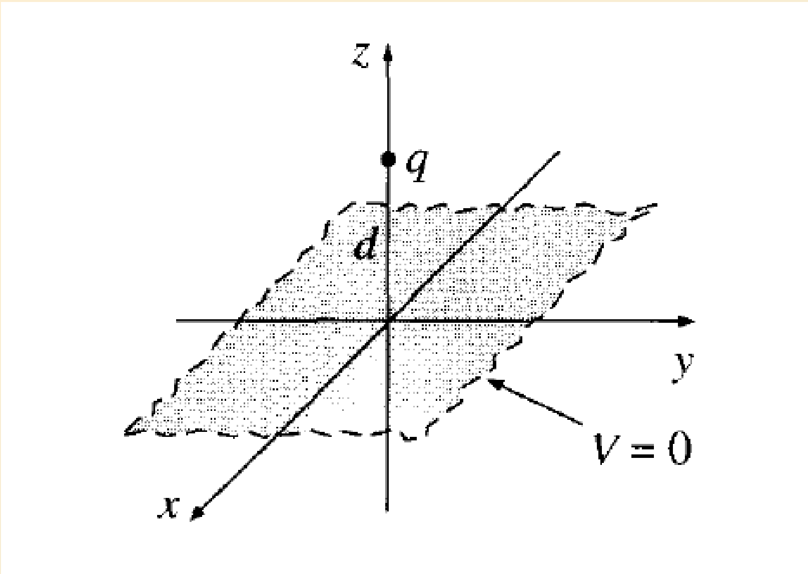
电像法中的静电能



例：在一个无限大半空间且接地的导体外有一个电荷量为q的点电荷，将其从无穷远处移到距平面d处，外界需要做多少功?

- 从能量的角度考虑，用电像法求电势

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d^2}$$

$$W_U = U_2 - U_1 = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d^2}$$

电势能减小，外界对其做负功

■ 从受力的角度考虑，用积分求做功

$$F=-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2l)^2}=-\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2}$$

$$W_F=-\int_{\infty}^{d}-\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2}dl=-\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}$$

电场力做功静电能减小

■为什么$W_F=1/2W_U$?是哪种方法错了?

■W_U真的是用电势能求得的做功吗?

■不是，用电势差求做功的条件是，在两个点移动时外电场是同一个，而显然，移动点电荷时，电场是改变的，所以这样的计算是没有意义的，计算做功真正要用的静电能。

$$W_1=0$$

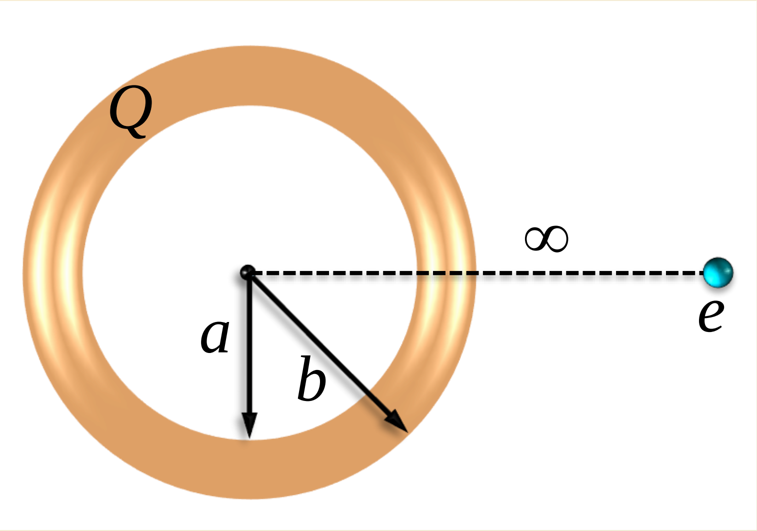
$$W_2=\frac{1}{2}U_q q=\frac{1}{2}\times-\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d^2}=-\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}$$

$$W_E=W_2-W_1=-\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}$$

■W_U代表的是什么?

■W_U在数值上等于将两个点电荷同时从无穷远移到相距为2a时，所做的功，但是注意，电像法的像电荷是界面分布的电荷的一个代表，像电荷的移动代表了界面电荷分布的改变，而在导体面上的电荷是总为0电势，怎么改变电荷分布都不做功！所以我们只需对一个点电荷做功，即要×1/2

例： 内、外半径分别为 a、b 的导体球壳带有 Q 的电量，现将一带电量为 e 的点电荷从∞移至球壳中心，试问外界需要做多大功？如果再将点电荷从中心移至球壳内到中心距离为 $d(< a)$ 处，外界又需要做多大功？



- 将点电荷 e 视为半径为 $r_0(\to 0)$ 的导体球

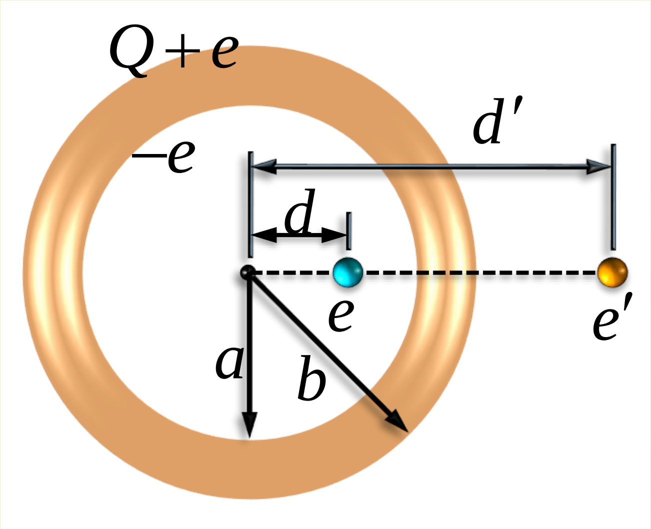
$$W_0 = \frac{1}{2}\left[e\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\right) + Q\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\right)\right]$$

$$W_1 = \frac{1}{2}\left[e\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0} + \frac{Q+e}{4\pi\varepsilon_0 b} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}\right) + Q\frac{Q+e}{4\pi\varepsilon_0 b}\right]$$

$$A_1 = W_1 - W_0 = \frac{e}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Q+e}{b} - \frac{e}{a}\right)$$

$$W_1=\frac{1}{2}\left[e\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0}+\frac{Q+e}{4\pi\varepsilon_0 b}-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)+Q\frac{Q+e}{4\pi\varepsilon_0 b}\right]$$

- 点电荷 e 到球心距离为 d 时，其所在位置出的总电势为



$$\varphi_e=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0}+\frac{e'}{4\pi\varepsilon_0\left(d'-d\right)}+\frac{Q+e}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

其中，$d'=a^2/d$，$e'=-e\left(a/d\right)$，因而

$$\varphi_e=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0}-\frac{ae}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2-d^2\right)}+\frac{Q+e}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$W_2=\frac{1}{2}\left[e\varphi_e+Q\frac{Q+e}{4\pi\varepsilon_0 b}\right]$$

$$\Rightarrow\quad A_2=W_2-W_1=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{d^2}{a\left(a^2-d^2\right)}$$