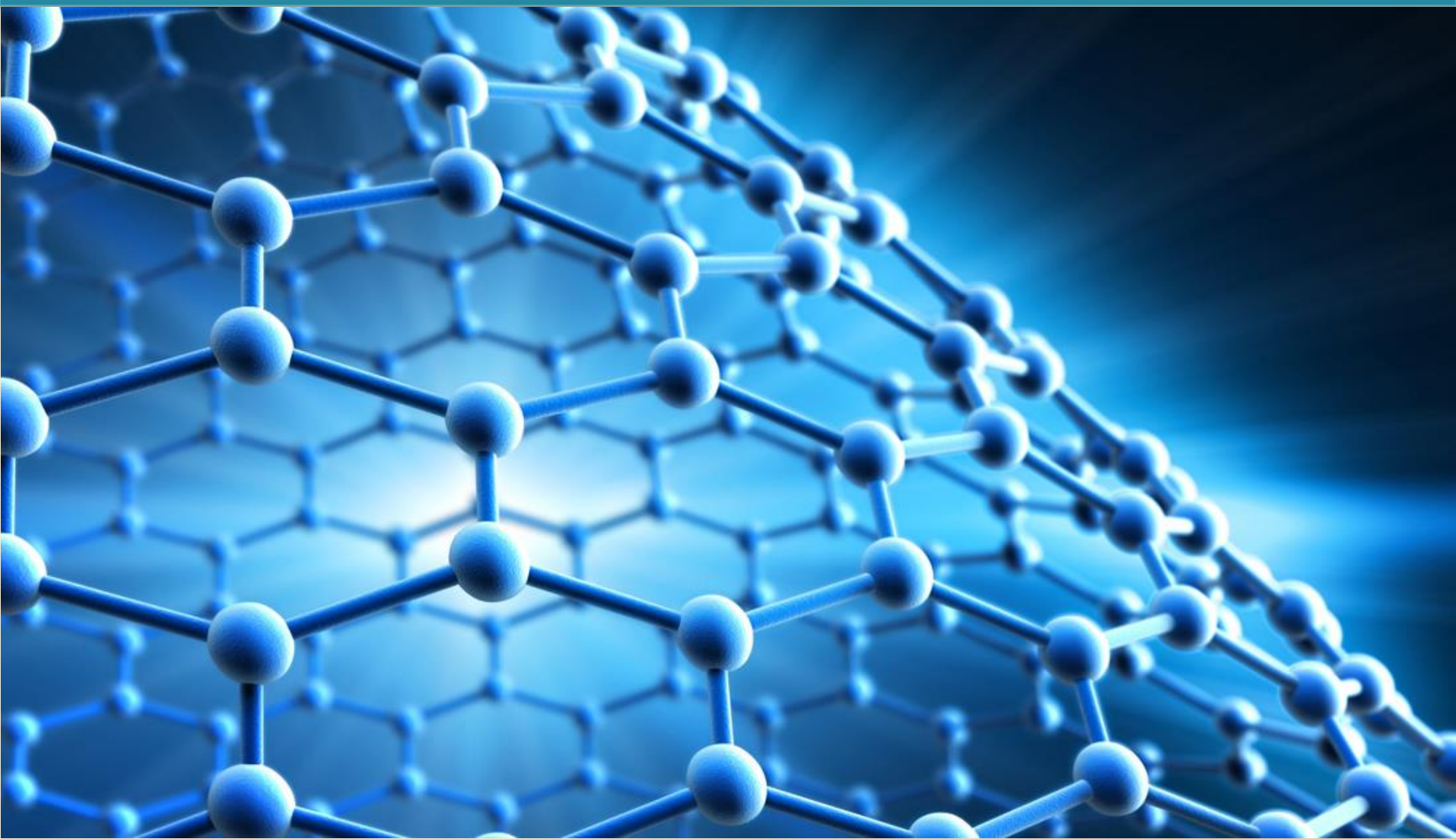


§ 2-4 静电场中的电介质



回顾

电极化强度

$$\vec{P} \equiv \frac{\sum \vec{p}_{\text{分子}}}{\Delta V} = \left(\begin{array}{l} \text{单位体积内分子} \\ \text{电偶极矩的矢量和} \end{array} \right)$$

极化强度 P 是定量描述介质中束缚电荷宏观分布的物理量

$$Q' = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

■ 介质内部

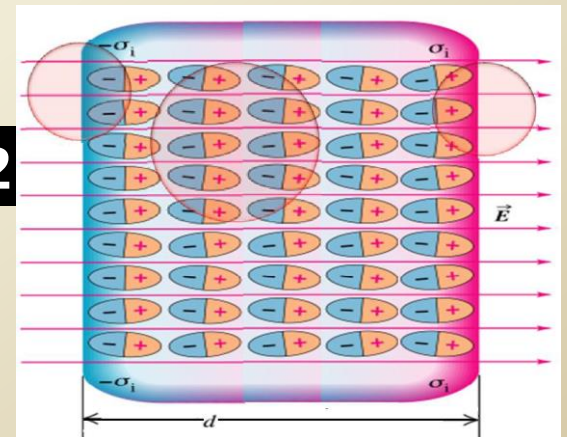
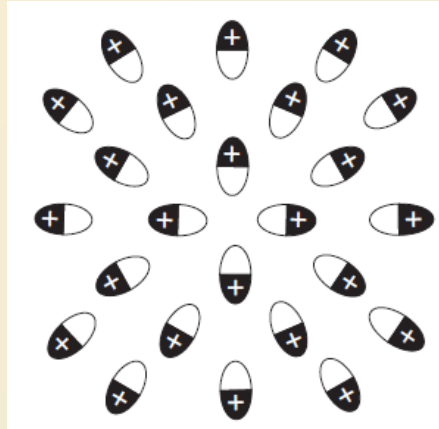
$$\rho' = -\nabla \cdot \vec{P}$$

■ 介质界面

$$\sigma' = -\hat{n} \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) = P_{1n} - P_{2n} \quad \hat{n} : 1 \rightarrow 2$$

➤ 介质与真空界面

$$\sigma' = \hat{n} \cdot \vec{P} = P_n \quad \hat{n} : \text{指向介质外}$$



极化介质产生的电场

- 当介质置于电场中时，会发生极化，微观电荷(核、电子、离子)的微观位移会造成宏观的束缚电荷分布。
- 电极化强度是介质极化后束缚电荷分布的宏观、定量描述。
- 当极化达到平衡后，束缚电荷的分布不再变化时

极化介质在**介质外的电场**

由**宏观束缚电荷分布**

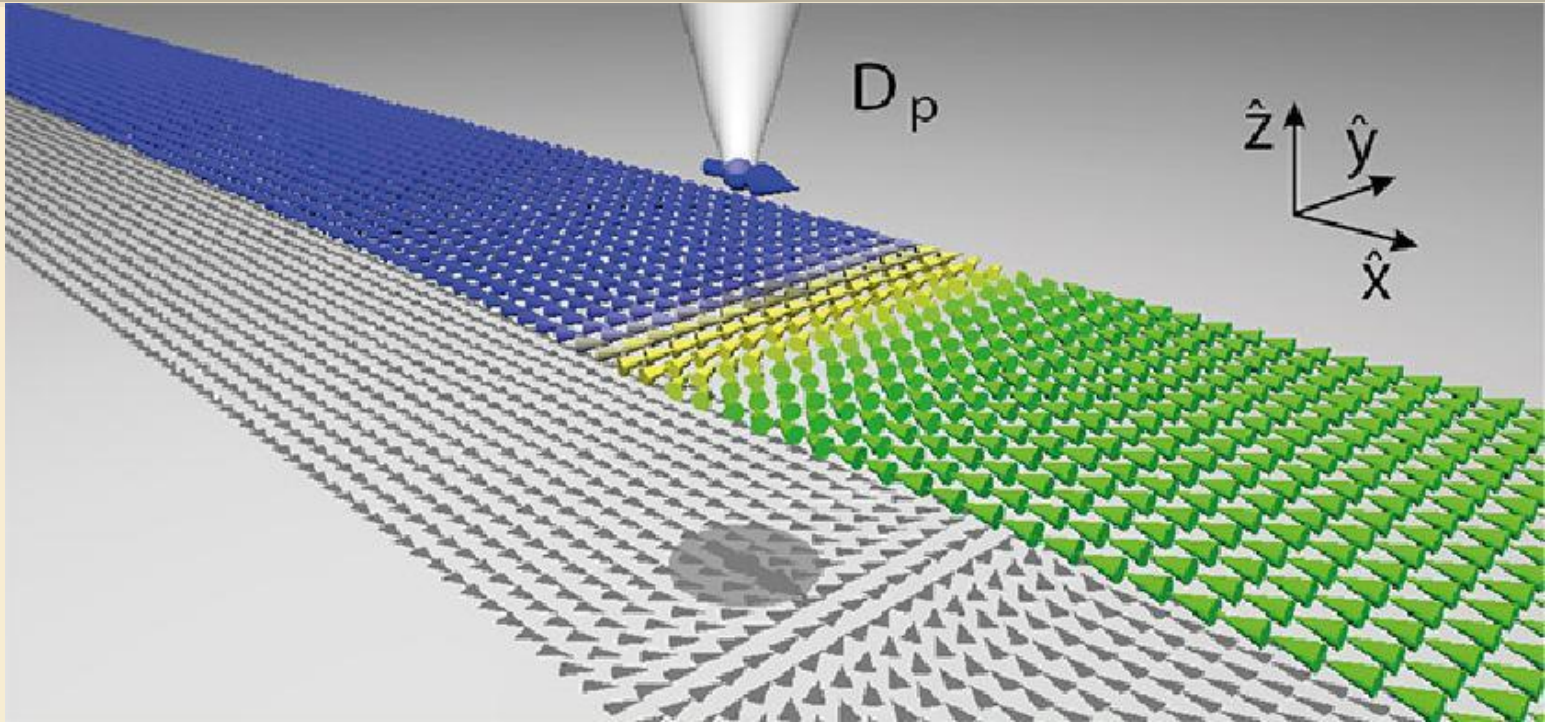
按照**真空中的库仑定律**(以及叠加原理)产生

极化介质在**介质内的宏观电场**

由**宏观束缚电荷分布**

按照**真空中的库仑定律**(以及叠加原理)产生

电介质的极化规律



- 当极化达到稳定后，介质中有确定的场强 E 和极化强度 P ， P 和 E (总电场) 存在一定的联系，即 $P \sim E$ 。
- 在宏观电磁学中，无法从理论上建立 P 与 E 的联系，这种关系只能通过实验来建立。

各向同性的电介质

■ 对于各向同性的电介质，实验表明：当场强不太强时，极化强度 P 与介质中的场强 E 成正比，方向相同，即

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} \quad \text{各向同性介质的物态方程 (或结构方程)}$$

■ χ ：介质的极化率(无量纲)，它反映了介质极化难易的程度，对于不同的介质，极化率是不同。

■ 若介质是均匀的，即在介质内各处的物理性质都相同，极化率是与位置无关的常数；若介质是非均匀的，则极化率与位置有关，即 $\chi = \chi(\vec{r}) = \chi(x, y, z)$

请区分：均匀介质与均匀极化的介质两个概念

■ 气体、大部分液体以及许多非晶体和某些晶体，都是各向同性的介质。

各向同性的电介质

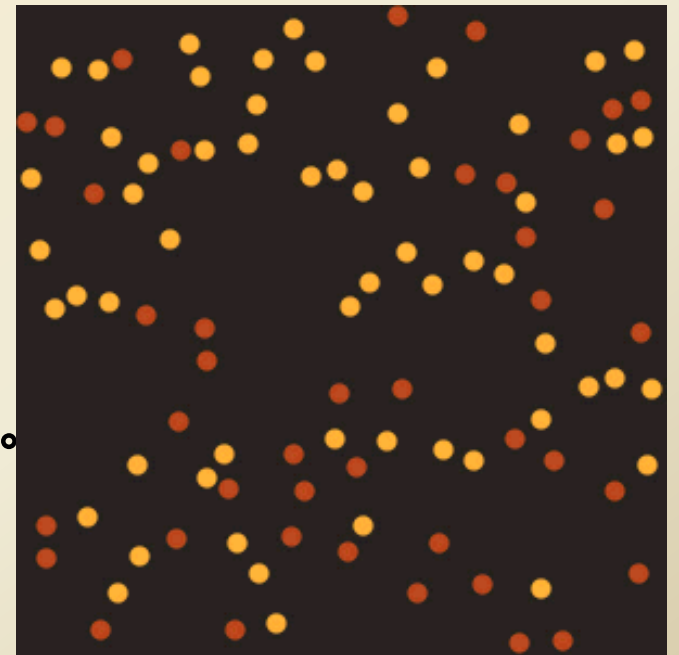
■ 对于各向同性的介质，统计物理和固体物理能根据介质极化的微观特性，从理论上建立 P 与 E 的关系。

■ 一个电偶极子在电场 E 中具有势能

$$U = -\vec{p}_0 \cdot \vec{E} + C = -p_0 E \cos \theta + C$$

■ 由于分子的热运动以及由此引起的分子间的碰撞，每个电偶极子的方向未必恰好和电场方向完全一致。事实上，电偶极矩的方向在空间中呈现一定的分布。据统计物理学的基本原理，在温度为 T 时，电场中的电偶极子具有某个势能的几率服从波耳兹曼分布：

$$e^{-U/k_B T}$$

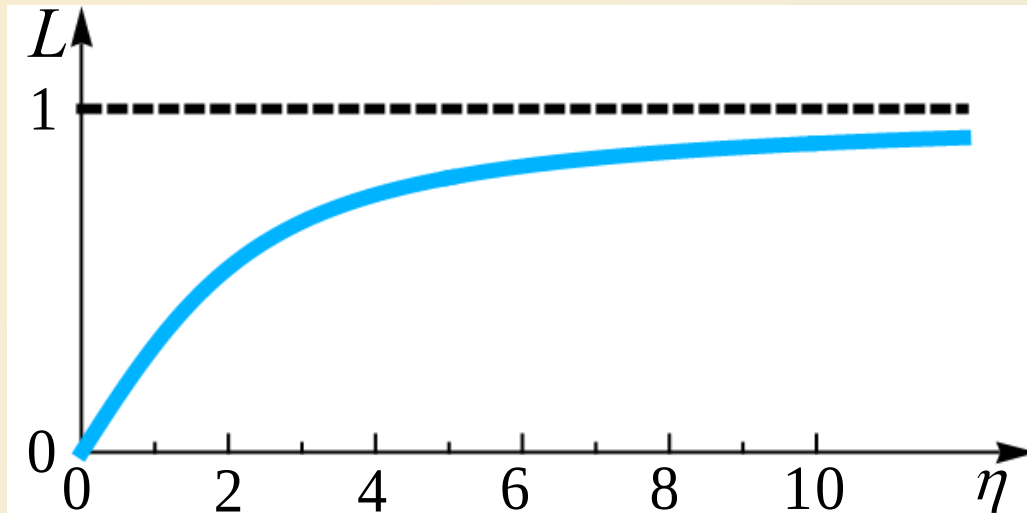


常温、弱场近似

- 选择外电场的方向 (z 轴) 作为参考方向, 则平均偶极矩为:

$$\langle \bar{p} \rangle = \frac{\int \bar{p}_0 e^{-U/k_B T} d\Omega}{\int e^{-U/k_B T} d\Omega} = \hat{z} p_0 \frac{\int e^{-U/k_B T} \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int e^{-U/k_B T} \sin \theta d\theta}$$

$$\begin{array}{c} u = \cos \theta \\ \eta \equiv p_0 E / k_B T \end{array} \rightarrow \frac{\langle \bar{p} \rangle}{p_0} = \hat{z} \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \int_{-1}^1 e^{\eta u} du = \hat{z} \left(\coth \eta - \frac{1}{\eta} \right)$$

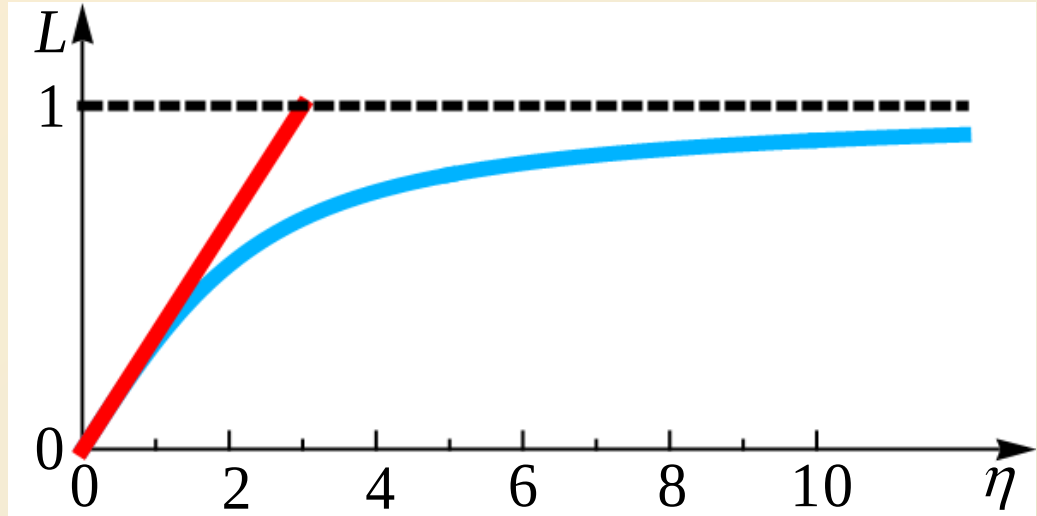


朗之万(Langevin)函数



常温、弱场近似

$$\frac{\langle \bar{p} \rangle}{p_0} = \hat{z} \left(\coth \eta - \frac{1}{\eta} \right)$$



■ 当场强不太强时，在通常温度下， $\eta \ll 1$ ，所以

$$\coth \eta - \frac{1}{\eta} \approx \frac{1}{3} \eta = \frac{p_0 E}{3k_B T}$$



$$\langle \bar{p} \rangle = \frac{1}{3} p_0 \frac{p_0 E}{k_B T} \hat{z}$$



$$\bar{P} = n \langle \bar{p} \rangle = \chi \epsilon_0 \vec{E}$$

索尔维会议-科学梦之队

A. PICCARD E. HENRIOT P. EHRENFEST Ed. HERZEN Th. DE DONDER E. SCHRÖDINGER E. VERSCHAFFELT W. PAULI W. HEISENBERG R.H. FOWLER L. BRILLOUIN
P. DEBYE M. KNUDSEN W.L. BRAGG H.A. KRAMERS P.A.M. DIRAC A.H. COMPTON L. de BROGLIE M. BORN N. BOHR
I. LANGMUIR M. PLANCK Mme. CURIE H.A. LORENTZ A. EINSTEIN P. LANGEVIN Ch.E. GUYE C.T.R. WILSON O.W. RICHARDSON
Absents : Sir W.H. BRAGG, H. DESLANDRES et E. VAN AUBEL

COLOR BY PASTINCOLOR.COM



德拜 克努森 布拉格 克拉莫斯 狄拉克 康普顿 德布罗意尔 玻恩 玻尔
朗缪尔 普朗克 居里夫人 洛伦茨 爱因斯坦 郎之万 查古耶 威尔逊 欧文

各向异性的电介质

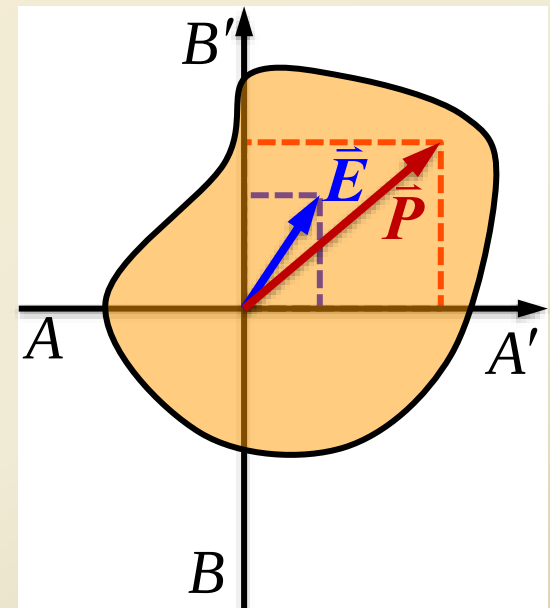
■ 有些晶体，构成晶体的原子在空间有规则地排列，晶体的物理性质与方向有关：沿某个方向，介质较易极化，沿另一方向，介质较难极化，这种晶体称为**各向异性介质**。

■ 例如若某晶体在两个相互垂直的方向 AA' 和 BB' 方向，极化难易程度不同

■ P 与 E 通常并不平行

■ 当 E 不是很强时， P 与 E 仍是线性关系

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$



极化张量(对称矩阵)

非线性介质

■ 当场强非常大时， P 不仅与 E 有关，还与 E^2 、 E^3 等有关，这时 P 与 E 成非线性关系。 P 与 E 成非线性关系的介质称为**非线性介质**。非线性介质的物态方程一般可表示为

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij}^{(1)}(\vec{r}) E_j + \varepsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)}(\vec{r}) E_j E_k + \dots$$

非均匀

非各向同性

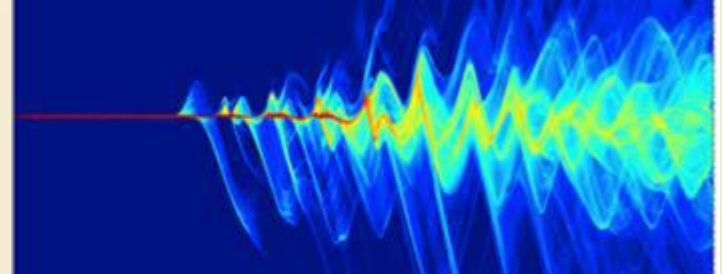
非线性

■ $\chi_{ij}^{(1)}$ 为一阶非线性极化率， $\chi_{ijk}^{(2)}$ 为二阶非线性极化率，等等。各阶极化率大小与介质的结构和性质有关，在通常情况下极化率阶数越高其值越小。

非线性介质

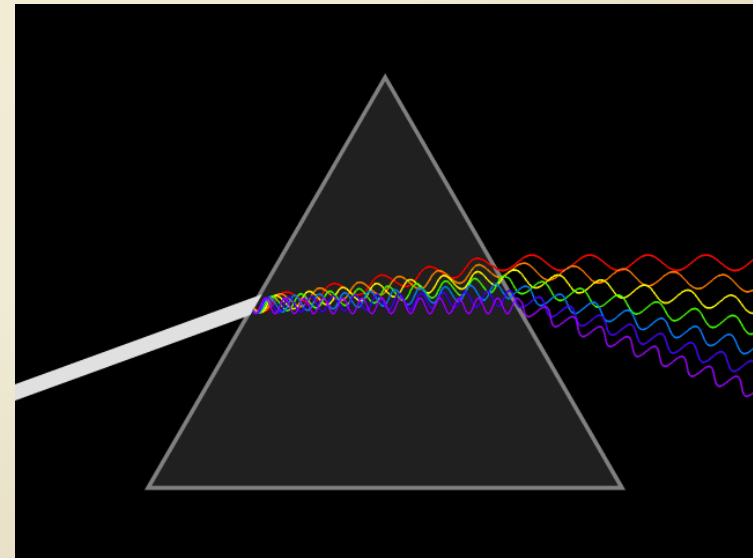
■ 若 E_a 为原子内部的平均场强，则各阶极化率满足关系：

$$\frac{\chi^{(2)}}{\chi^{(1)}} = \frac{\chi^{(3)}}{\chi^{(2)}} = \cdots = \frac{1}{E_a}$$



■ $E_a \sim 10^{10} \text{ V/m}$ 。当 $E \ll E_a$ 时，所有的非线性项可以忽略

■ 从激光问世后，由于激光很强，激光的电矢量可与 E_a 相比拟，故高阶极化不能忽略，与这些非线性项相对应介质将产生许多非线性光学效应，这就形成了一门新的学科——**非线性光学**



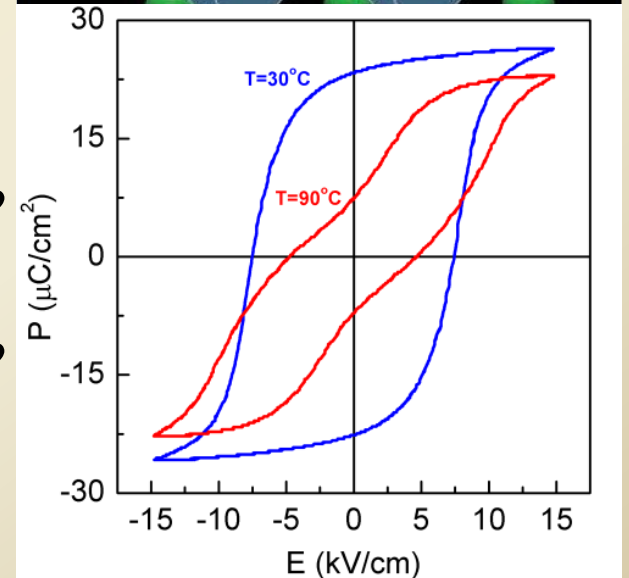
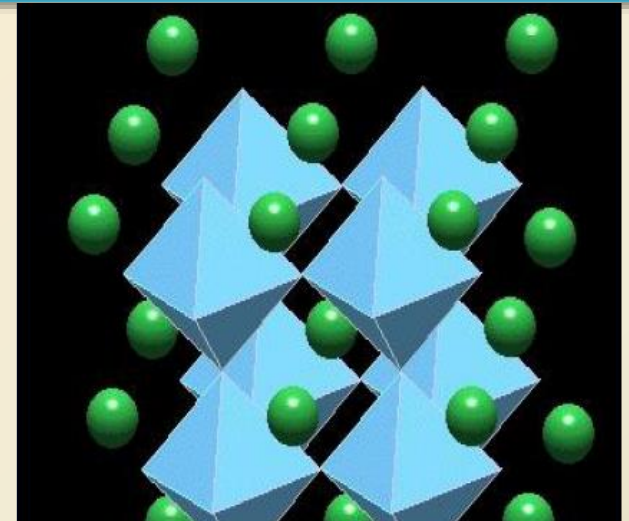
铁电体(Ferroelectrics)介质

■ 有一些电介质如钛酸钡(BaTiO_3)、酒石酸钾钠等，它的极化规律非常复杂，存在**滞后现象**。

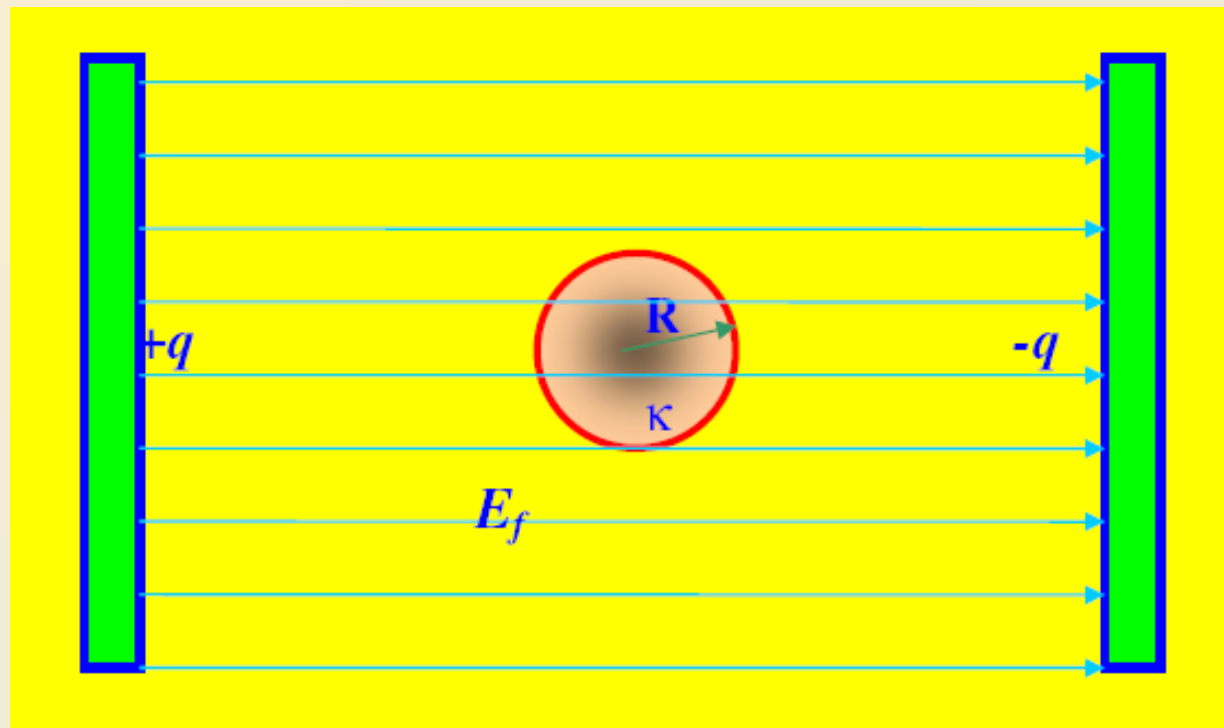
■ 极化状态与极化历史有关

■ 极化强度 P 随外场的变化非线性，呈**电滞回线**，有**剩余极化强度**， χ **非常大**，随 E 变化

■ 每一种铁电材料都有一个转变温度，称**居里温度**。当温度低于居里点时，材料呈铁电性，当温度高于居里点时，材料的性质与一般电介质相同，如钛酸钡的居里温度为 120°C 。



【例】在两均匀带等量异号电荷的无限大平面导体板之间，放一均匀的介质球，球的半径为 R ，极化率为 χ ，求球内的场强。假定介质球离两平板都相当远，球处在场中时，带电板上的电荷仍然均匀分布，即自由电荷单独产生的场仍是均匀场。



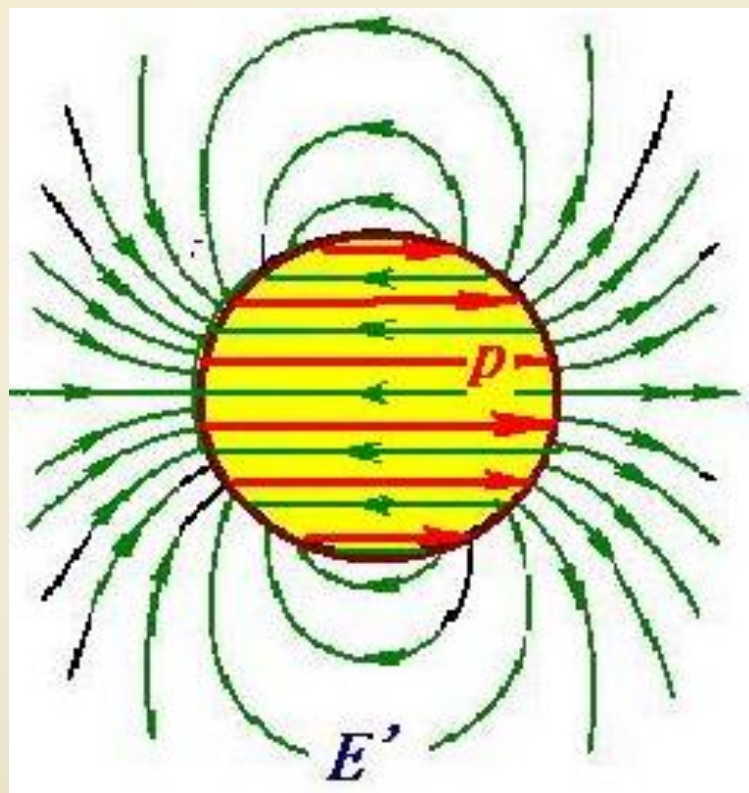
【解】设想介质球的极化是分若干阶段进行的，最终达到静电平衡，在介质刚放在电场中时，极化电荷尚未形成，因而介质球内的电场就是外场 E_0 ，它使介质球极化，极化强度为：

$$\vec{P}_0 = \varepsilon_0 \chi \vec{E}_0$$

$$\sigma_p = P_0 \cos \theta$$

极化电荷面分布 $P_0 \cos \theta$
产生在球内产生的极化
电场为

$$E_{p1} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$



均匀极化的介质球在球内产生均匀电场，故 $\vec{P}_0$ 引起的极化电荷在球内产生的场为：

$$\vec{E}_{p1} = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P}_0 = -\frac{\chi}{3} \vec{E}_0$$

附加电场 $\vec{E}_{p1}$ 引起进一步的附加极化，附加极化强度为：

$$\vec{P}_1 = \varepsilon_0 \chi \vec{E}_{p1} = -\varepsilon_0 \frac{\chi^2}{3} \vec{E}_0$$

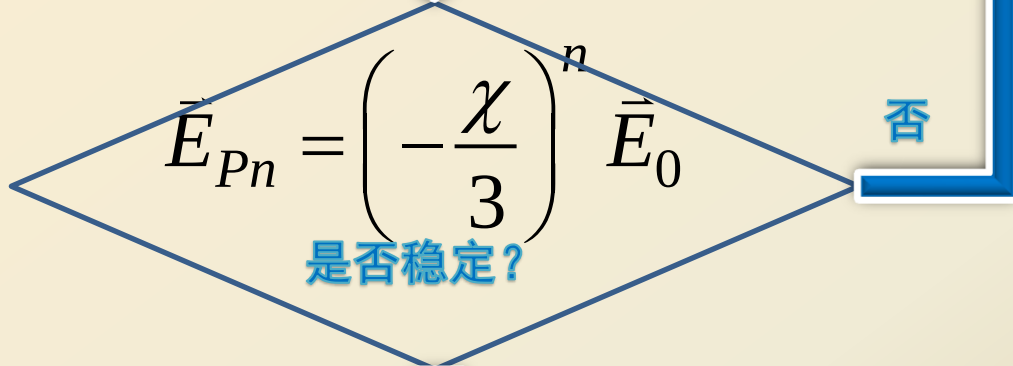
这附加极化强度产生的电场为：

$$\vec{E}_{p2} = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P}_1 = \left(-\frac{\chi}{3}\right)^2 \vec{E}_0$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$



$$\vec{E}_p = -\vec{P} / 3\epsilon_0$$



否



是



结束

附加电场进一步引起附加极化，这样的过程一步一步继续下去，在第n个阶段，附加极化强度产生的场强为：

$$\vec{E}_{pn} = \left(-\frac{\chi}{3}\right)^n \vec{E}_0$$

于是介质球内的场强等于自由电荷和极化电荷产生的附加场强之和，即：

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 + \vec{E}_{p1} + \vec{E}_{p2} + \cdots = \vec{E}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{E}_{pn} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi}{3}\right)^n \right] \vec{E}_0 = \frac{1}{1 + \chi/3} \vec{E}_0 = \frac{3}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_0\end{aligned}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \frac{3\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$$

介质球表面的极化电荷面密度为

$$\sigma' = P_n = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} E_0 \cos \theta$$

该电荷密度在球心处的电场为

$$\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{(\varepsilon_r + 2)} \vec{E}_0$$

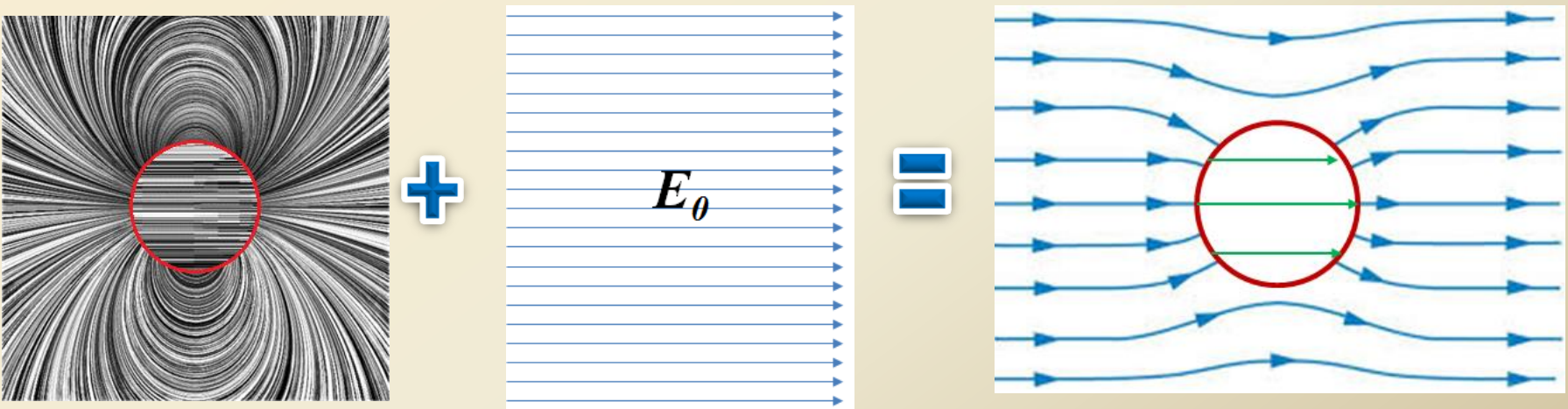
由于极化电荷在球内是均匀场， 所以， 极化电荷在球内的退极化场为

$$\vec{E}' = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{(\varepsilon_r + 2)} \vec{E}_0$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \frac{3\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$$



$$\vec{p} = \frac{4}{3} \pi a^3 \vec{P} = \frac{4\pi a^3 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$$



压电效应

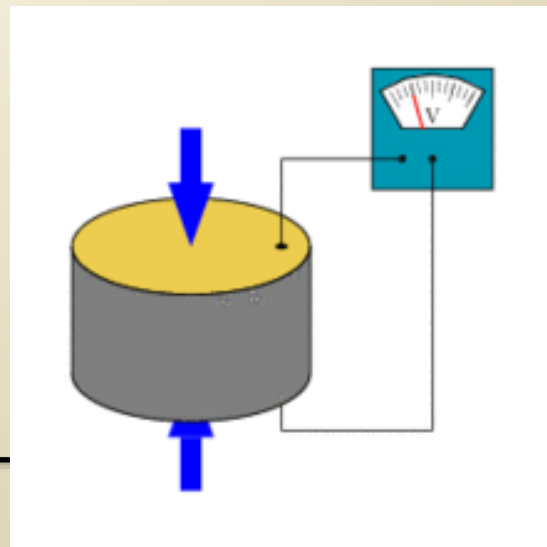


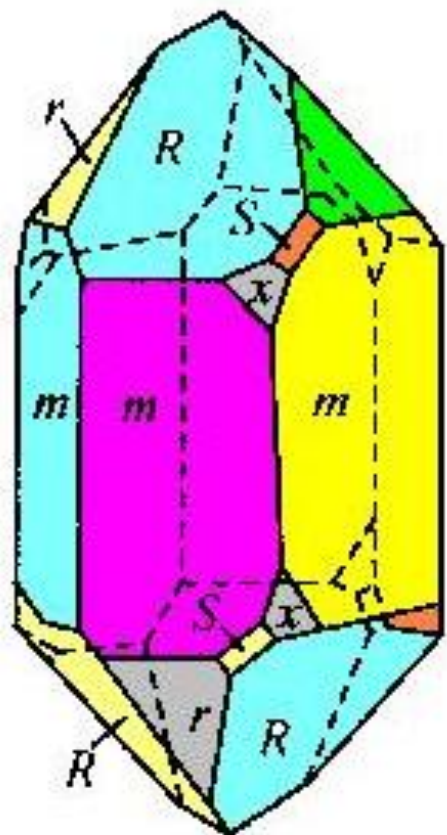
✳1880年法国科学家居里兄弟(弟弟: 皮埃尔·居里, 哥哥: 雅克斯·居里)发现压电效应。

✳皮埃尔·居里和夫人(Marie Skłodowska 1867.11.7—1934.7.4)于1898年一年之内发现了钋(Po)和镭(Ra)两种新元素, 获得了1903年度诺贝尔物理学奖。居里夫人1911年又因放射化学方面的成就获得诺贝尔化学奖。

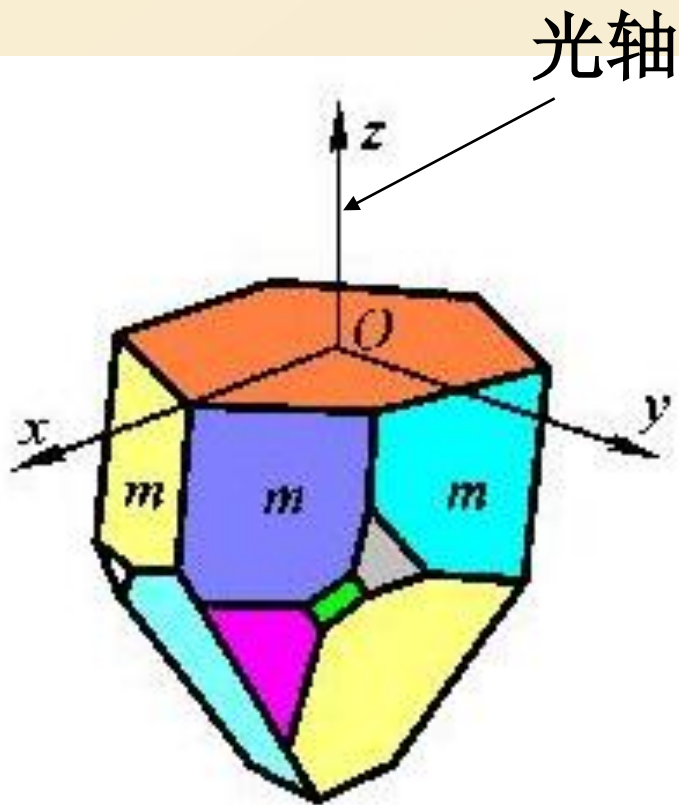
- * 1894年，福克特（W. Voigt）更严谨地定出晶体结构与压电性的关系，他发现32种晶类（class）具有压电效应。第一次世界大战期间，朗之万（P. Langevin）第一次利用石英晶体制成了声纳，用于探测海洋深度。
- * 某些各自异性的晶体在机械力作用下发生形变时，晶体的表面上会出现极化电荷。这种现象称为压电效应。

* 铁电体具有压电效应，但有压电效应的介质不一定是铁电体，如石英晶体是压电体，但不是铁电体。石英是一种 SiO_2 的晶体，其压电效应与其内部结构有关。

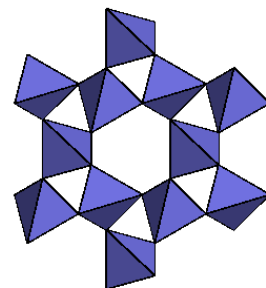
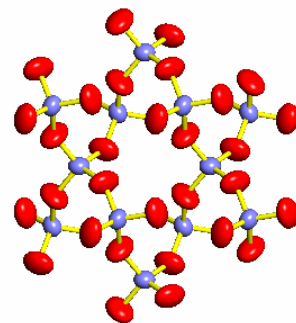


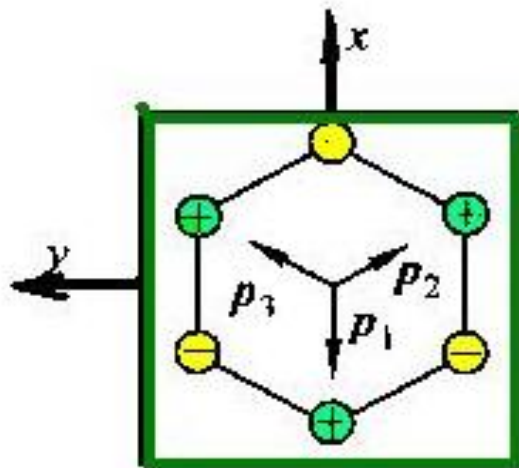


石英晶体的理想外形



石英晶体的晶轴

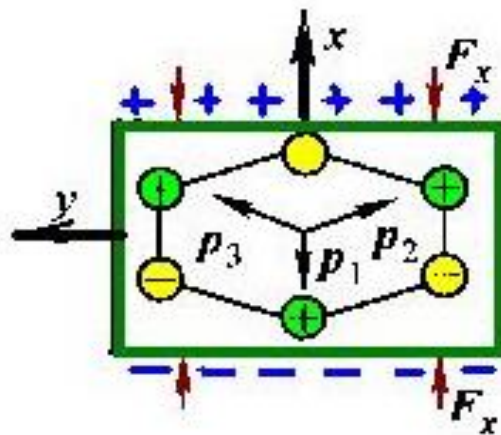




(a)

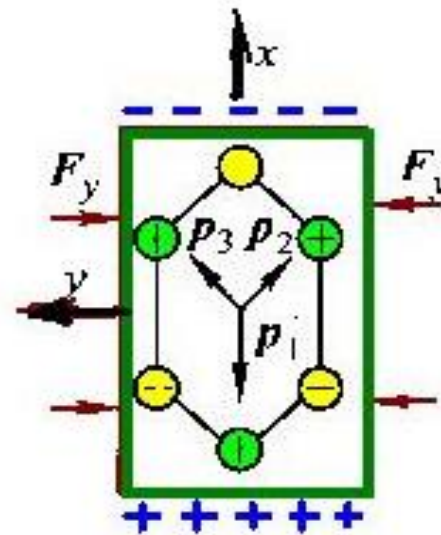
无外力时 (a)

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$$



(b)

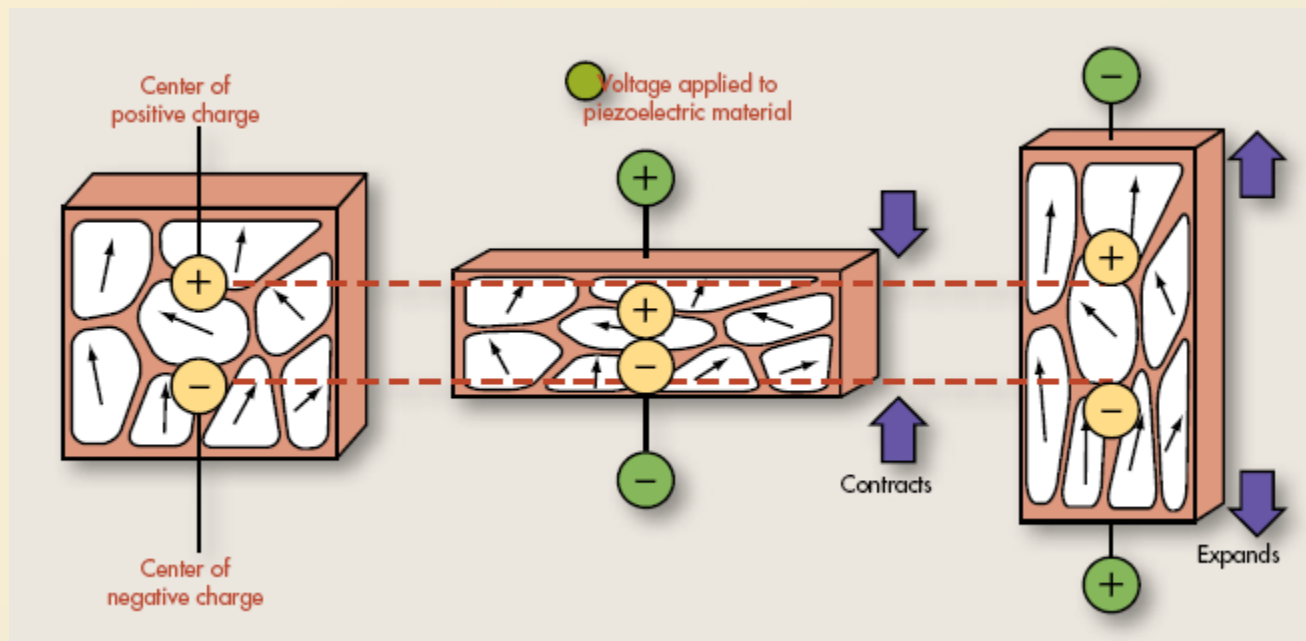
有外力时 (b) (c)



(c)

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \neq 0$$

正压电效应



逆压电效应---电致伸缩

压电材料

工业应用:

精密定位
打印机
超声马达
气流控制
燃油控制

军事应用:

水下潜艇, 引信装置
水下声纳, 标靶
水下电话, 水下地形

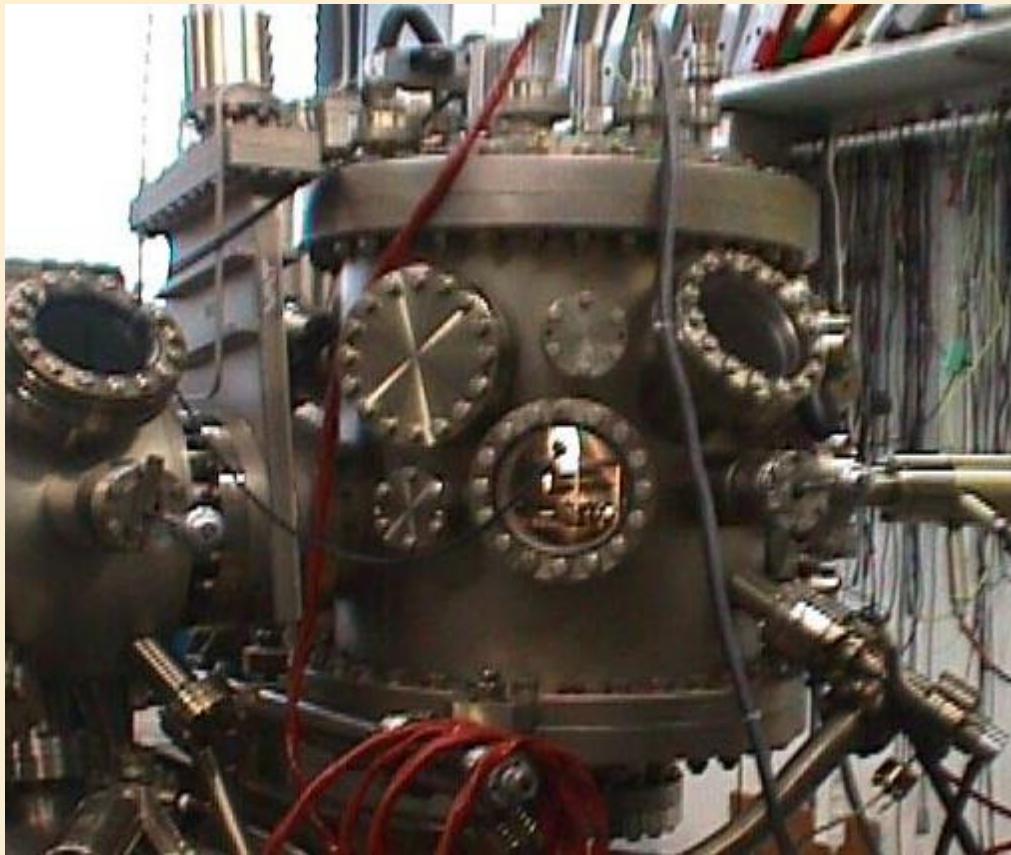
医疗应用:

超声检测, 喷药器,
流量计, 电动摇椅,

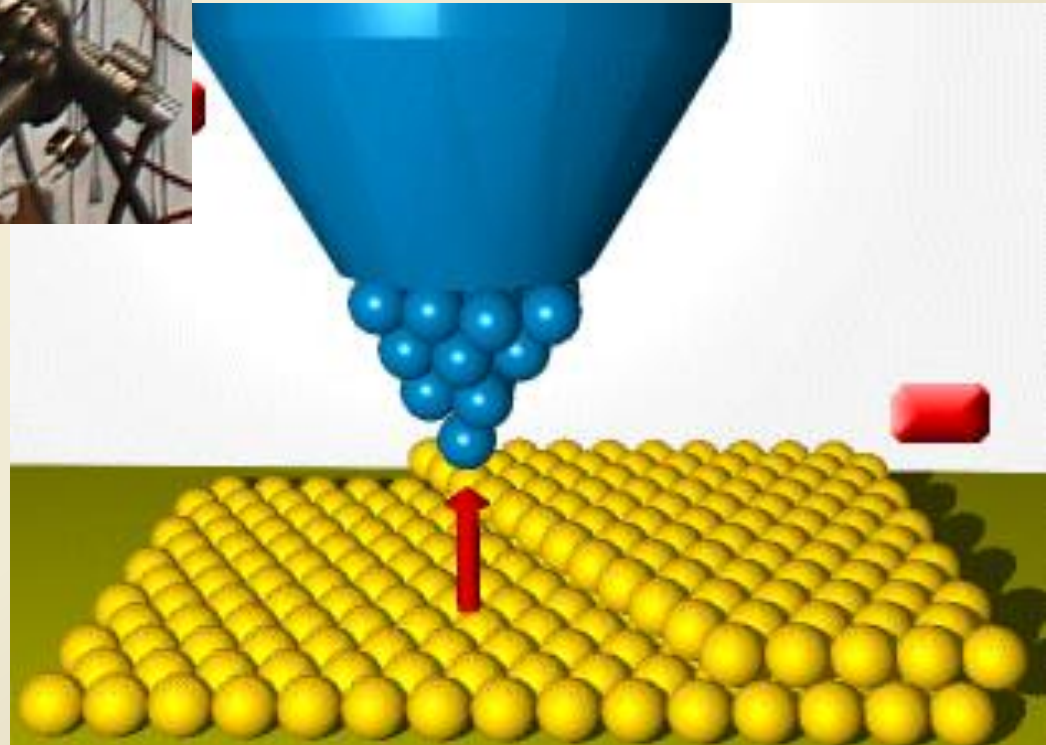
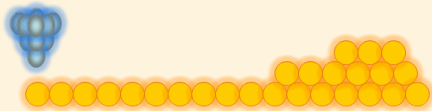
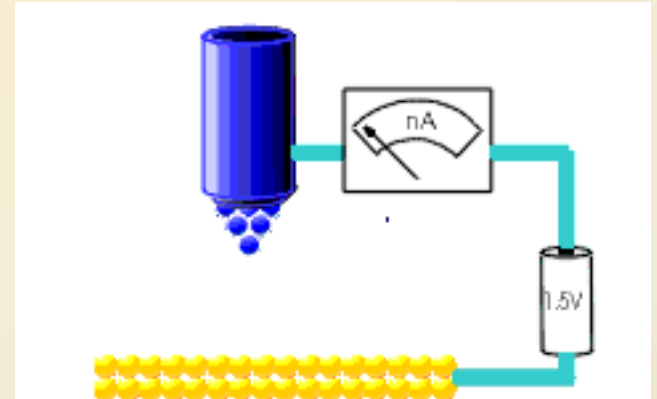
家电应用:

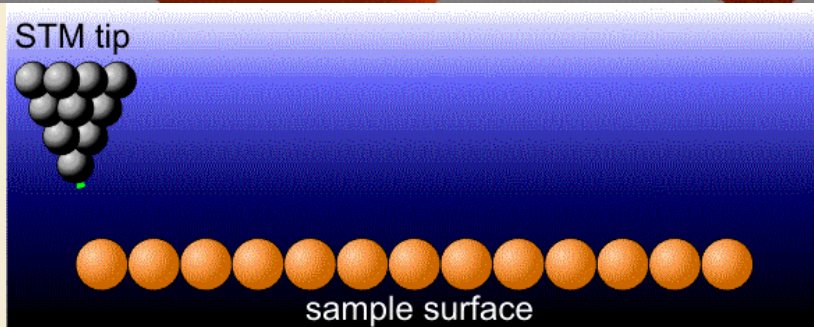
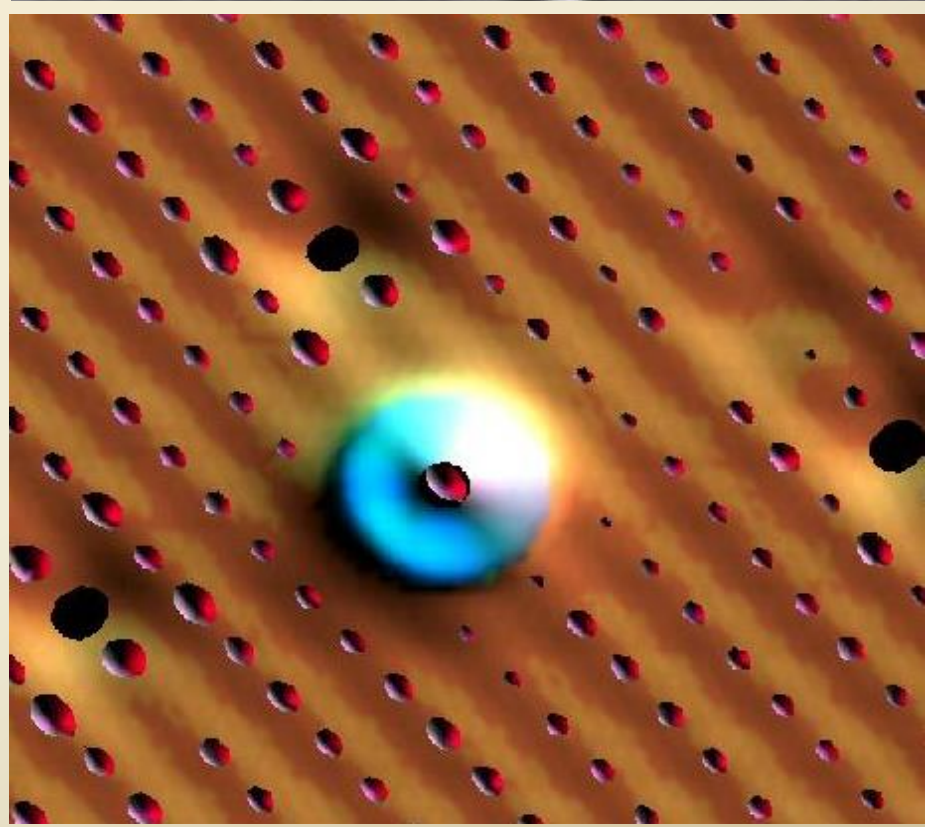
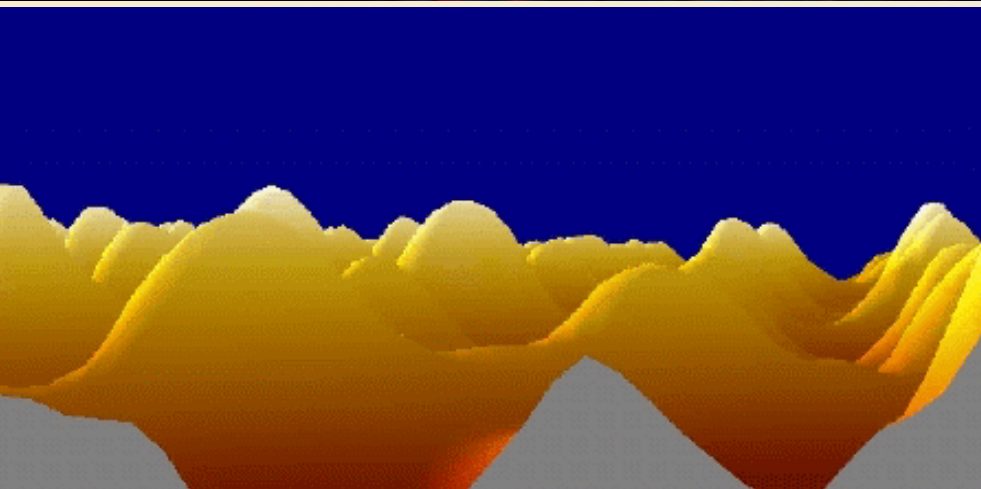
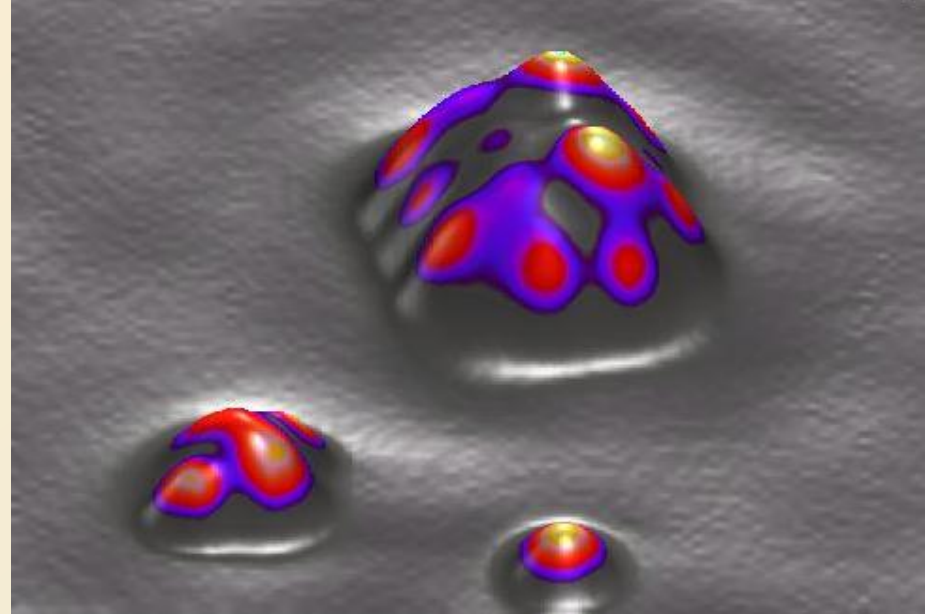
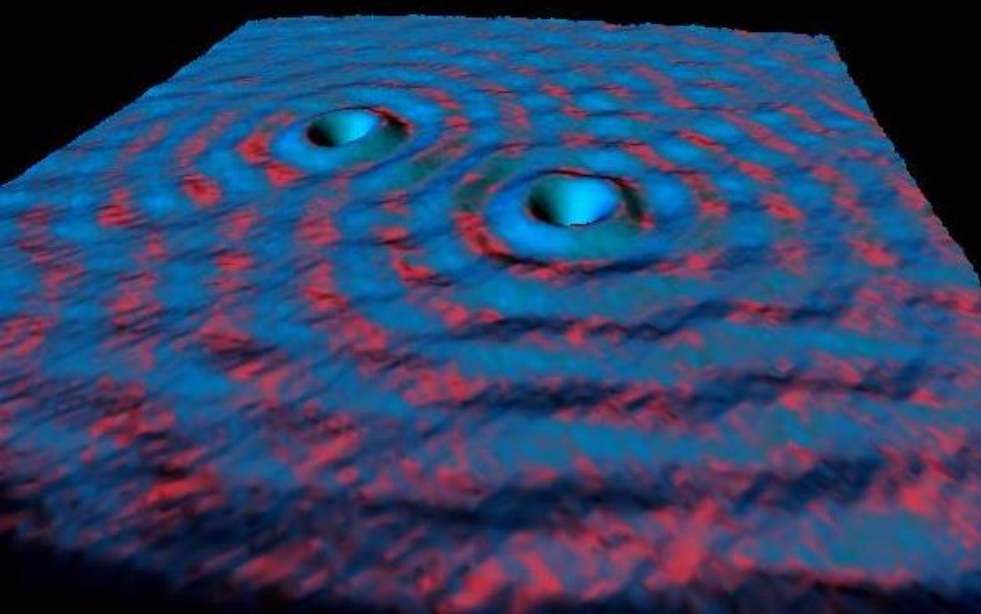
加湿器, 点火装置
电话, 微波炉
唱机, 超声清洗

- 🎧 1986年诺贝尔奖的扫描隧道显微镜STM中探头移动步长100Å-1000Å，由电致伸缩完成的
 - 🎧 晶片的固有振荡频率由尺寸大小决定，在外场作用可获得稳定的电振荡，稳定度达 10^{-13} 量级
 - 🎧 电子表，石英钟，军事通讯，精密电子仪表
-



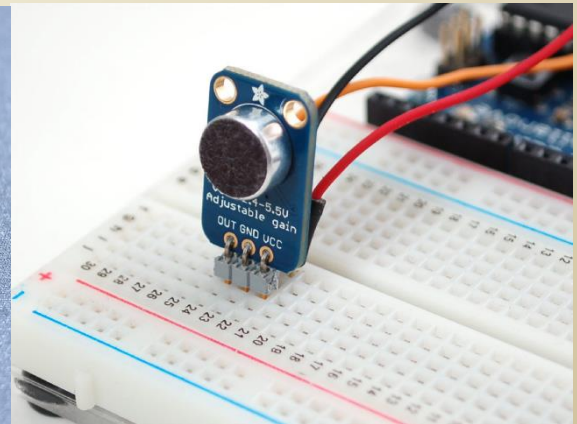
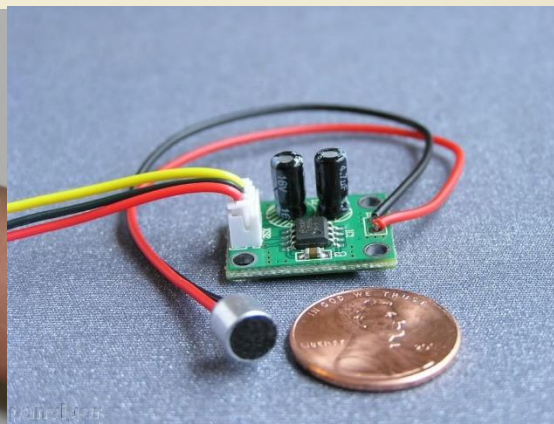
STM



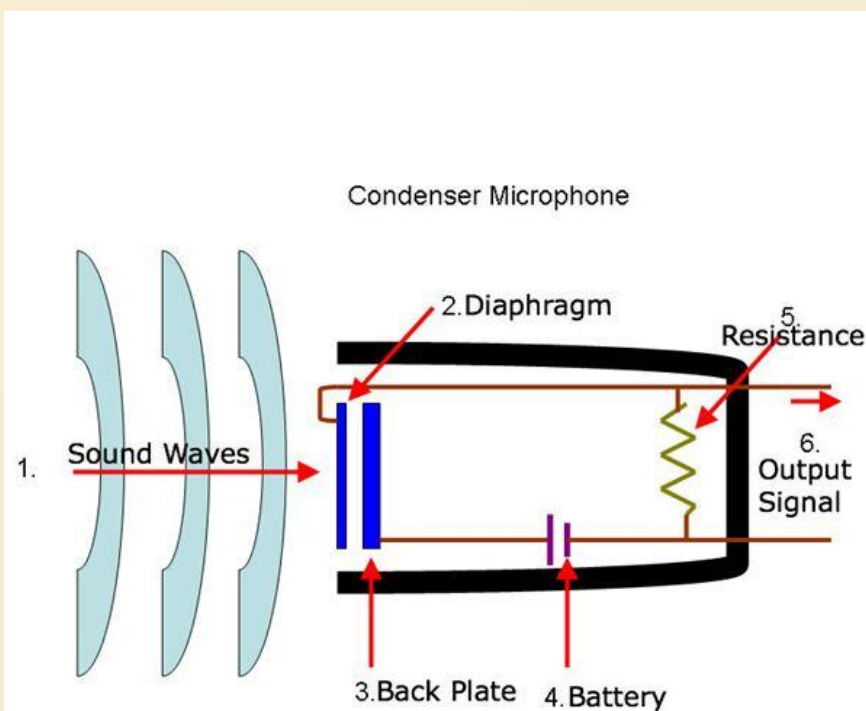


永电体或驻极体电介质

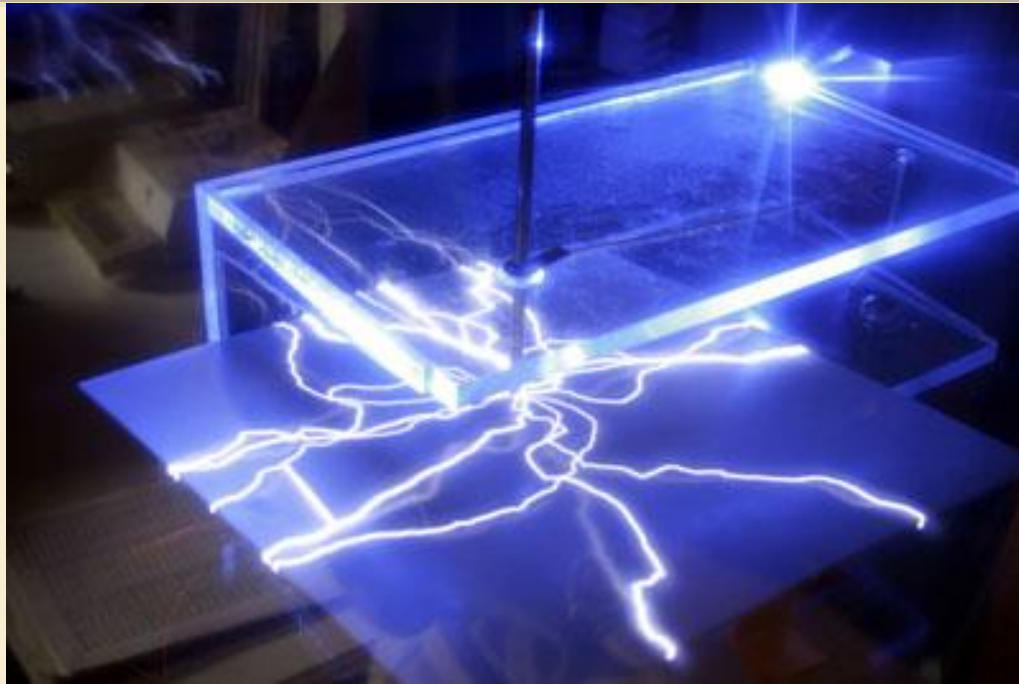
- 🔊 1922年就为日本物理学家江口元太郎发现。
- 🔊 石蜡熔解成液态后加强场使其极化后凝固，撤去外场后，石蜡将保留有极化特性，固态石蜡表面保持有极化电荷。
- 🔊 驻极体具有长期保持电荷的功能，它可以产生很强的电场。



🎧 驻极体薄膜制成的话筒已商品化，如一般录音机中用的话筒就是以驻极体为探头的话筒。



§ 2-5 电介质中静电场的基本定律



介质内外，宏观电场

由自由电荷 以及 宏观束缚电荷 分布

按照 真空中的库仑定律 以及 叠加原理 产生

有介质时的环路定理

■ 有介质存在时，环路定理仍然成立

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

■ 每种介质内可表示为微分形式

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

■ 在介质交界面附近，环路定理表示为边值关系

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad \text{where } \hat{n}: 1 \rightarrow 2$$

■ 有介质存在时，静电势概念仍然有效

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_P^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla \varphi$$

■ 电压(电势差、电势降)

$$V_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi(1) - \varphi(2)$$

有介质时的高斯定理

■ 有介质存在时，高斯定理仍然成立

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_0 + Q')$$

S 内的自由电荷

S 内的束缚电荷

$$Q' = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = Q_0$$

■ 定义电位移矢量: $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_0$$

电介质中的高斯定理

■ 电位移矢量的通量只与自由电荷有关(与极化电荷无关),
即电位移力线发自正自由电荷, 终止于负自由电荷。

有介质时的高斯定理_续

■ 有介质存在时的高斯定理

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_0$$

■ 每种介质内可表示为微分形式

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$

■ 在介质交界面附近，高斯定理表示为边值关系

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_0 \quad \text{where } \hat{n}: 1 \rightarrow 2$$

➤ 如果界面处没有自由电荷，则 D 的法向分量连续

D 与 E 的关系

■ 电位移矢量的定义: $\bar{D} \equiv \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$

■ 真空中: $\bar{D} \equiv \epsilon_0 \bar{E}$ $\longrightarrow$ 真空中的点电荷: $\bar{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}$

■ 线性、各向同性介质中

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \chi \epsilon_0 \bar{E} = (1 + \chi) \epsilon_0 \bar{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \bar{E} = \epsilon \bar{E}$$

相对介电常数

绝对介电常数

■ 介电常数可能因地而异(非均匀)

■ 在任一点处的 D 与 E 平行

■ 线性、各向异性介质中

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

一个例子

例：平行板电容器中填充了相对介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 的两种简单介质，已知电容器极板上的(自由)电荷密度为 $\pm\sigma_0$ ，试求电容器内部的电位移、电场与束缚电荷分布。

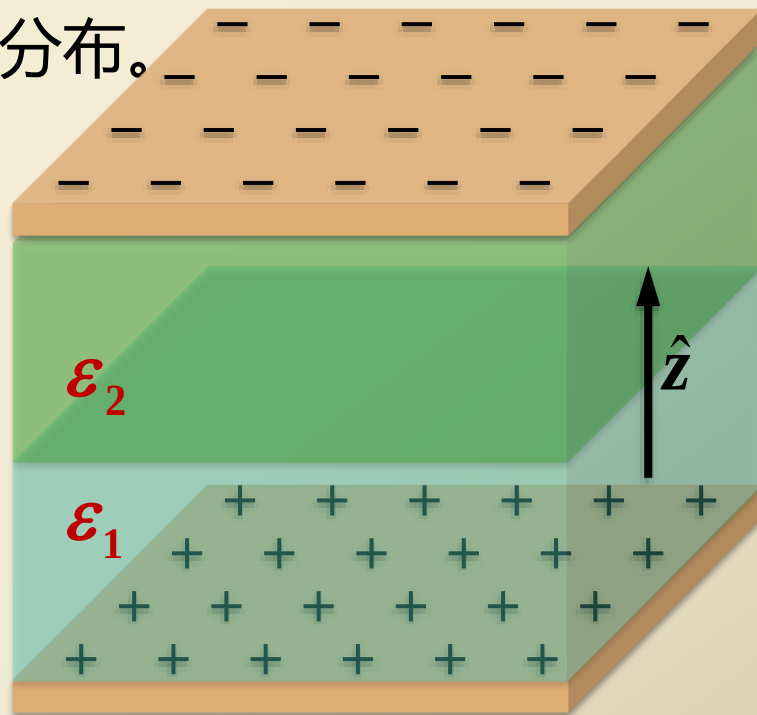
■ 对称性 $\longrightarrow \vec{D} = D(z)\hat{z}$

■ 选择柱形高斯面：下底在导体内，上底在介质内，地面面积为 S

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = DS, \quad Q_0 = \sigma_0 S$$

$$\longrightarrow \vec{D} = \sigma_0 \hat{z} = \vec{D}_1 = \vec{D}_2$$

$$\longrightarrow \vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\epsilon_0 \epsilon_1} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_1} \hat{z}, \quad \vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\epsilon_0 \epsilon_2} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_2} \hat{z}$$



一个例子续

■ 电极化强度:

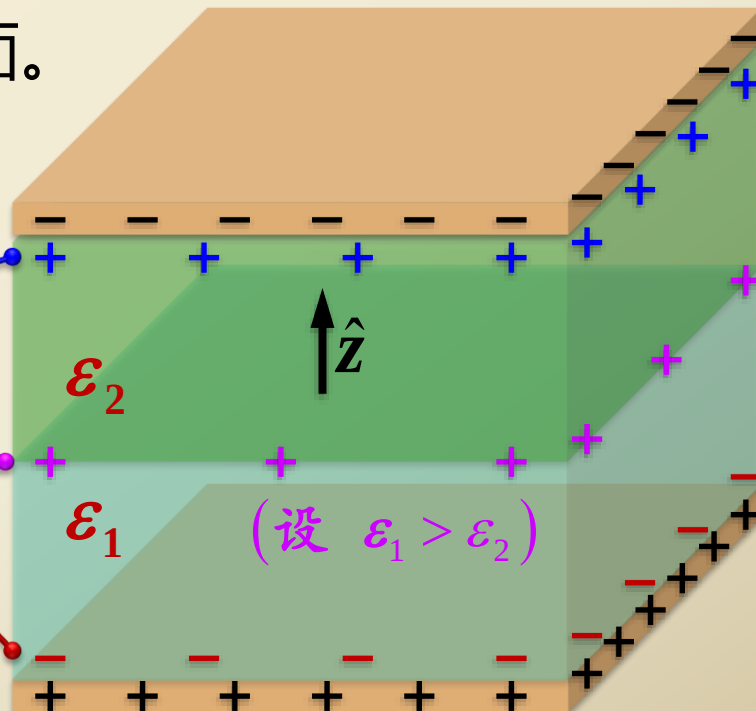
$$\bar{P}_1 = \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1) \bar{E}_1 = \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} \sigma_0 \hat{z}, \quad \bar{P}_2 = \varepsilon_0 (\varepsilon_2 - 1) \bar{E}_2 = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \sigma_0 \hat{z}$$

■ 由于每种介质都是均匀极化, 因此, 两种介质内部没有极化电荷。极化电荷只出现在介质表面。

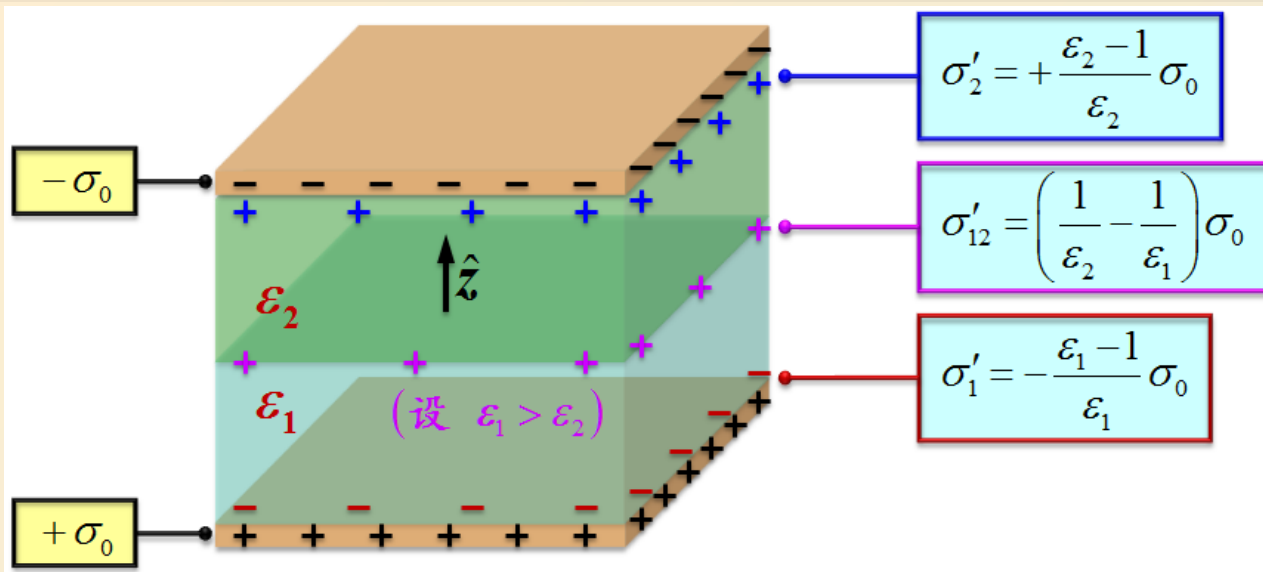
$$\sigma'_1 = -\hat{z} \cdot \bar{P}_1 = -\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} \sigma_0$$

$$\sigma'_2 = +\hat{z} \cdot \bar{P}_2 = +\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \sigma_0$$

$$\sigma'_{12} = -\hat{z} \cdot (\bar{P}_2 - \bar{P}_1) = \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \sigma_0$$



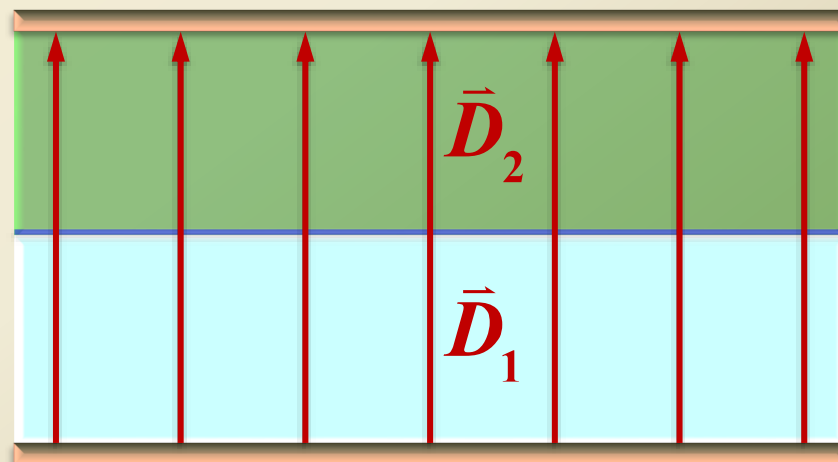
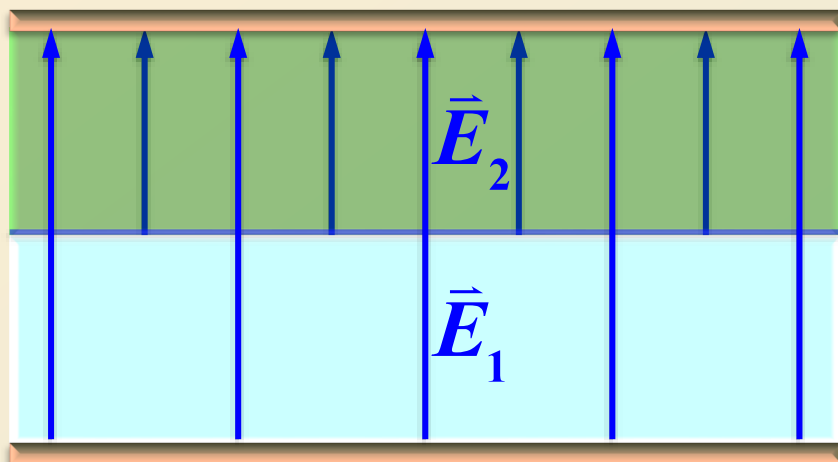
电位移线和电场线



$$\vec{D} = \sigma_0 \hat{z} = \vec{D}_1 = \vec{D}_2$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\epsilon_0 \epsilon_1} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_1} \hat{z}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\epsilon_0 \epsilon_2} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_2} \hat{z}$$



简单介质内部的电荷分布

■ 对于线性、均匀、各向同性的介质(简单介质) $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$

■ 在介质内部

■ 总电荷

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

■ 自由电荷

$$\rho_0 = \nabla \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_r \rho$$

■ 束缚电荷

$$\rho' = -\nabla \cdot \vec{P} = -\chi \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = -\chi \rho = -\frac{\chi}{\epsilon_r} \rho_0$$

简单介质内部, ρ 、 ρ' 与 ρ_0 满足简单的比例关系

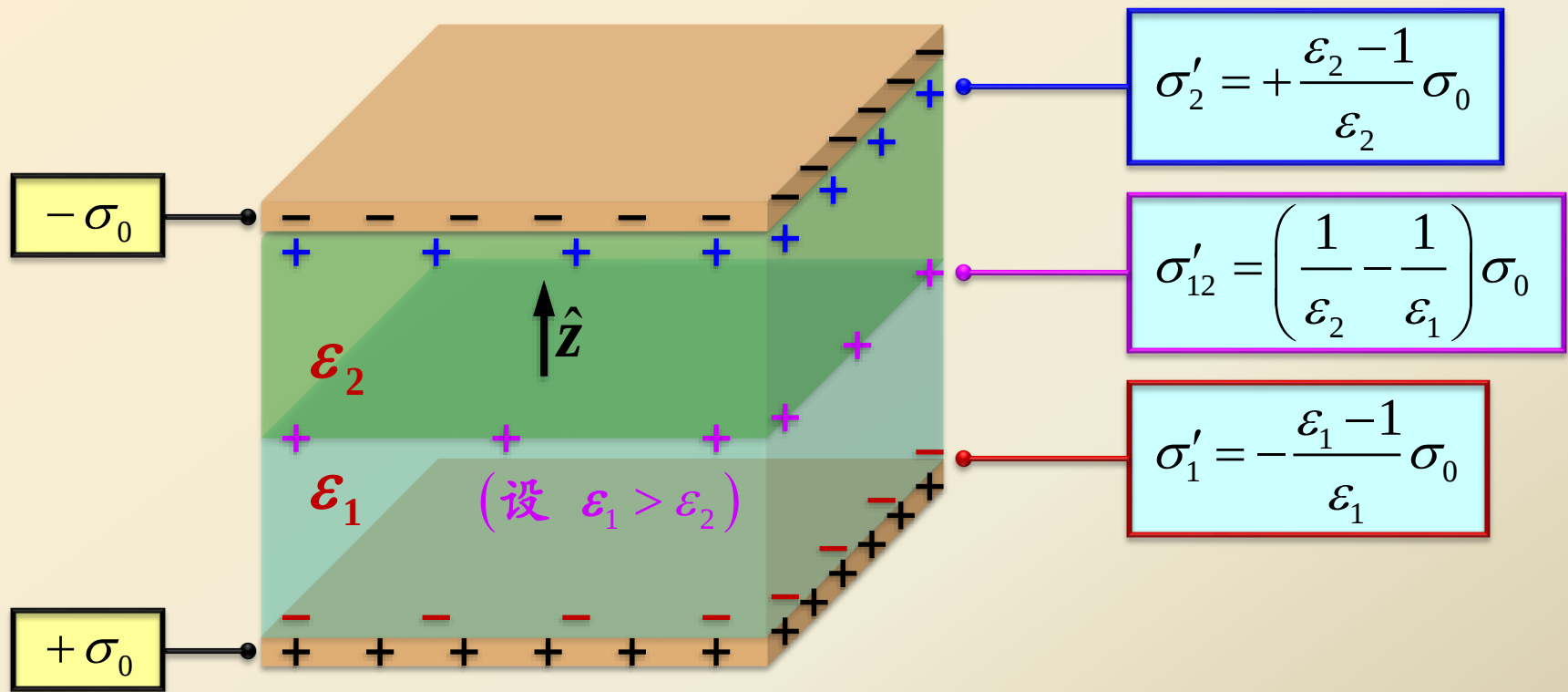
束缚电荷总是与自由电荷相伴而生的

$\rho_0=0$ 处必有 $\rho'=0$

束缚电荷仅仅分布于简单介质的表面

简单介质界面上的电荷分布

■ 一般而言，介质界面上的极化电荷与自由电荷的面密度之间没有简单的比例关系，需要分情况讨论。



“折射定律”

设在两种简单介质的交界面上没有自由电荷分布

■ 电位移的法向分量连续

$$D_{1n} = D_{2n} \longrightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

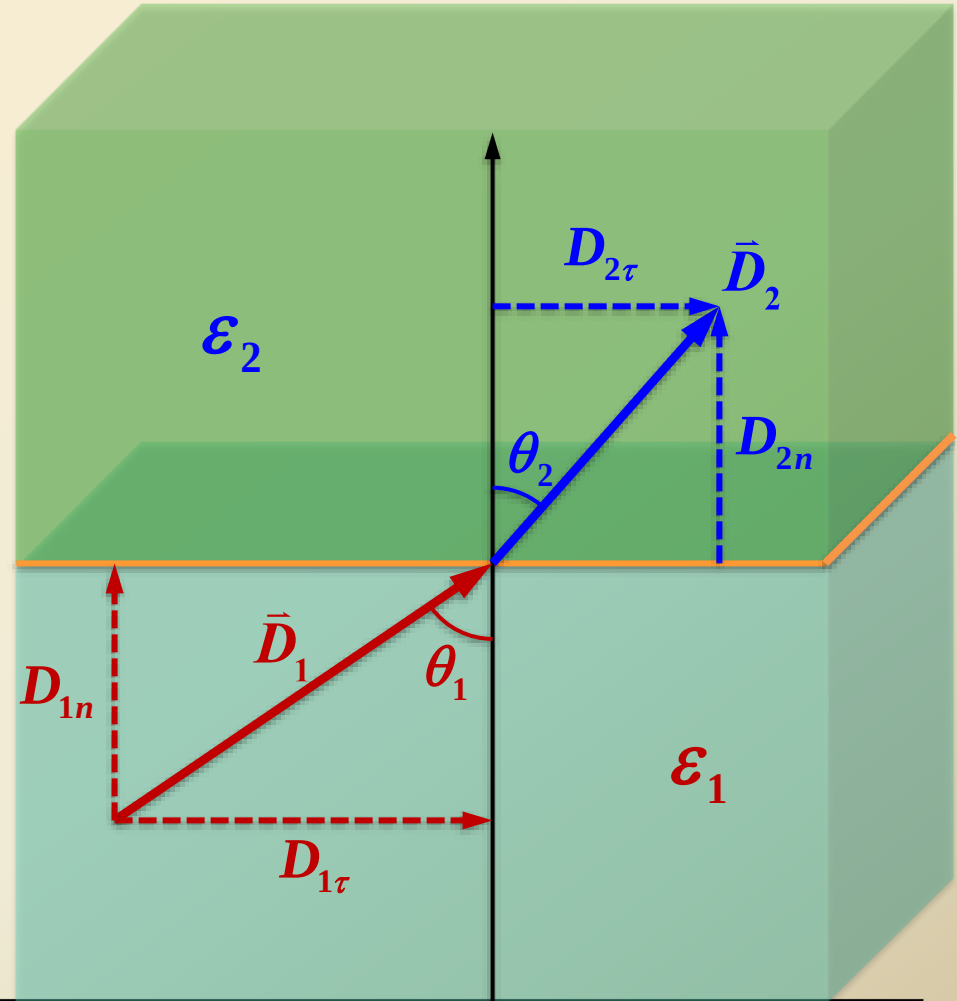
■ 电场的切向分量连续

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \longrightarrow \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}$$

■ “折射定理”

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{D_{1\tau} / D_{1n}}{D_{2\tau} / D_{2n}} = \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\text{or } \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{E_{1\tau} / E_{1n}}{E_{2\tau} / E_{2n}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$



“折射定律”

设两种简单介质交界面上无自由电荷分布

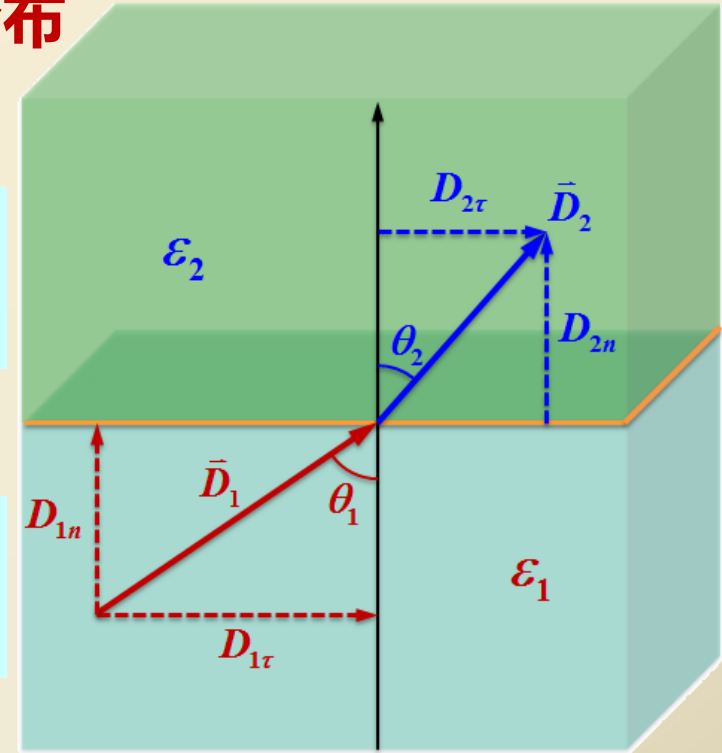
■ 与法向夹角: $\tan \theta_1 / \tan \theta_2 = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$

■ 电场: $E_{1\tau} = E_{2\tau} \longrightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$

如果 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, 那么 $E_1 < E_2$

■ 电位移: $D_{1n} = D_{2n} \longrightarrow \frac{D_1}{D_2} = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}$

如果 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, 那么 $D_1 > D_2$



尽管 $\oiint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q_0$, 尽管简单介质中 $\bar{D} \parallel \bar{E}$,
但是 $\bar{D}$ 与 Q_0 和 Q' 均有关

高斯定理的应用

例：已知 **球体**： a 、 ε_1 ； **均匀带电** Q_0 ；

球壳： b 、 ε_2 ； **不带电**；

球壳外： **真空** ε_0 。

求电场、电位移、电势以及极化电荷分布。

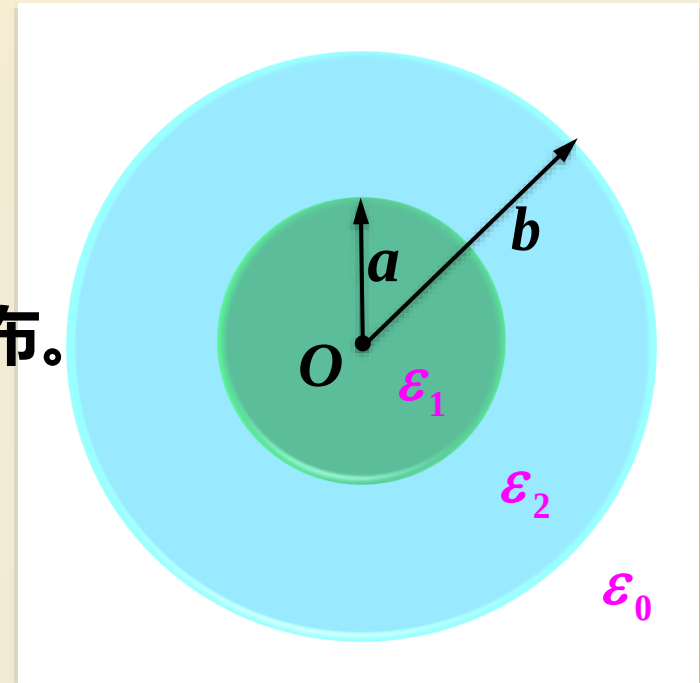
■ 对称性 $\longrightarrow \vec{D} = D(r)\hat{r}$

■ 选以 O 为球心、半径为 r 的球面为高斯面，由高斯定理得：

$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{Q_0 \vec{r}}{4\pi a^3} & (r < a) \\ \frac{Q_0 \vec{r}}{4\pi r^3} & (r > a) \end{cases}$$

电位移与没有介质时完全一样：

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 = \vec{D}_0$$



电场与电势

■ 电场强度: $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q_0 \vec{r}}{4\pi\varepsilon_1 a^3} & (r < a) \\ \frac{Q_0 \vec{r}}{4\pi\varepsilon_2 r^3} & (a < r < b) \\ \frac{Q_0 \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r > b) \end{cases}$$

电场变为无介质时的 $1/\varepsilon_r$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 / \varepsilon_r$$

■ 电势: $\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

$$\varphi(r > b) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\varphi(a < r < b) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\begin{aligned} \varphi(r < a) = & \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ & + \frac{Q_0}{8\pi\varepsilon_1 a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \end{aligned}$$

极化电荷

■ 极化电荷: $\vec{P} \equiv \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \vec{D}$

■ 极化体电荷仅存在于球 ($r < a$) 内

$$\rho' = -\nabla \cdot \vec{P} = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right) \nabla \cdot \vec{D} = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right) \frac{Q_0}{4\pi a^3/3}$$

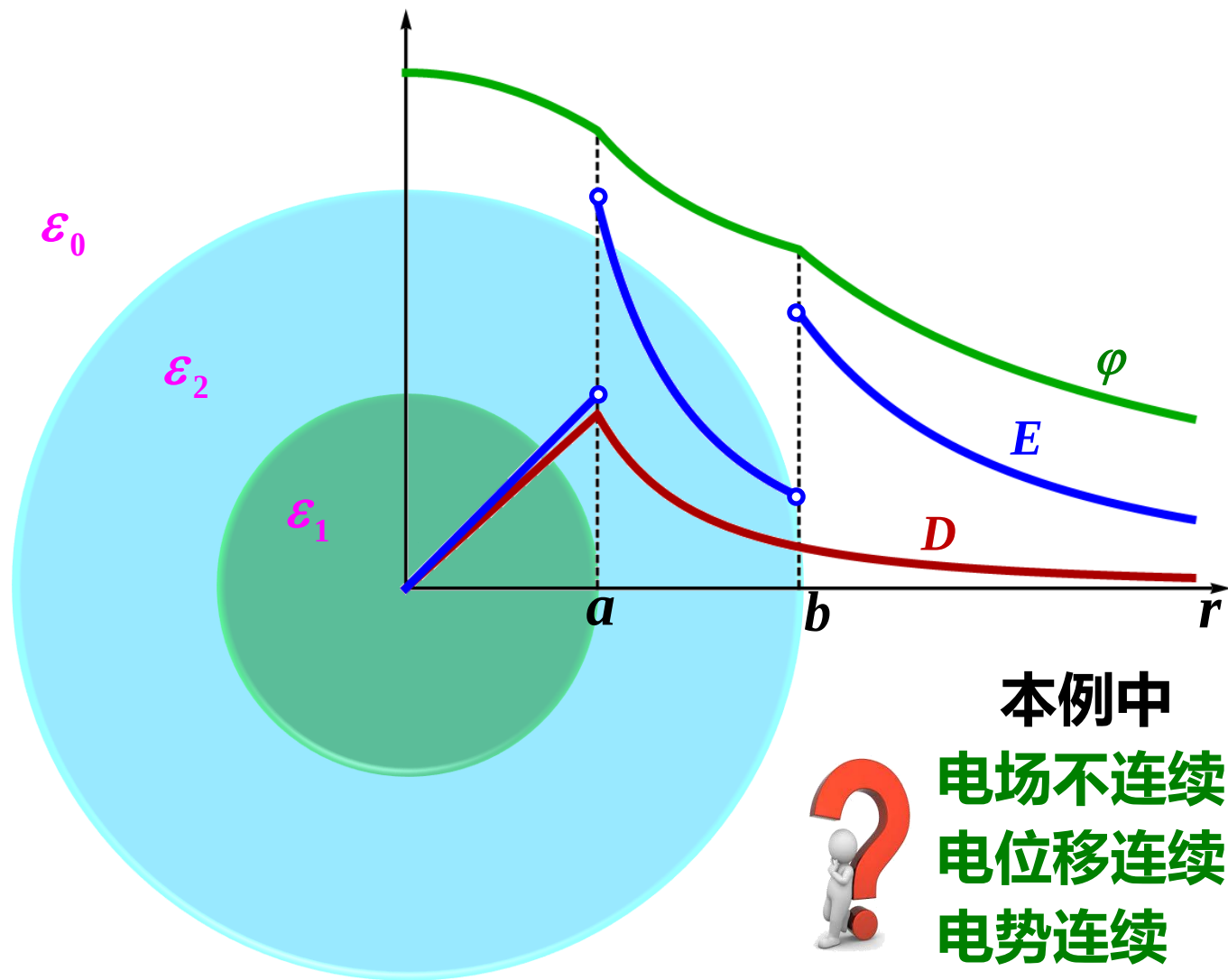
■ 极化面电荷

$$\sigma'_a = -\hat{r} \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)_{r=a} = \varepsilon_0 \hat{r} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)_{r=a} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right) \frac{Q_0}{4\pi a^2}$$

$$\sigma'_b = +\hat{r} \cdot \vec{P}_2 = \left[\hat{r} \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \vec{E}_2\right]_{r=a} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right) \frac{Q_0}{4\pi b^2}$$

总的极化电荷为零

电场、电位移与电势



简单介质中的库仑定律

在**无限、均匀介质**(ϵ) 中放置一自由点电荷 Q_0

■ 电位移矢量:

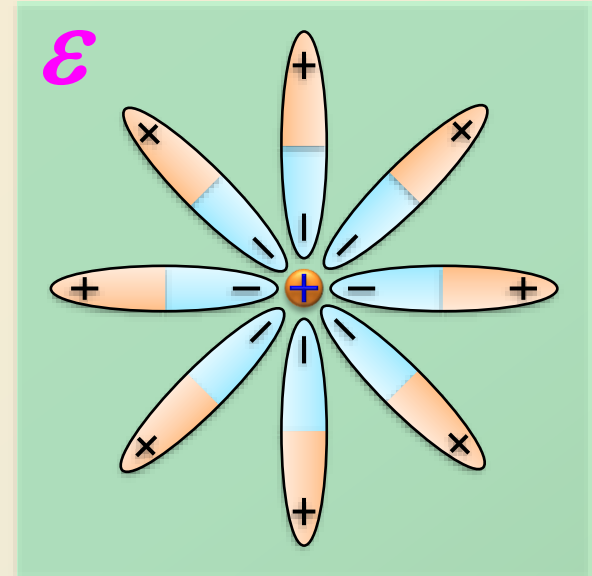
$$D \cdot 4\pi r^2 = Q_0 \quad \longrightarrow \quad \bar{D} = \frac{Q_0 \hat{r}}{4\pi r^2} = \bar{D}_0$$

■ 电场强度:

$$\bar{E} = \frac{\bar{D}}{\epsilon} = \frac{Q_0 \hat{r}}{4\pi \epsilon r^2} = \frac{\bar{E}_0}{\epsilon_r}$$

■ 电场来自自由电荷与极化电荷

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}' = \frac{Q_0 \hat{r}}{4\pi \epsilon_0 r^2} + \frac{Q' \hat{r}}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$



极化电荷如何分布



简单介质中的库仑定律

■ 电场来自自由电荷与极化电荷

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \frac{Q_0 \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{Q' \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

■ 无穷远处的极化电荷对场的贡献为零

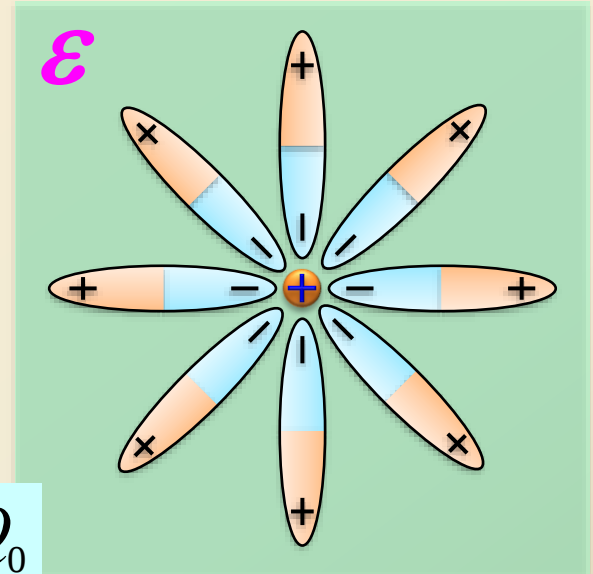
■ 点电荷周围出现符号相反的极化电荷

$$Q' = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) Q_0 \longrightarrow Q = Q_0 + Q' = \frac{Q_0}{\epsilon_r}$$

■ 宏观电磁学中，点电荷 Q 周围的这部分极化电荷 Q' 只能视为点电荷； Q' 总是与 Q 相伴而生，对于 Q 造成了某种屏蔽效应

$$\vec{E} = \frac{Q_0 \hat{r}}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{Q_0 \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}$$

介质中的库仑定律



例：两种**相对介电常数**分别为 $\epsilon_{\text{上}}$ 和 $\epsilon_{\text{下}}$ 的介质充满全空间，分界面为 xy 平面，第一种介质距离分界面 d 处有一点电荷 q ，试求分界面上的极化电荷分布。

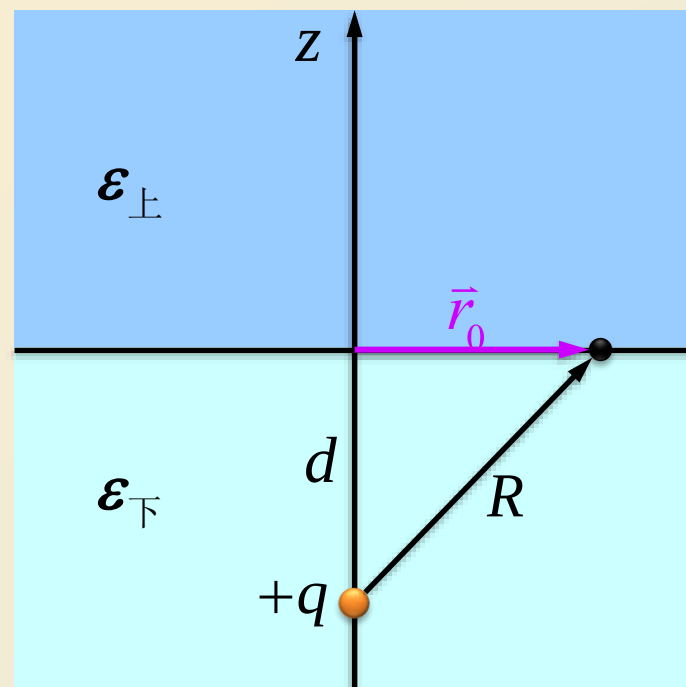
■ 用 $E_{\text{上}}$ 和 $E_{\text{下}}$ 表示分界面上某点两侧**无限靠近分界面的电场**，则

$$\begin{aligned}\sigma'(\vec{r}_0) &= \hat{z} \cdot (\vec{P}_{\text{下}} - \vec{P}_{\text{上}}) \\ &= \epsilon_0 \hat{z} \cdot (\chi_{\text{下}} \vec{E}_{\text{下}} - \chi_{\text{上}} \vec{E}_{\text{上}})\end{aligned}$$

■ 对 $E_{\text{上}}$ 、 $E_{\text{下}}$ 的贡献来自于两部分电荷

■ $z = -d$ 点处的屏蔽点电荷 $q/\epsilon_{\text{下}}$

■ $z = 0$ 平面上的极化面电荷 σ'



■ 电场

$$\hat{z} \cdot \vec{E}_{\text{上}} = \frac{q/\epsilon_{\text{下}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{R^3} + \frac{\sigma'}{2\epsilon_0}$$

$$\hat{z} \cdot \vec{E}_{\text{下}} = \frac{q/\epsilon_{\text{下}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{R^3} - \frac{\sigma'}{2\epsilon_0}$$

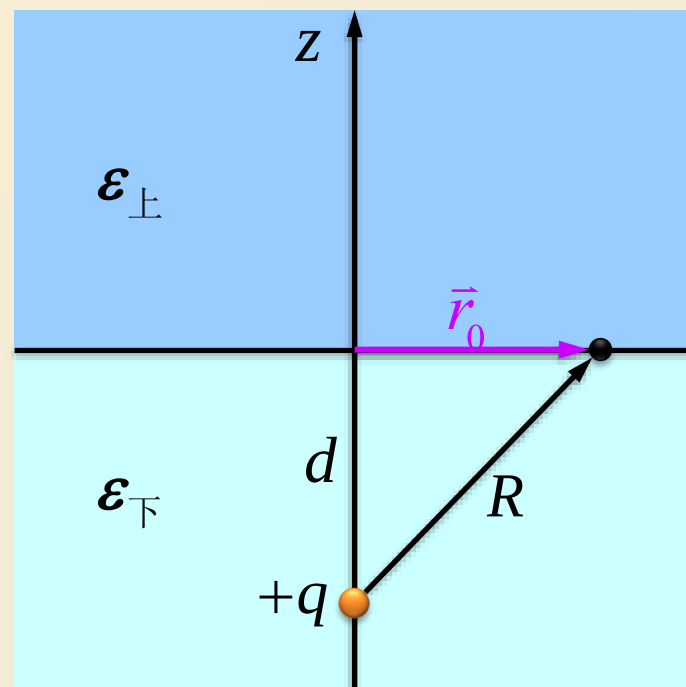
■ 极化电荷

$$\text{由 } \sigma'(\vec{r}_0) = \epsilon_0 \hat{z} \cdot (\chi_{\text{下}} \vec{E}_{\text{下}} - \chi_{\text{上}} \vec{E}_{\text{上}})$$

$$\text{或者 } \hat{z} \cdot \epsilon_{\text{下}} \vec{E}_{\text{下}} = \hat{z} \cdot \epsilon_{\text{上}} \vec{E}_{\text{上}}$$

$$\rightarrow \sigma' = \frac{1}{\epsilon_{\text{下}}} \frac{\epsilon_{\text{下}} - \epsilon_{\text{上}}}{\epsilon_{\text{下}} + \epsilon_{\text{上}}} \frac{qd}{2\pi R^3}$$

点电荷 q 受力多大？ 介质界面受力多大
当 $\epsilon_{\text{下}} = 1, \epsilon_{\text{上}} \rightarrow \infty$ 时，得到什么结果



关于 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 = \vec{D}_0$ 的讨论

设空间有给定的自由电荷分布

没有介质时的电场与电位移: $(\vec{E}_0, \vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0)$

填充介质后的电场与电位移: $(\vec{E}, \vec{D} = \epsilon \vec{E})$

$$\begin{cases} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_0 \\ \epsilon_0 \oiint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = Q_0 \end{cases}$$



$\vec{E}_0$ 满足高斯定理 $\oiint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = Q_0 / \epsilon_0$ 以及环路定理 $\oint_C \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0$

由 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0$ 确定的电场 $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{D}(\vec{r}) / \epsilon(\vec{r})$

满足高斯定理 $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_0$ 

满足环路定理 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 否 

介质分界面为等势面

设各介质界面均为等势面

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \left[\begin{aligned} &\frac{1}{\epsilon_{r1}} \int_{A_1}^{B_1} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \int_{B_1}^{B_2} + \frac{1}{\epsilon_{r3}} \int_{B_2}^{B_3} + \frac{1}{\epsilon_{r4}} \int_{B_3}^{B_4} \\ &+ \frac{1}{\epsilon_{r5}} \int_{B_4}^{A_4} + \frac{1}{\epsilon_{r4}} \int_{A_4}^{A_3} + \frac{1}{\epsilon_{r3}} \int_{A_3}^{A_2} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \int_{A_2}^{A_1} \end{aligned} \right] \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$$

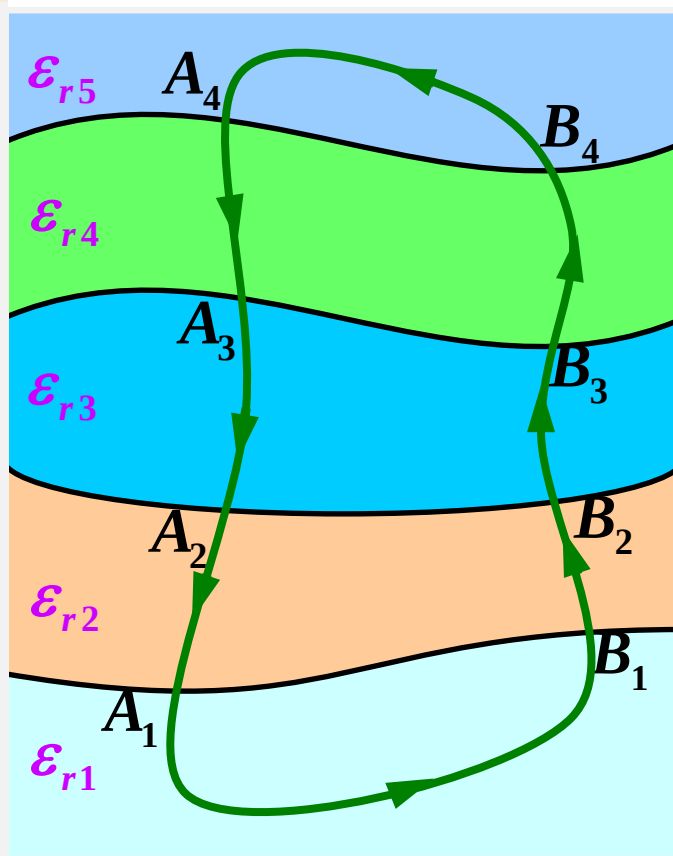
$$\Downarrow \varphi(A_i) = \varphi(B_i)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

若同种介质充满两个等势面之间的区域

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 \\ \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \end{array} \right. \longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \quad ?$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}_0}{\epsilon} = \frac{\epsilon_0 \vec{E}_0}{\epsilon} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}$$





Thank You!