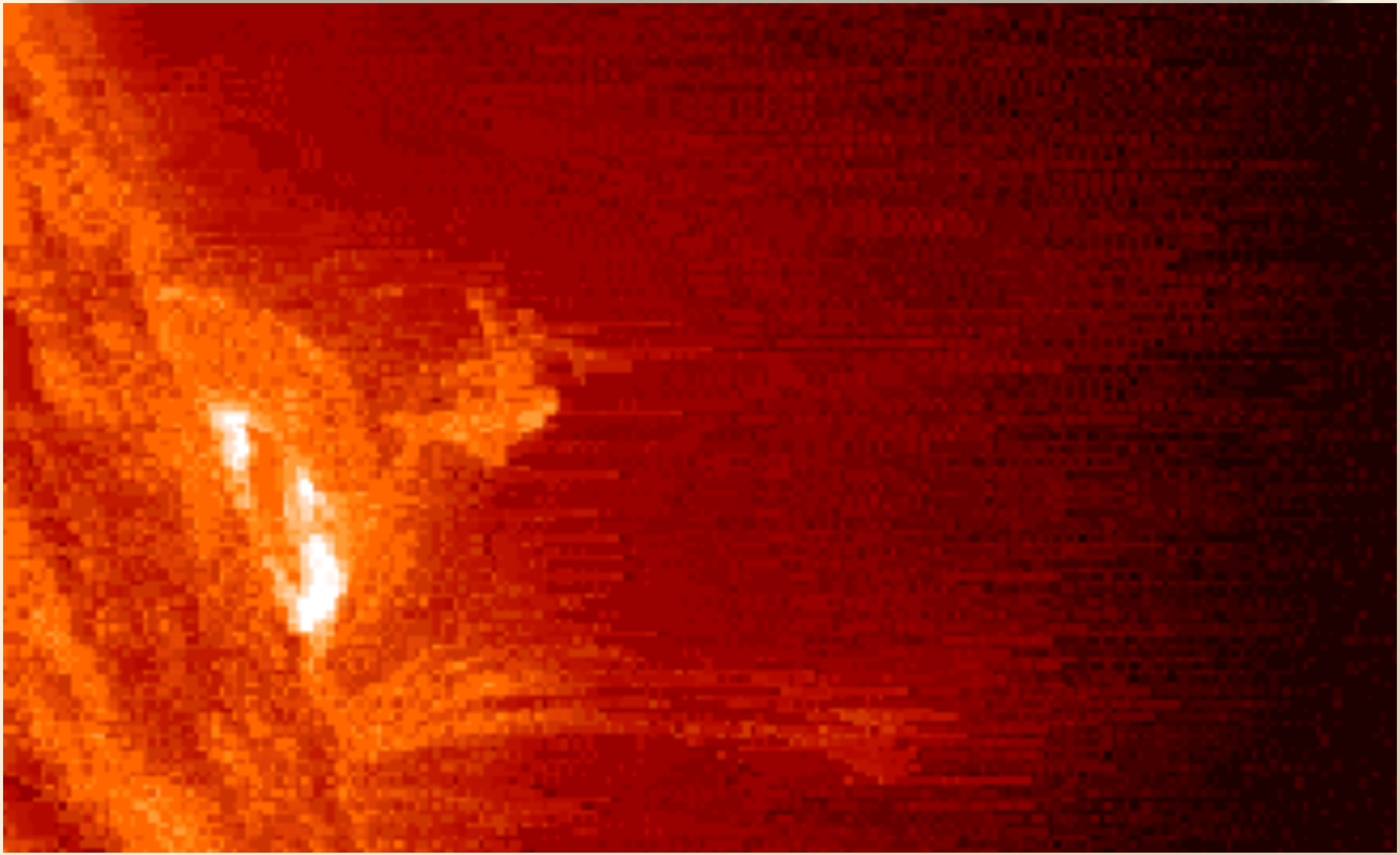
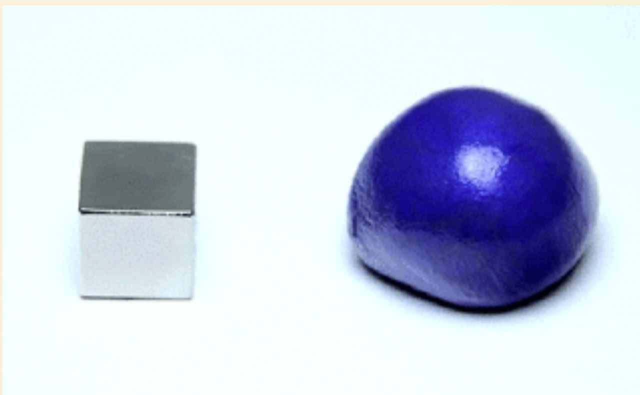
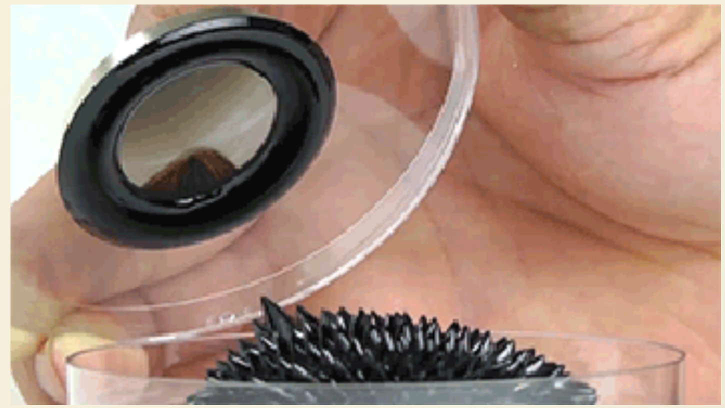
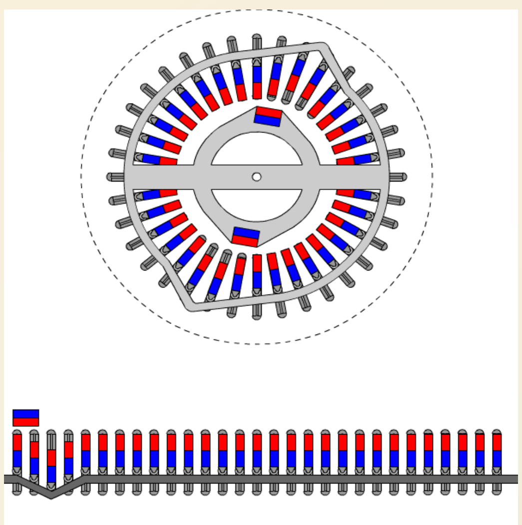
第八章 磁场的能量

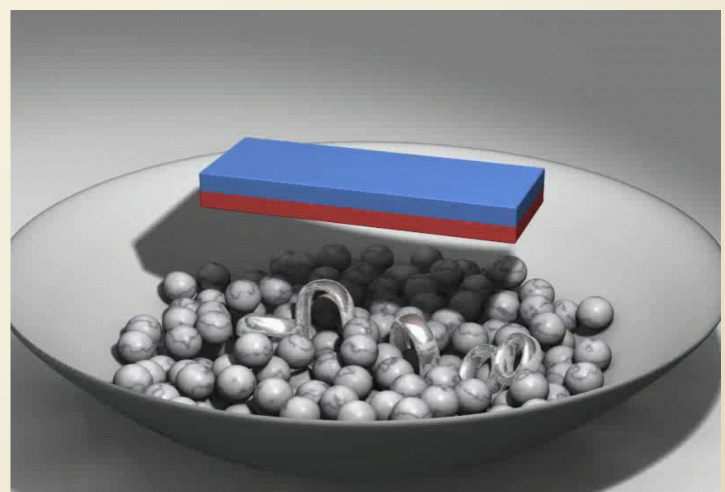


Magnets have unlimited stored energy?

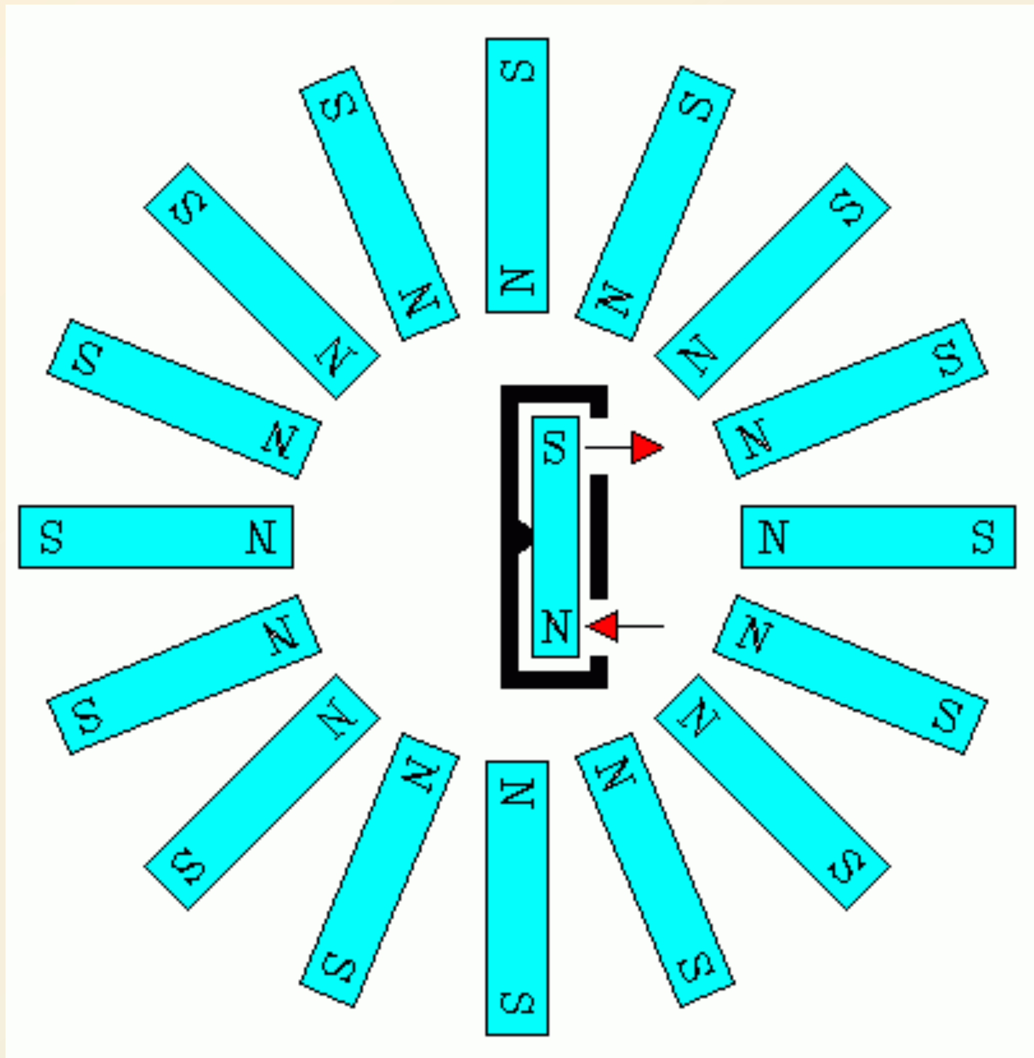


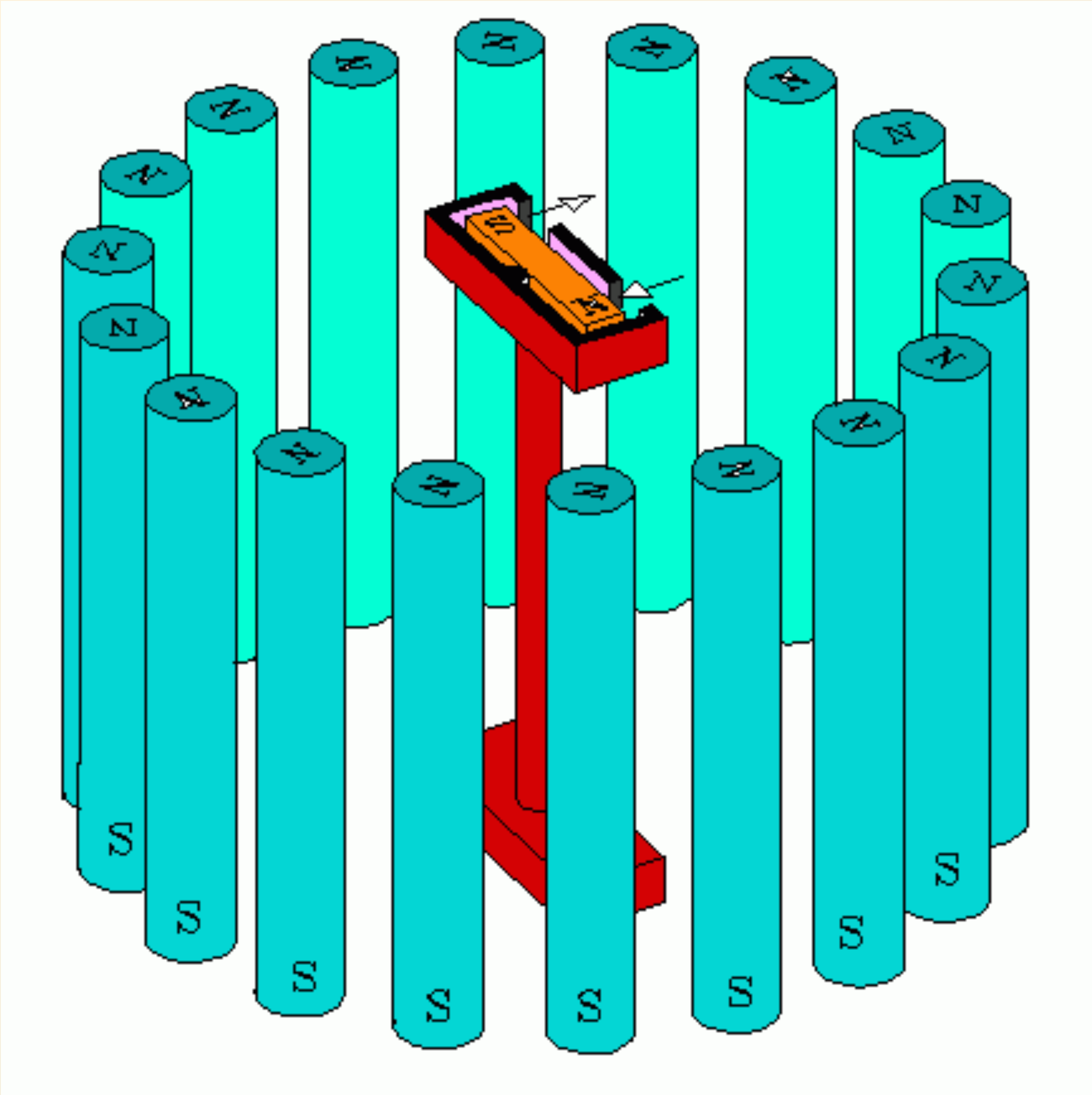


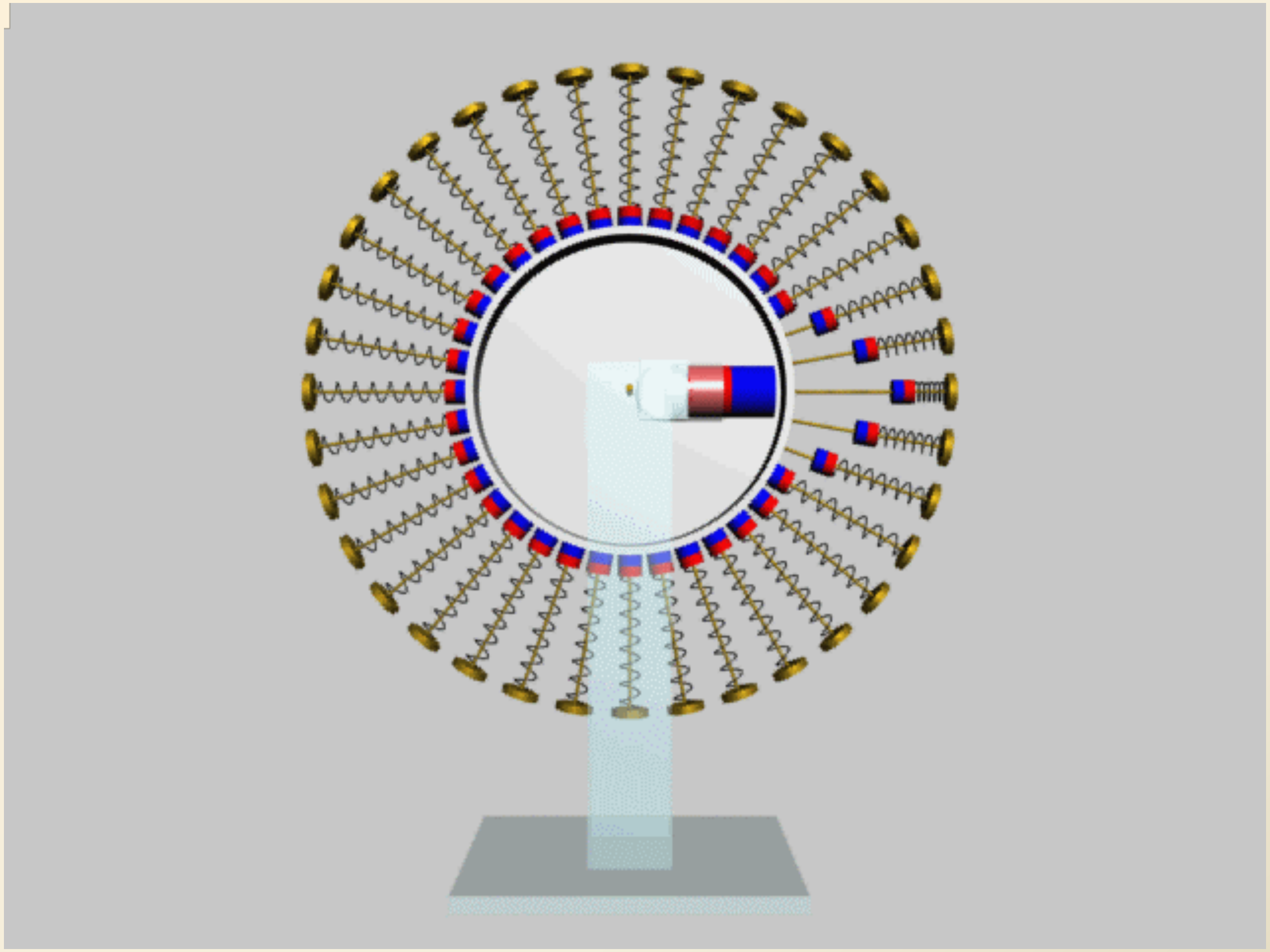


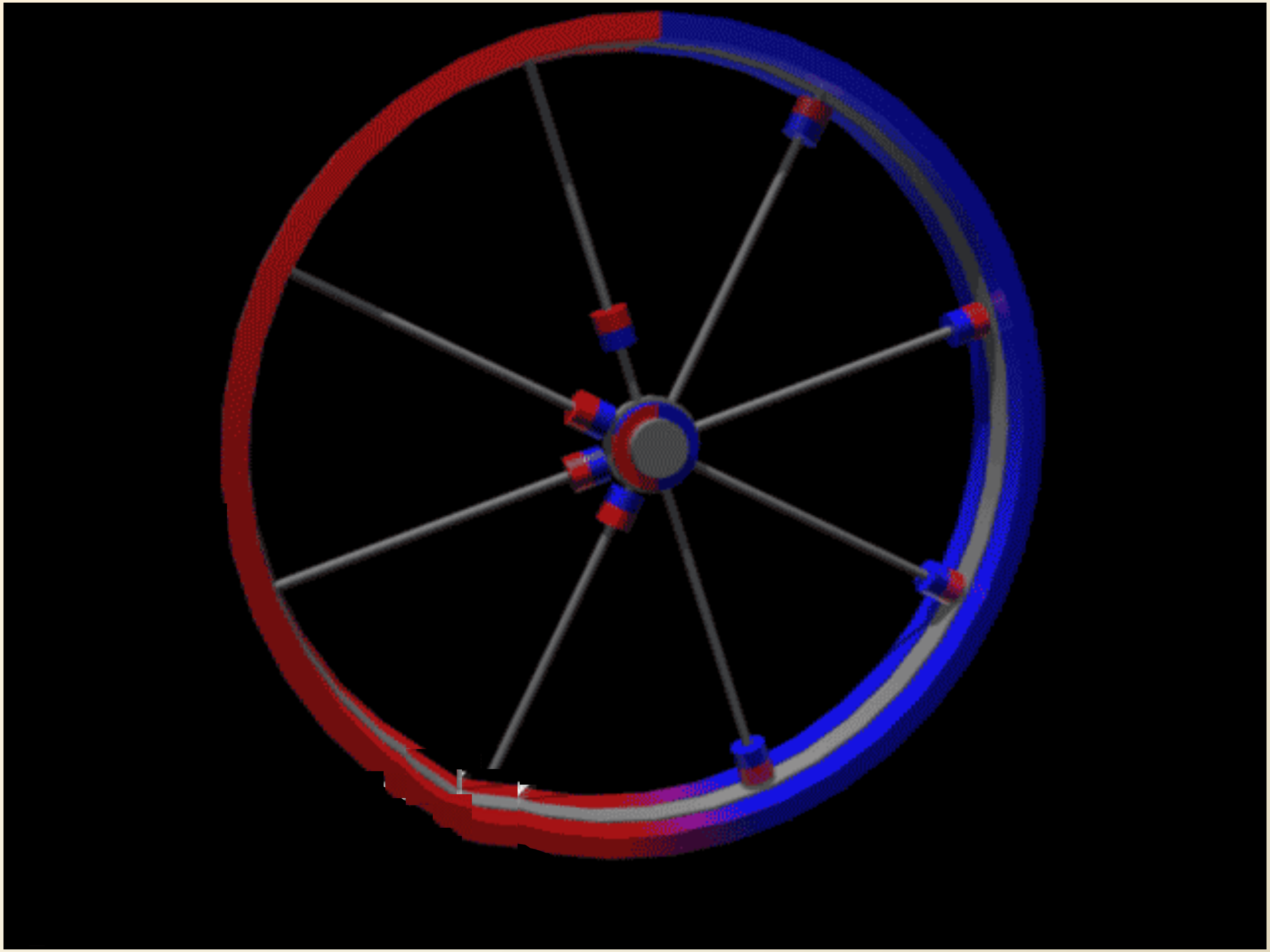


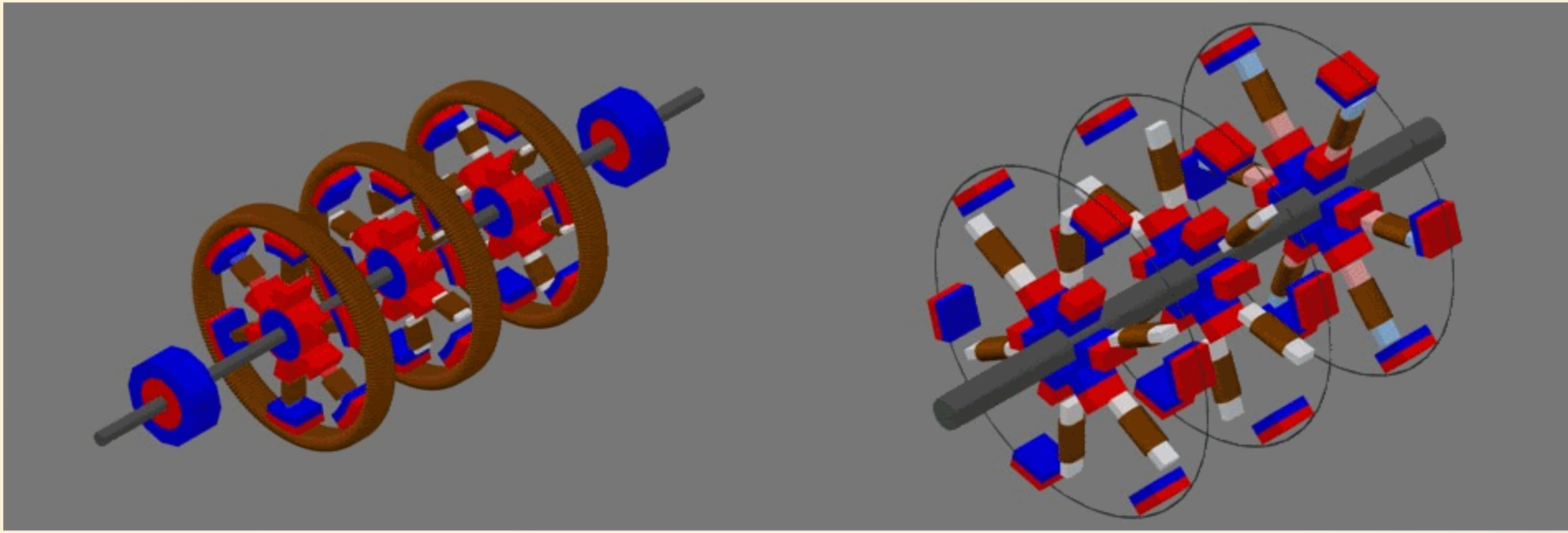
Crazy design: magnet motor

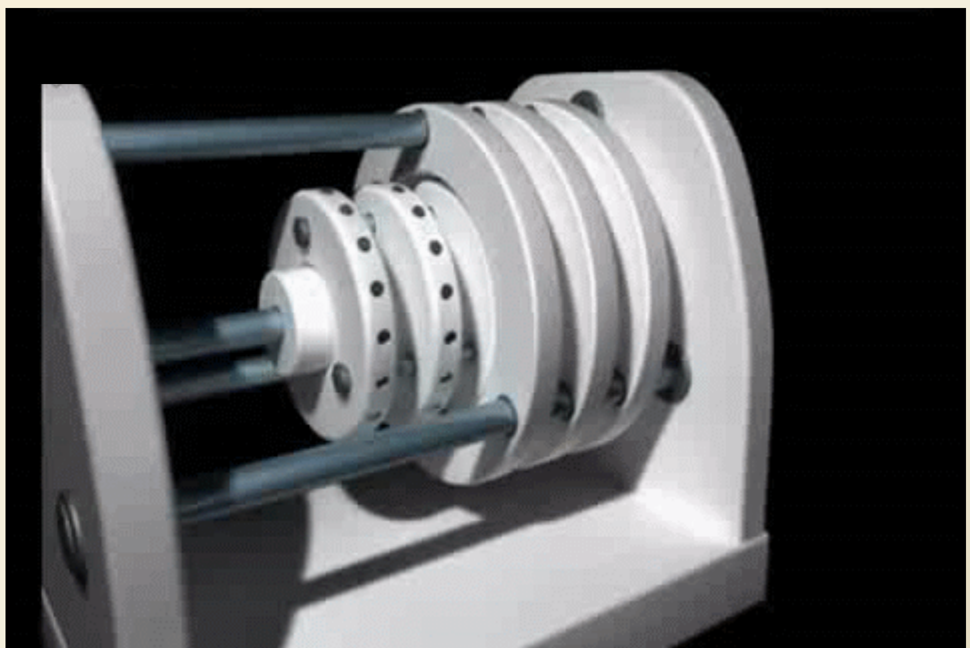


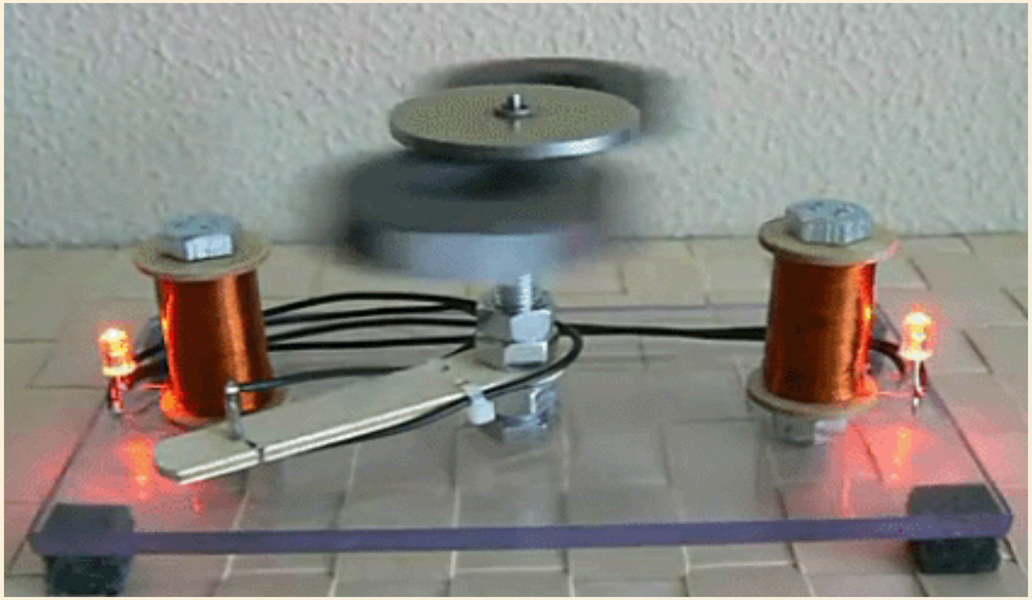

N
S
S
S
S
S
S
S
S
S

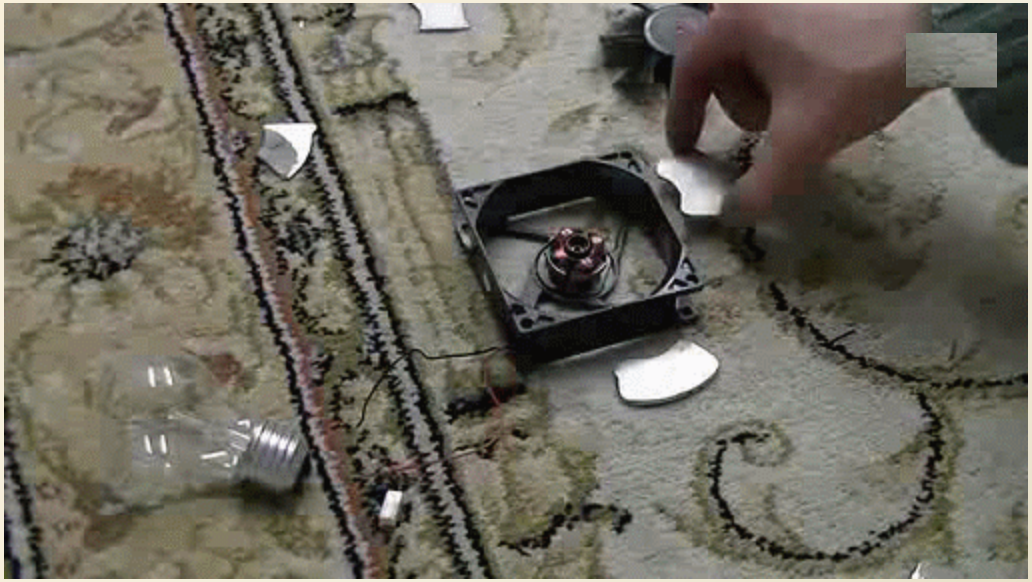












回顾和猜测

- 静电能：介质已经固定于给定位置，电场从无到有建立过程中外界抵抗静电力做功

$$W=\iiint\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\right)dV=\iiint\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)dV+\iiint\left(\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}\right)dV$$

- 外界在单位体积上做的功

$$\delta a=\iiint\vec{E}\cdot\delta\vec{D}\,dV=\varepsilon_0\iiint\vec{E}\cdot\delta\vec{E}\,dV+\iiint\vec{E}\cdot\delta\vec{P}\,dV$$

- 极化功密度 $\delta a'=\vec{E}\cdot\delta\vec{P}$

- 极化能密度(线性介质) $w_{极}=\dfrac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}$

回顾和猜测

- 磁能：介质已经固定于给定位置，磁场从无到有建立过程中外界抵抗涡旋电场力做功

$$W=\iiint\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)dV=\iiint\left(\frac{1}{2}\mu_0 H^2\right)dV+\iiint\left(\frac{1}{2}\mu_0\vec{H}\cdot\vec{M}\right)dV$$

- 外界在单位体积上做的功

$$\delta a=\iiint\vec{H}\cdot\delta\vec{B}\,dV=\mu_0\iiint\vec{H}\cdot\delta\vec{H}\,dV+\mu_0\iiint\vec{H}\cdot\delta\vec{M}\,dV$$

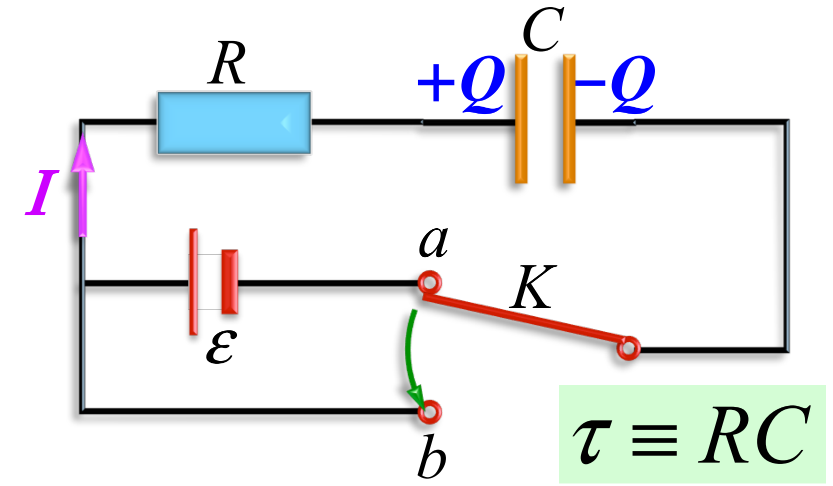
- 磁化功密度 $\delta a'=\mu_0\vec{H}\cdot\delta\vec{M}$

- 磁化能密度(线性介质) $w_{极}=\frac{1}{2}\mu_0\vec{H}\cdot\vec{M}$

RC 回路中的能量分析

■ 撤去电源 (放电)

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau}, \quad I = -\frac{Q_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$



$$\tau \equiv RC$$

能量从何而来

$$dQ_{热} = RI^2 dt = R\frac{Q_0^2}{\tau^2} e^{-2t/\tau} dt$$

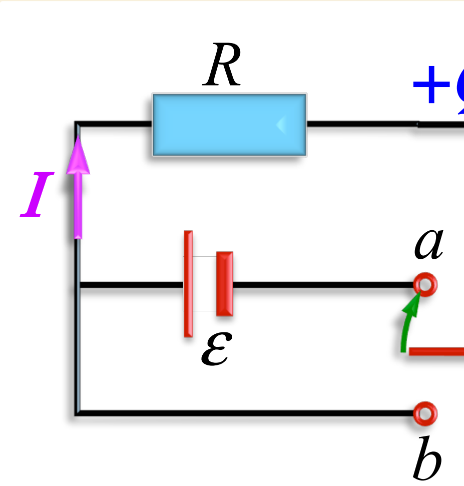
$$Q_{热} = \int dQ_{热} = \frac{RQ_0^2}{\tau^2}\int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{RQ_0^2}{2\tau} = \frac{Q_0^2}{2C}$$

可见电阻上产生的焦耳热来源于电容器中的电能，电容器是一个储能元件。

RC 回路中的能量分析

■ 接通电源 (充电)

$$\varepsilon = IR + \frac{Q}{C}, \quad \left(I = \frac{dQ}{dt} \right)$$



$$\tau \equiv RC$$

■ 电源做功功率

$$P_S = I\varepsilon = I^2R + \frac{IQ}{C} = I^2R + \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = I^2R + \frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)$$

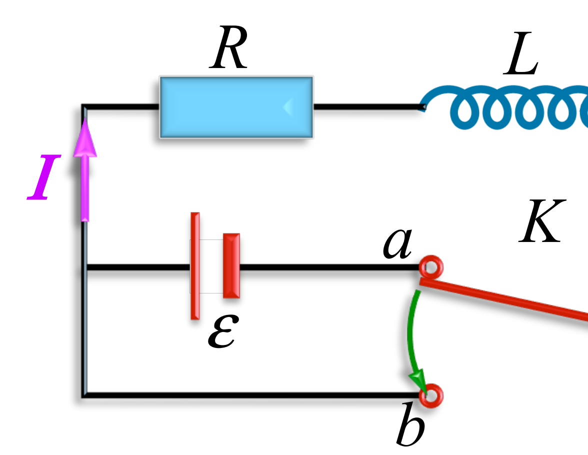
电源提供的能量，

一部分转化为焦耳热，一部分克服电场力做功。

RL 回路中的能量分析

- 撤去电源 (放磁)

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$



$$\tau \equiv L/R$$

能量从何而来？

$$dQ_{热} = RI^2 dt = RI_0^2 e^{-2t/\tau} dt$$

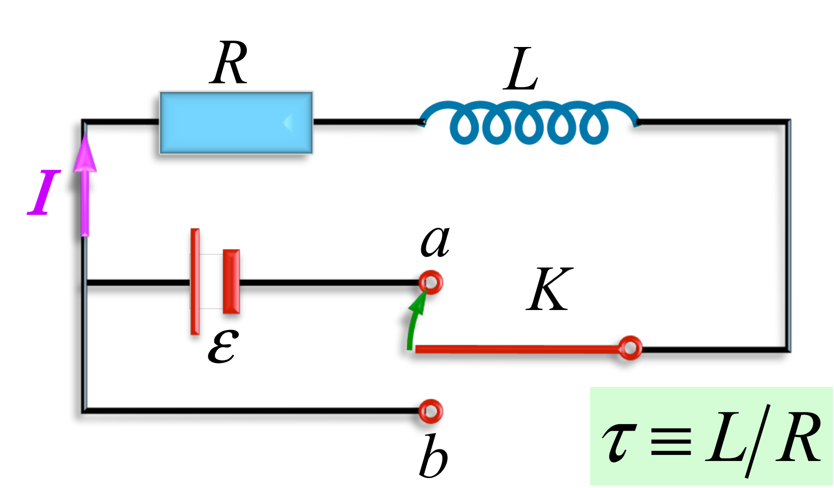
$$\Rightarrow \quad Q_{热} = \int dQ_{热} = RI_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{\tau}{2} RI_0^2 = \frac{1}{2} L I_0^2$$

可见电阻上产生的焦耳热来源于线圈中的磁能，电感线圈是一个储能元件。

RL 回路中的能量分析

- 接通电源 (充磁)

$$\varepsilon = L\frac{dI}{dt} + IR$$



$$\tau \equiv L/R$$

- 电源做功功率

$$P_S = I\varepsilon = I^2R + LI\frac{dI}{dt} = I^2R + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right)$$

电源提供的能量，

一部分转化为焦耳热，一部分克服自感线圈电动势做功。

磁能

问题：什么是磁能 

回答：电流从无到有（或曰磁场从无到有）
无限缓慢的建立过程中，
外界抵抗感应电动势（或曰抵抗涡旋电场力）所做的功。

- 该功仅与电流分布(或磁场)分布有关，而由过程无关
- 感应电动势 $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt} \to 0$
- 抵抗感应电动势做功功率 $P = -I\varepsilon = +I\dfrac{d\Phi}{dt} \to 0$
- 抵抗感应电动势做功 $A = \int Pdt = \int Id\Phi$ 有限

单个载流线圈的磁能

- 线圈中 I 从 $0 \to I_0$ 的过程中，外界抵抗感应电动势做功

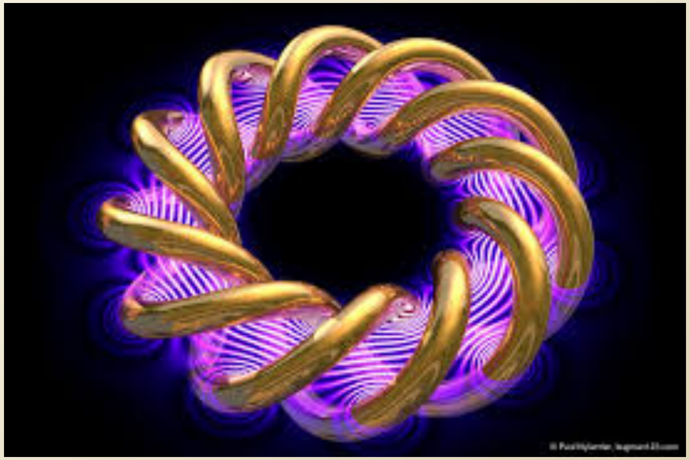
$$A = -\int I\varepsilon dt = \int I d\Phi = \int_0^{I_0} ILdI = \int_0^{I_0} d\left(\frac{1}{2}LI^2\right) = +\frac{1}{2}LI_0^2$$

- 载流线圈通有电流 I 时，其磁能为

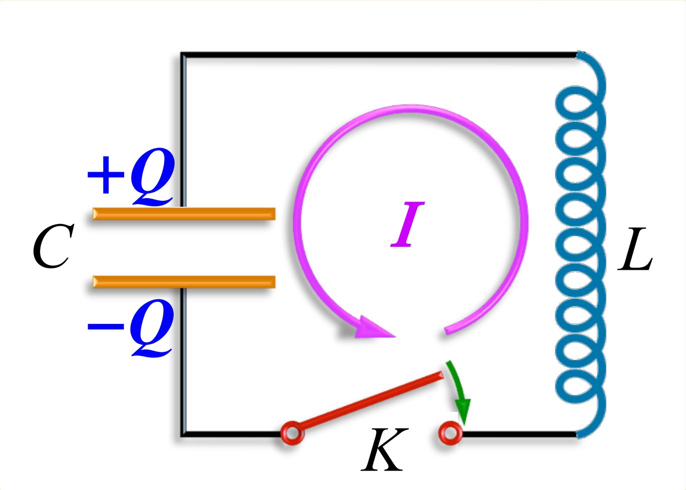
$$\boxed{W = \frac{1}{2}LI^2}$$

$$\Big\downarrow \ \Phi = LI$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}I\Phi}$$



例：一电容 C 蓄有电量 Q_0，在 $t=0$ 时刻接通 K，经自感为 L 的线圈放电求：(1) L 内磁场能量第一次等于 C 内电场能量的时刻 t_1；(2) L 内磁场能量第二次达到极大值的时刻 t_2。

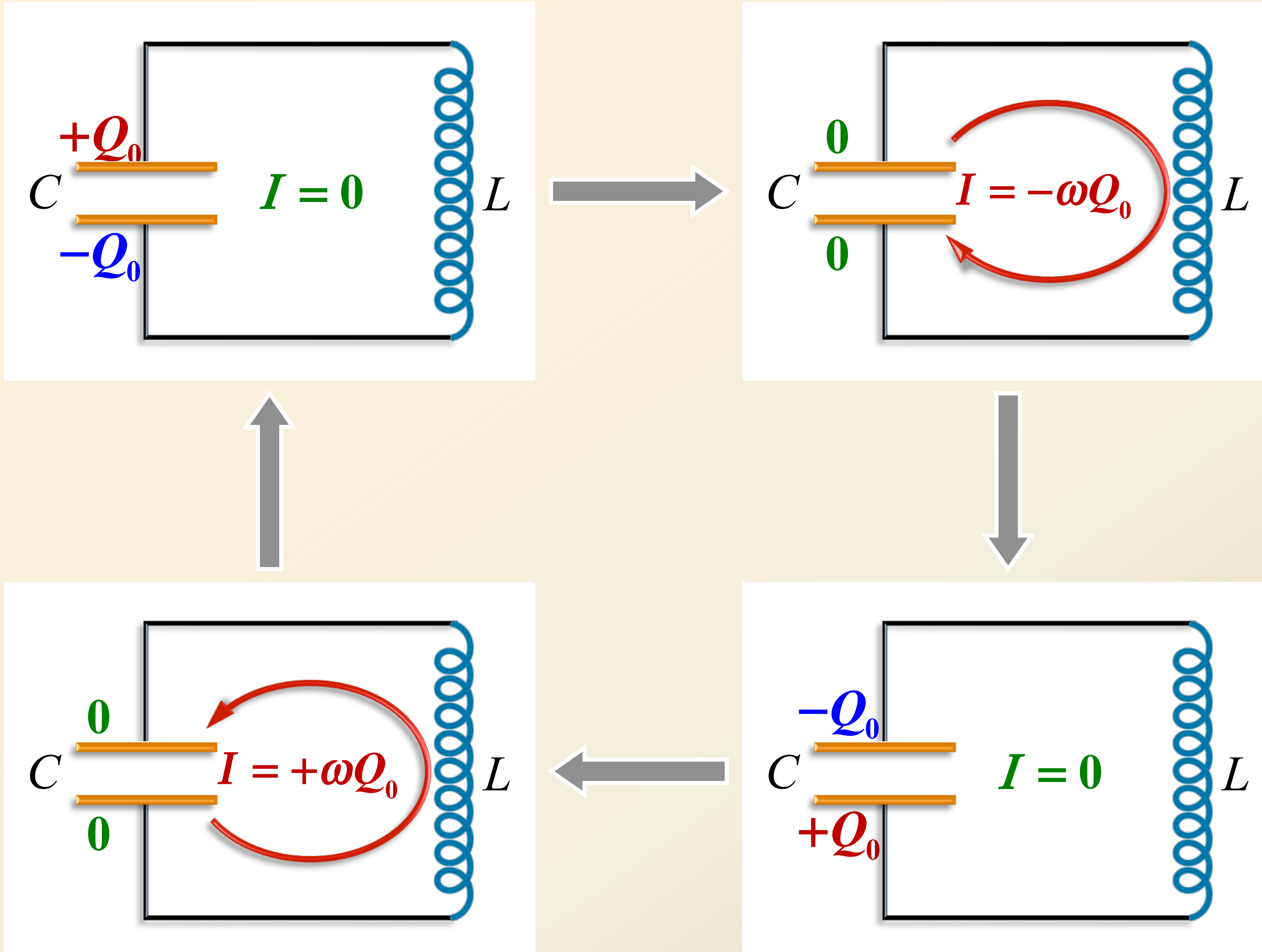


解：约定图示电流 I 和 Q： $I=+\dfrac{dQ}{dt}$

应用回路定律 $L\dfrac{dI}{dt}+\dfrac{Q}{C}=0 \Rightarrow \dfrac{d^2Q}{dt^2}+\omega^2Q=0$ $\quad \omega\equiv\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

利用初始条件 $Q(0)=Q_0, I(0)=0$ 得到

$$Q(t)=Q_0\cos\omega t,\ \ I(t)=-\omega Q_0\sin\omega t$$

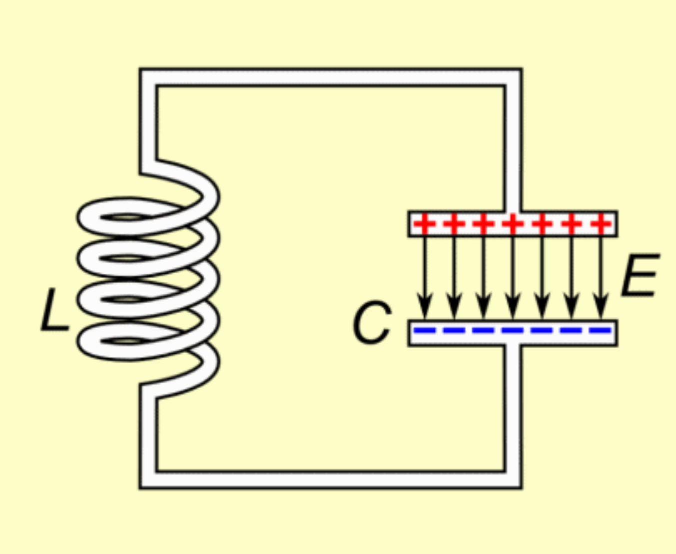


$+Q_0$
C
$-Q_0$
$I=0$
L
0
C
0
$I=-\omega Q_0$
L
0
C
0
$I=+\omega Q_0$
L
$-Q_0$
C
$+Q_0$
$I=0$
L

$$Q(t)=Q_0\cos\omega t,\ \ I(t)=-\omega Q_0\sin\omega t$$

$$\omega\equiv\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

C 与 L 内的能量



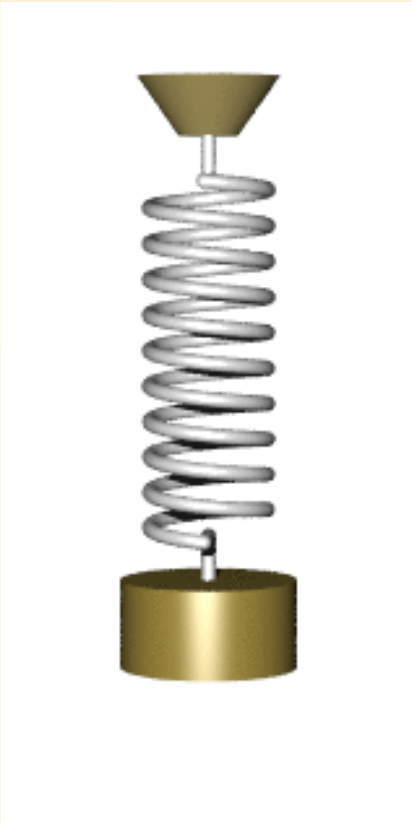
$$W_e=\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q_0^2}{2C}\cos^2\omega t$$

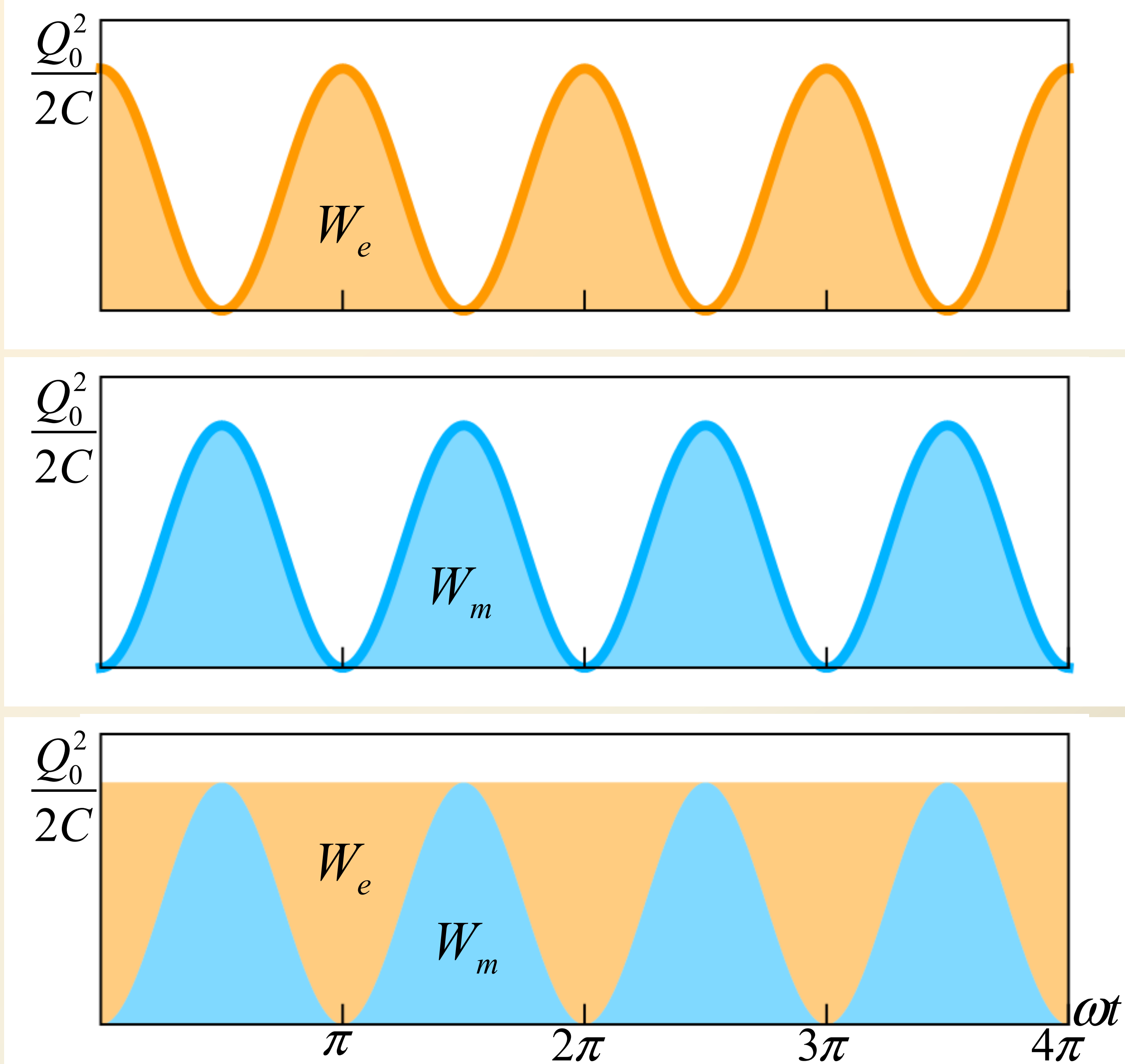
$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{Q_0^2}{2C}\sin^2\omega t$$

任一时刻 t 时的总能量

$$W=W_e+W_m=\frac{Q_0^2}{2C}\left(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t\right)=\frac{Q_0^2}{2C}\ \text{常数}$$

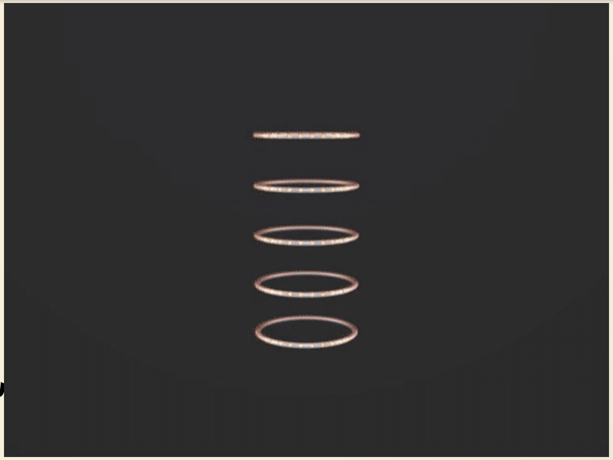
能量在 C 与 L 之间相互交换，但总能量保持不变





$\frac{Q_0^2}{2C}$
W_e
$\frac{Q_0^2}{2C}$
W_m
$\frac{Q_0^2}{2C}$
W_e
W_m
ωt
π
2π
3π
4π

载流线圈系统



- 穿过第 i 个线圈中的磁通量

$$\Phi_i=\sum_{j=1}^{N}\Phi_{ij}=\sum_{j=1}^{N}M_{ij}I_j,\quad (M_{ij}=M_{ji})$$

- 电流变化时，第 i 个线圈上的感应电动势

$$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi_i}{dt}=-\sum_{j=1}^{N}M_{ij}\frac{dI_j}{dt}$$

- 外界抵抗感应电动势做功功率 $P_i=-I_i\varepsilon_i=\sum_{j=1}^{N}M_{ij}I_i\frac{dI_j}{dt}$

- 总的功率 $P=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}M_{ij}I_i\frac{dI_j}{dt}$

载流线圈系统

- 总的功率 $$P=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}M_{ij}I_i\frac{dI_j}{dt}$$

$$\because\quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}M_{ij}I_i\frac{dI_j}{dt}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}M_{ji}I_j\frac{dI_i}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}M_{ij}I_j\frac{dI_i}{dt}$$

$$\therefore\quad P=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(M_{ij}I_i\frac{dI_j}{dt}+M_{ji}I_j\frac{dI_i}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow\quad P=\frac{d}{dt}\sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}M_{ij}I_iI_j\right)$$

设线圈保持不动，从而 M_{ij} 为常数

载流线圈系统的磁能

- 载流线圈系统的磁能为

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}M_{ij}I_iI_j}$$

$$\Phi_i=\sum_{j=1}^{N}M_{ij}I_j=\sum_{j=1}^{N}\Phi_{ij}$$

穿过第 i 个线圈的总磁通量

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}I_i\Phi_i}$$

自能与互能

- 由于 $L_i = M_{ii}$ ，因此

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} L_i I_i^2 + \sum_{i<j} M_{ij} I_i I_j$$

- 对于两个线圈情形

$$W = \underbrace{\frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2}_{\text{自感磁能}} + \underbrace{M I_1 I_2}_{\text{互感磁能}}$$

- 互感磁能即为两个线圈之间的相互作用能

$$W_{12} = M I_1 I_2 = I_1 \Phi_{12} = I_1 \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}$$

Φ_{12} ： 2 在1中产生的磁通

线圈在外场中的磁能

- 一般地，载流线圈处在外场中的磁能为

$$W = I\Phi_e = I\iint_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S}$$

$\vec{B}_e$：外场

Φ_e：外场穿过线圈的磁通量

在外场中载流线圈电流逐步建立过程中，外界所做的功

- 对于均匀外场中的线圈或非均匀外场中的小线圈

$$W = I\vec{B}_e \cdot \iint_S d\vec{S} = I\vec{B}_e \cdot \vec{S} = \vec{m} \cdot \vec{B}_e$$

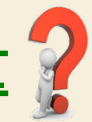
- N 个线圈在外磁场中的磁能

$$W = \sum_{k=1}^{N} I_k \iint_{S_k} \vec{B}_e \cdot d\vec{S} \xrightarrow{\text{外场均匀}} W = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_k \cdot \vec{B}_e = \boxed{\vec{m} \cdot \vec{B}_e}$$

$\vec{m}$：总磁矩

功与能

$$W=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+MI_1I_2$$

如果解读各个能量 

(1) 在 ∞ 处分别建立电流 I_1 和 I_2，
外界抵抗感生电动势做功

$$A_0=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2$$

(2) 维持电流 I_1 和 I_2 不变，将线圈1 由 ∞ 移至给定位置，
外界无需做功

(3) 维持电流 I_1 和 I_2 不变，将线圈2 由 ∞ 移至给定位置，
外界需要抵抗什么力做功？做多大功？

功与能

(3) 维持电流 I_1 和 I_2 不变，将线圈2 由 ∞ 移至给定位置时，两线圈之间的互感系数会变化

- 维持线圈1 电流不变，外接电源需抵抗感生电动势做功

$$A_{1感} = \int_0^\infty I_1 \dot{\Phi}_{12}\, dt = I_1 \int_0^{MI_2} d\Phi_{12} = MI_1 I_2$$

- 维持线圈2 电流不变，外接电源需抵抗动生电动势做功

$$A_{2动} = \int_0^\infty I_2 \dot{\Phi}_{21}\, dt = I_2 \int_0^{MI_1} d\Phi_{21} = MI_1 I_2$$

- 移动线圈2，外界需抵抗安培力做功

$$A_{2安} = -A_{2动} = -MI_1 I_2$$

WHY 

外场中的势能

$$A_{1感}=MI_1I_2=A_{2动}=-A_{2安}$$

结论1：维持各电流不变，移动线圈过程中电源做功等于安培力做功两倍，等于互能或磁能增量的两倍

结论2：维持各电流不变，移动线圈过程中安培力做功等于互能或磁能的增量

- 载流线圈处在外场中的(力学)势能等于在维持电流不变的情形下，移动线圈的过程中外界抵抗安培力做功

$$U=-I\Phi_e=-W_{互}$$

- 安培力 $\vec{F}=-\nabla U$

小载流线圈的势能

- 小载流线圈处在外场中的势能 $U=-\vec{m}\cdot\vec{B}_e$

- 安培力 $\vec{F}=-\nabla U=\nabla\left(\vec{m}\cdot\vec{B}_e\right)$

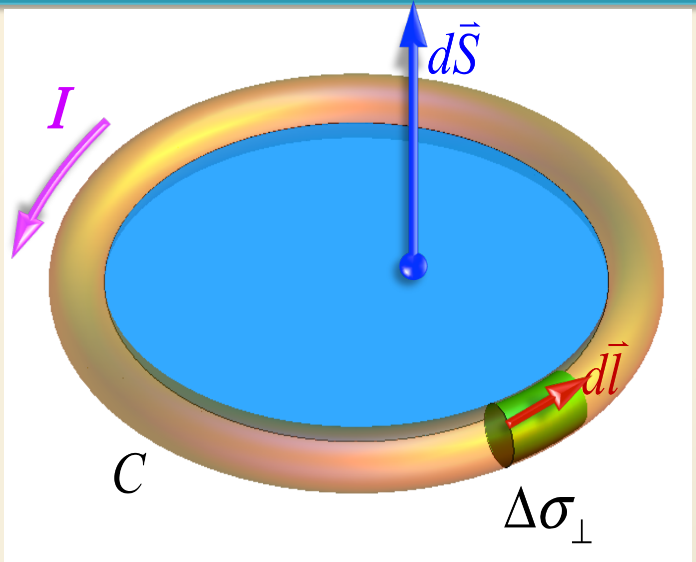
- 对于微观粒子，无需电源维持磁矩不变，因而在外场中的磁能指的就是(力学)势能，即

$$U=-\vec{m}\cdot\vec{B}_e$$

任意电流分布的磁能

- 载流线圈系统的磁能为

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}I_i\Phi_i$$



$$I_i=j\Delta\sigma_\perp$$

$$\Phi_i=\iint_{S_i}\vec{B}\cdot d\vec{S}=\oint_{C_i}\vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}j\Delta\sigma_\perp\oint_{C_i}\vec{A}\cdot d\vec{l}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\oint_{C_i}\vec{j}\cdot\vec{A}\,dl\Delta\sigma_\perp$$

- 对于一般电流分布，磁能为

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\iiint_V\vec{j}\cdot\vec{A}\,dV}$$

磁场的能量

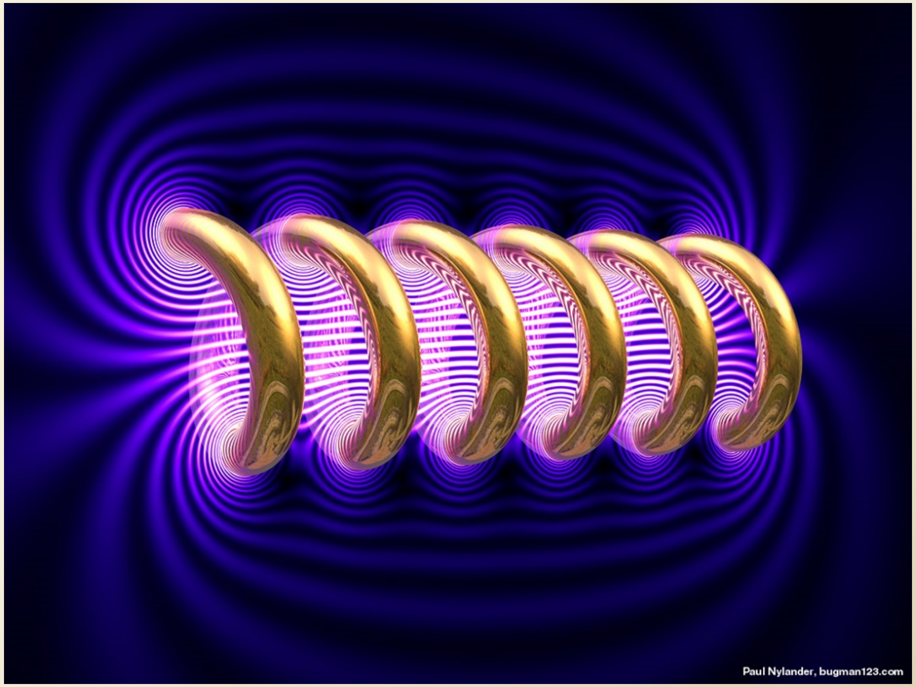
- 螺线管长 l，面积 S，体积 $V=lS$，总匝数 $N=ln$，电流 I

$$B=\mu_0 nI$$

$$\Phi = NBS = \mu_0 NnIS = \mu_0 n^2 IlS$$

$$W=\frac{1}{2}I\Phi=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 V$$

$$W=\frac{B^2}{2\mu_0}V$$



- **磁场的能量密度**

$$\boxed{w_e=\frac{B^2}{2\mu_0}}$$

磁场能量

- 考察某根很细的 B 管 C
  - 由Ampere环路定理

$$\mu_0 I = \int_C B dl$$

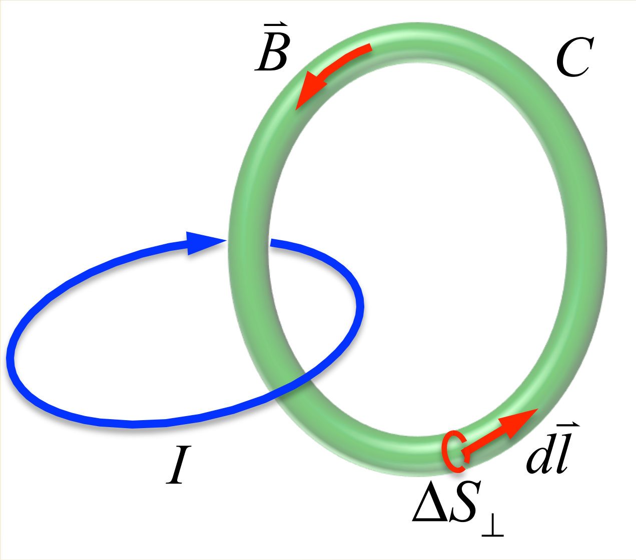
  - 通过每一(横)截面的磁通量相同

$$\Delta\Phi = B\Delta S_\perp$$

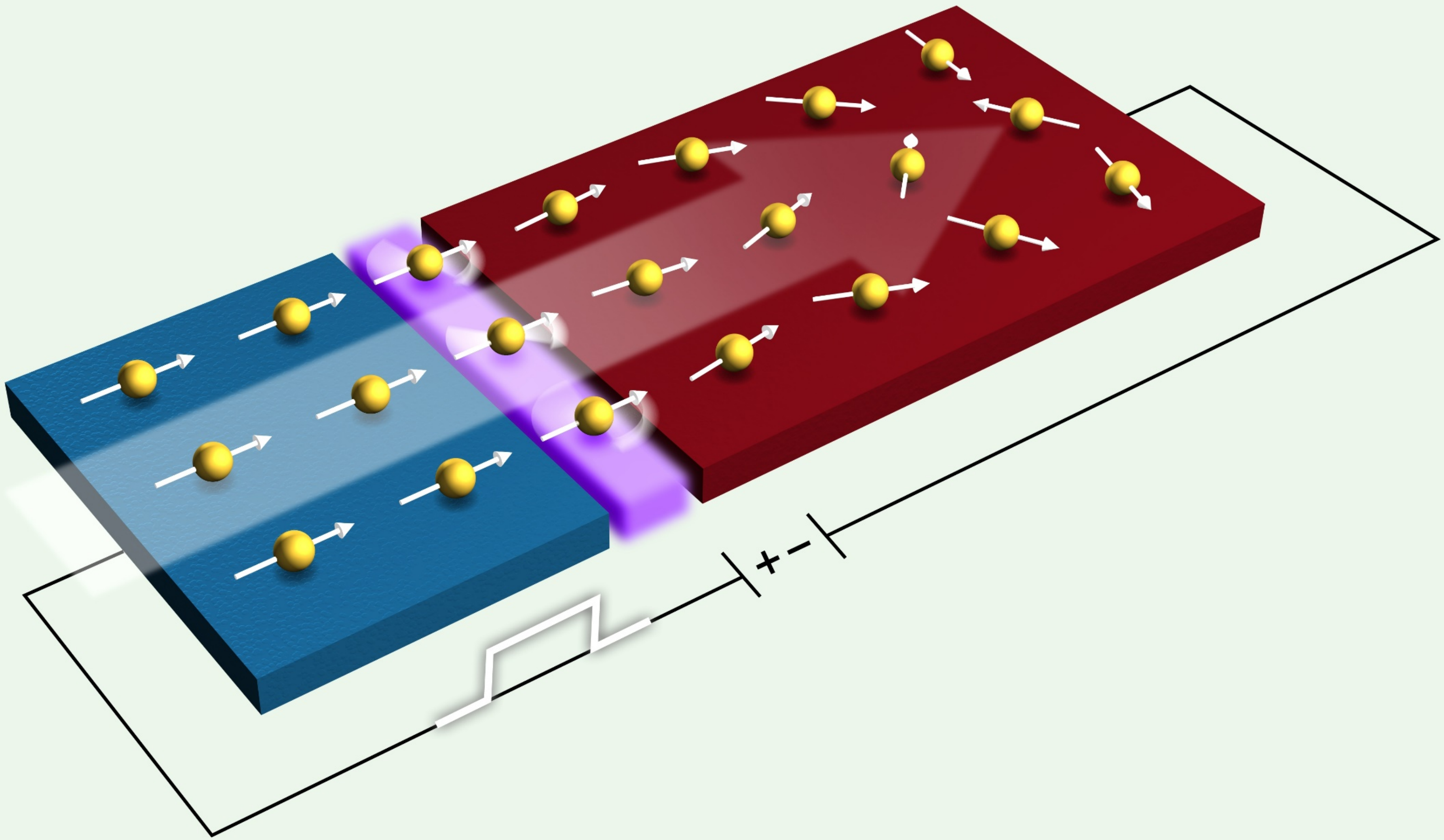
$$\frac{1}{2} I\Delta\Phi = \int_C \frac{B^2}{2\mu_0} \Delta S_\perp dl$$

  - 对所有 B管求和得到

$$W = \frac{1}{2} I\Phi = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV$$



五、磁介质存在时的磁能



磁介质存在时的磁能

- 同一载流线圈在真空中与处在介质中产生的磁场是不同的，所以电流变化时感应电动势是不同的，因而磁能与磁介质有关。存在磁介质时，自感与互感电动势仍为：

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

- 介质存在对磁场的影响反映在自感和互感系数中。
- 例如：无限长螺线管中充满磁介质，

$$H = nI,\ B = \mu_0\mu_r nI \Rightarrow \Phi = NBS = \mu_0\mu_r NnIS = \mu_0\mu_r n^2 IlS$$

$$\Rightarrow L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0\mu_r n^2 V \Rightarrow W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0\mu_r n^2 I^2 V = \frac{1}{2}BHV$$

- 能量密度 $w = \dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

线性、各向同性介质中磁场的能量

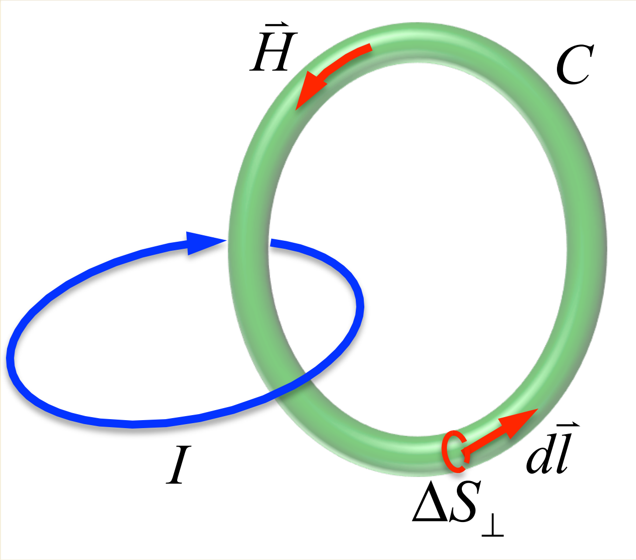
- 考察某根很细的H管 C
  - 由Ampere环路定理

$$I = \int_C H dl$$

  - 通过每一(横)截面的磁通量相同

$$\Delta\Phi = B\Delta S_\perp$$

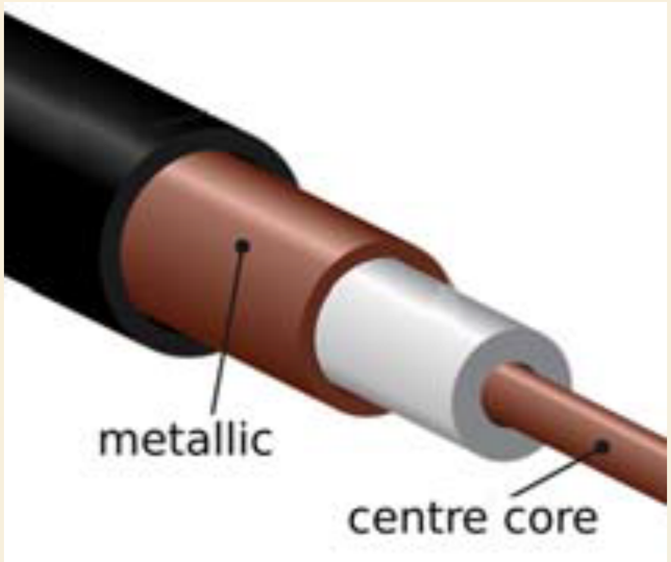
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} I\Delta\Phi = \int_C \frac{1}{2} BH\Delta S_\perp dl$$

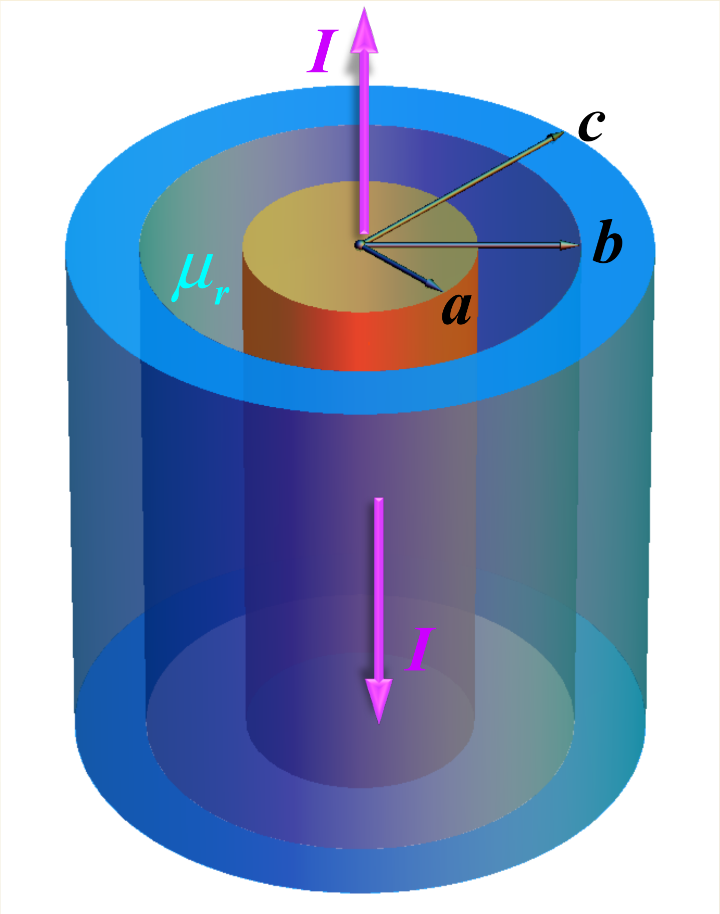


  - 对所有H管求和得到

$$W = \frac{1}{2} I\Phi = \iiint_V \frac{1}{2} BH\, dV = \iiint_V \frac{1}{2} \vec{B}\cdot\vec{H}\, dV$$

例：计算一个同轴电缆，中心是半径为 a 的实心导线，外部是内半径为 b、外半径为 c 的导体圆筒，内外导体之间充满相对磁导率为 μ_r 的介质，电流在内外筒中等大反向且均匀分布，求该电缆单位长度上的电感。





解：分4个区域计算磁能:

区域1： $0 \le s \le a, \mu_r = 1$

$$H_1 = \frac{I}{2\pi s}\frac{s^2}{a^2} = \frac{Is}{2\pi a^2}, \quad B_1 = \mu_0 H_1$$

$$w_1 = \frac{1}{2}\mu_0 H_1^2 = \frac{\mu_0 I^2 s^2}{8\pi^2 a^4}$$

$$\Rightarrow W_1 = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a w_1 s\, ds = \frac{\mu_0}{16\pi} l I^2$$

区域2： $a \le s \le b, \mu_r$

$$H_2 = \frac{I}{2\pi s}, \quad B_2 = \mu_0 \mu_r H_2$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r H_2^2 = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{8\pi^2 s^2}$$

$$\Rightarrow W_2 = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b w_2 s\, ds = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} l I^2 \ln\frac{b}{a}$$

区域3： $b \le s \le c, \mu_r \approx 1$

$$H_3 = \frac{I}{2\pi s}\frac{c^2 - s^2}{c^2 - b^2}$$

$$w_3 = \frac{1}{2}\mu_0 H_3^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2\left(c^2 - b^2\right)^2}\left(\frac{c^4}{s^2} - 2c^2 + s^2\right)$$

$$W_3 = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_b^c w_3 s\, ds$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi\left(c^2 - b^2\right)^2} l I^2 \left[c^4 \ln\frac{c}{b} - \frac{1}{4}\left(c^2 - b^2\right)\left(3c^2 - b^2\right)\right]$$

区域4： $s \ge c, \mu_r = 1$

$$H_4 = 0$$

$$W_4 = 0$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = \frac{1}{2} L I^2$$

$$L = \frac{2W}{I^2}$$

单位长度的自感:

$$L_0 = \frac{L}{l} = \frac{2W}{lI^2}$$
$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\frac{1}{4} + \mu_r \ln\frac{b}{a} + \frac{1}{\left(c^2 - b^2\right)^2}\left[c^4 \ln\frac{c}{b} - \frac{1}{4}\left(c^2 - b^2\right)\left(3c^2 - b^2\right)\right]\right\}$$

计算自感系数的方法

■ **由感应电动势求自感** $\varepsilon_L = -L\dfrac{dI}{dt}$ ⇒ $L = -\dfrac{\varepsilon_L}{dI/dt}$

■ 在回路中通以已知变化率的电流，能准确测出回路中的感应电动势时，以这一方法一般适用于工程中。

■ **由磁通量求自感** $\Phi = LI$ ⇒ $L = \dfrac{\Phi}{I}$

■ 可能出错的方法！

■ **由磁能求自感** $W_m = \dfrac{1}{2}LI^2$ ⇒ $L = \dfrac{2W_m}{I^2}$

■ 不会出错的方法！

线性介质的磁能密度和磁化功

- **H 矢量可由Ampere环路定理直接得到**

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = Hl = NI \Rightarrow H = NI/l$$

- **当电流或者磁场增加时**
  - 全磁通的改变为 $d\Psi = Nd\Phi = NSdB$
  - 电源抵抗感应电动势做功为

$$\delta A' = -I\varepsilon dt = Id\Psi = NISdB = \left(HdB\right)V$$

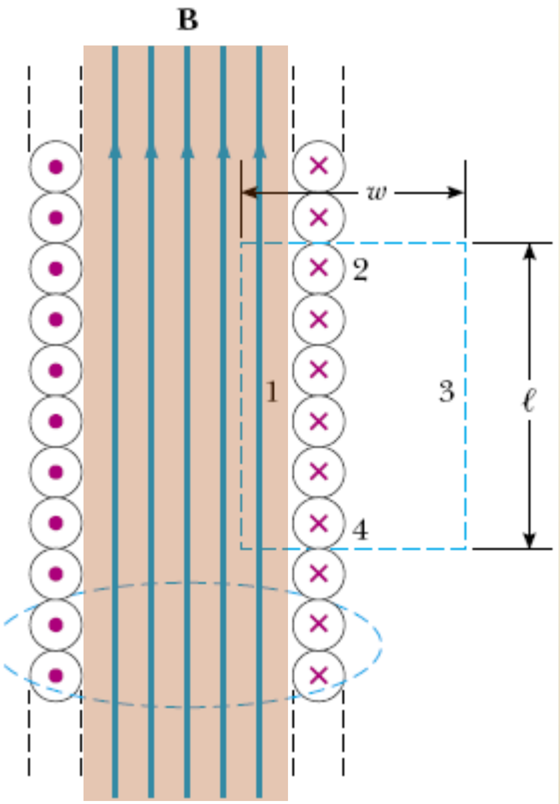
  - 电源对单位体积的介质做功

$$\delta a' = \frac{\delta A'}{V} = HdB = \vec{H}\cdot d\vec{B}$$

$$\Rightarrow \delta a' = d\left(\boxed{\frac{1}{2}\mu_0 H^2}\right) + \boxed{\mu_0 \vec{H}\cdot d\vec{M}}$$

宏观静磁能密度

磁化功密度



线性、无损耗介质

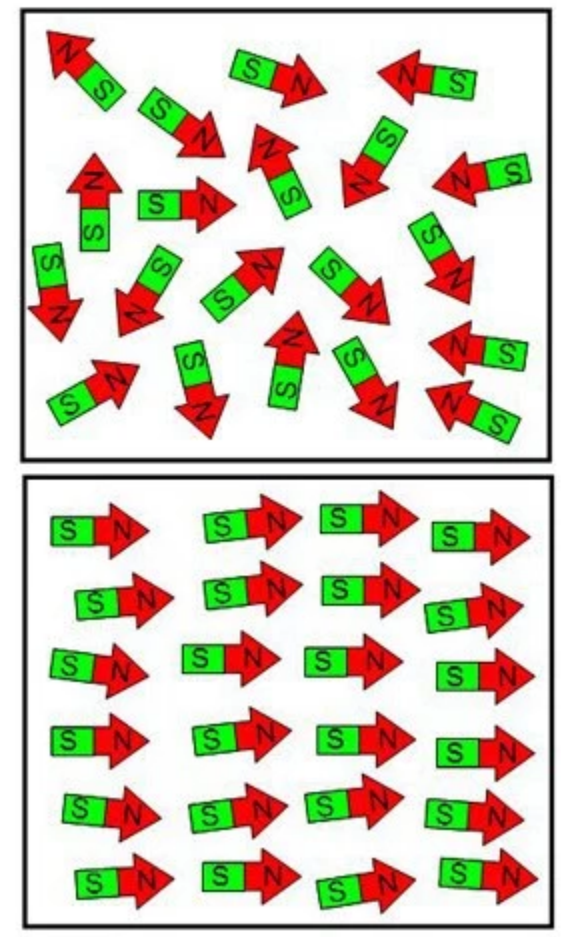
$$\delta a' = d\left(\frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) + \mu_0 \vec{H}\cdot d\vec{M}$$

- 对于线性无损耗介质 $M_i = \sum_{j=1}^{3} \chi_{ij} H_j$

$\chi_{ij} = \chi_{ji}$ ⟹ $\vec{H}\cdot d\vec{M} = \vec{M}\cdot d\vec{H}$

⟹ $\mu_0 \vec{H}\cdot d\vec{M} = d\left(\frac{1}{2}\mu_0 \vec{M}\cdot\vec{H}\right)$

⟹ $\delta a' = d\left(\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right) = dw$



电源所做功全部转化为了路线管内磁场的能量!

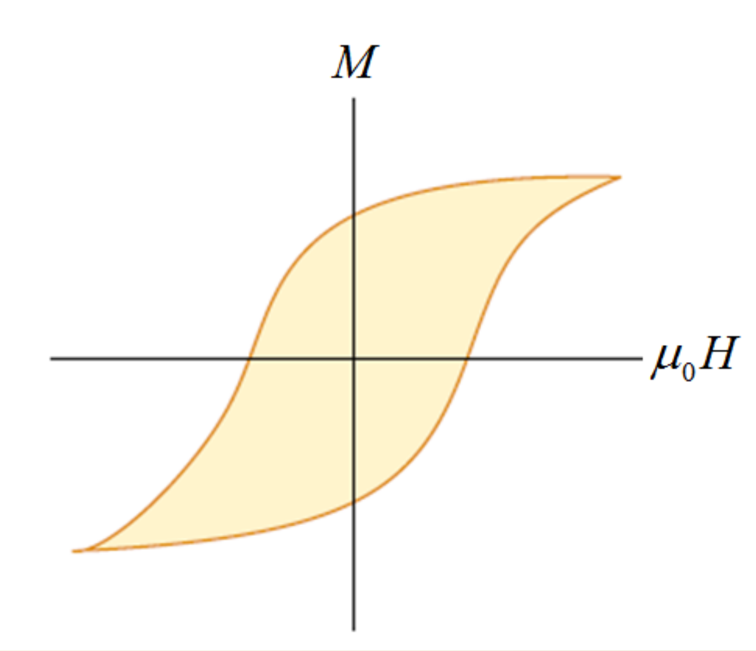
非线性磁介质的磁滞损耗

一个周期内电源对单位体积介质做功

$$a' = \oint_C \delta a'$$

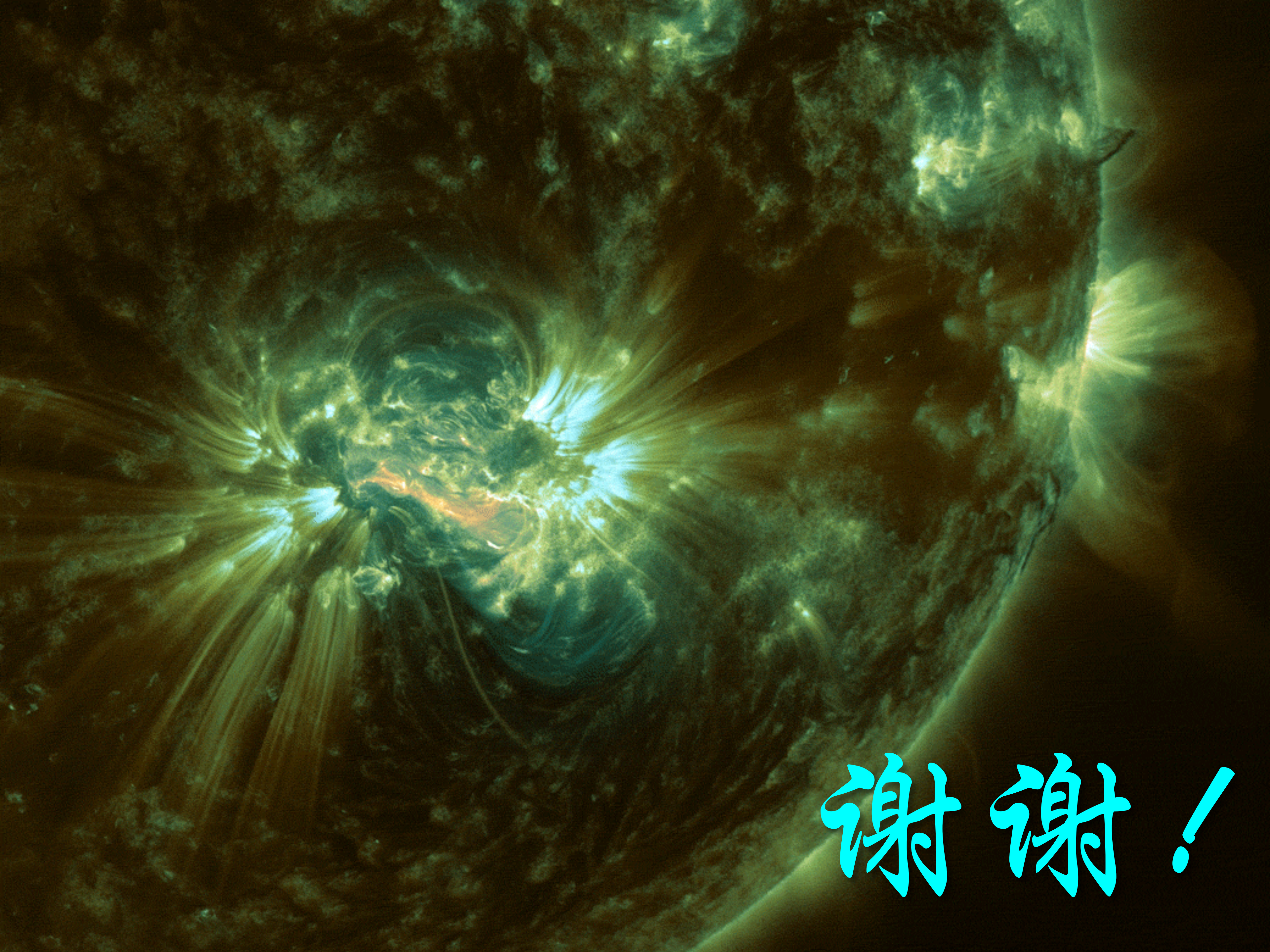
$$= \oint_C d\left(\frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) + \oint_C \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M}$$

$$= \oint_C \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M}$$



$a' =$ 磁滞回线所围面积

→ 磁滞损耗 → 热量


谢谢！