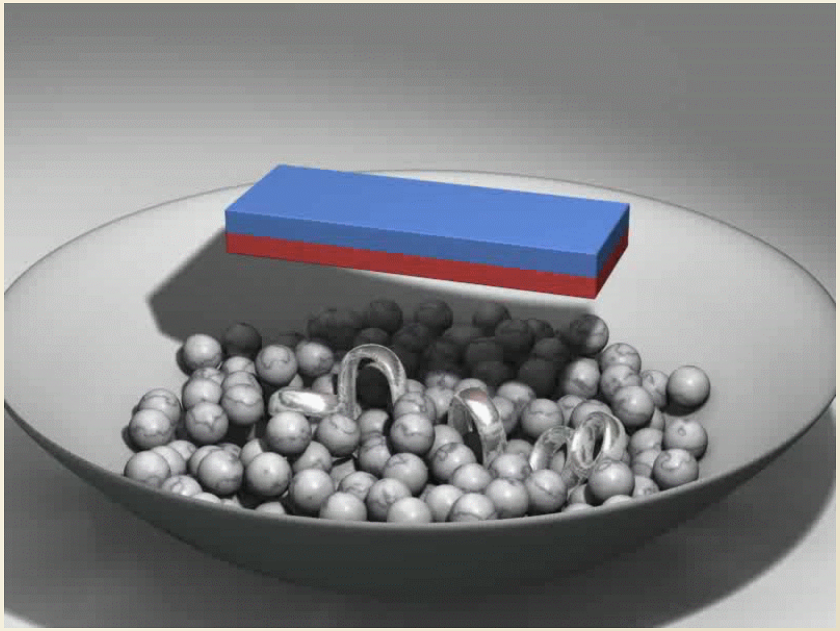
向上合力为：

$$F = F - mg = -\frac{mg}{h}z'$$

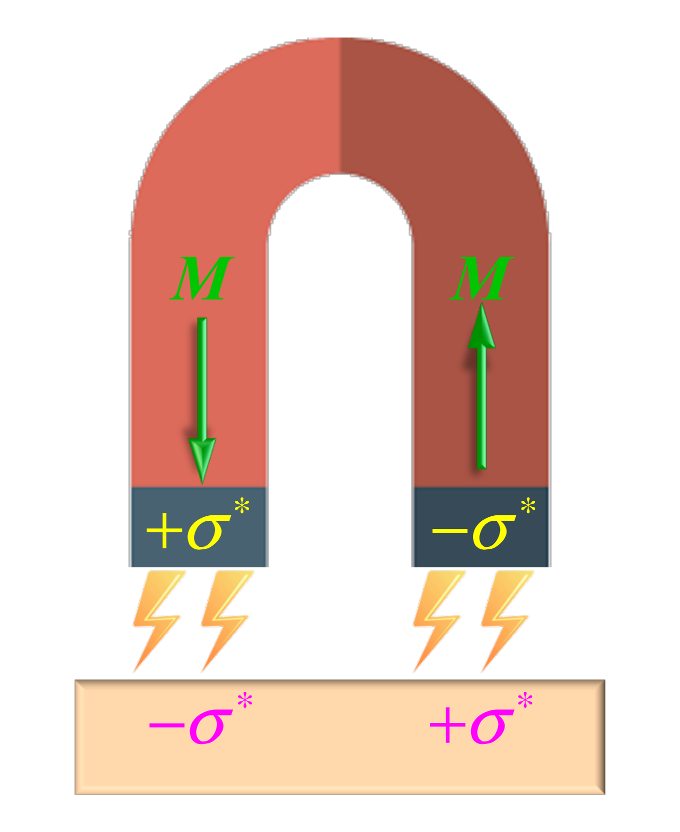


这是一个线性回复力，它使原圆环在平衡位置附近上、下作简谐振动，振动周期为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{h}}} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$



例：一马蹄形永久磁铁，两磁极总面积为 $2S$，磁化强度为 M，求它对衔铁的吸力(设衔铁与磁铁距离很近)。



解：马蹄形磁铁两端表面上的极化磁荷面密度为

$$\sigma_1^* = +\mu_0 M = +\sigma^*$$

$$\sigma_2^* = -\mu_0 M = -\sigma^*$$

衔铁与磁极相对部分感应出反号面磁荷，因此吸力为

$$F_m = \left(-\sigma_1^* S\right)\frac{\sigma_1^*}{2\mu_0} + \left(-\sigma_2^* S\right)\frac{\sigma_2^*}{2\mu_0} = \frac{\sigma^{*2} S}{\mu_0}$$

$$\Rightarrow \quad F_m = \mu_0 M^2 S$$

Thank You