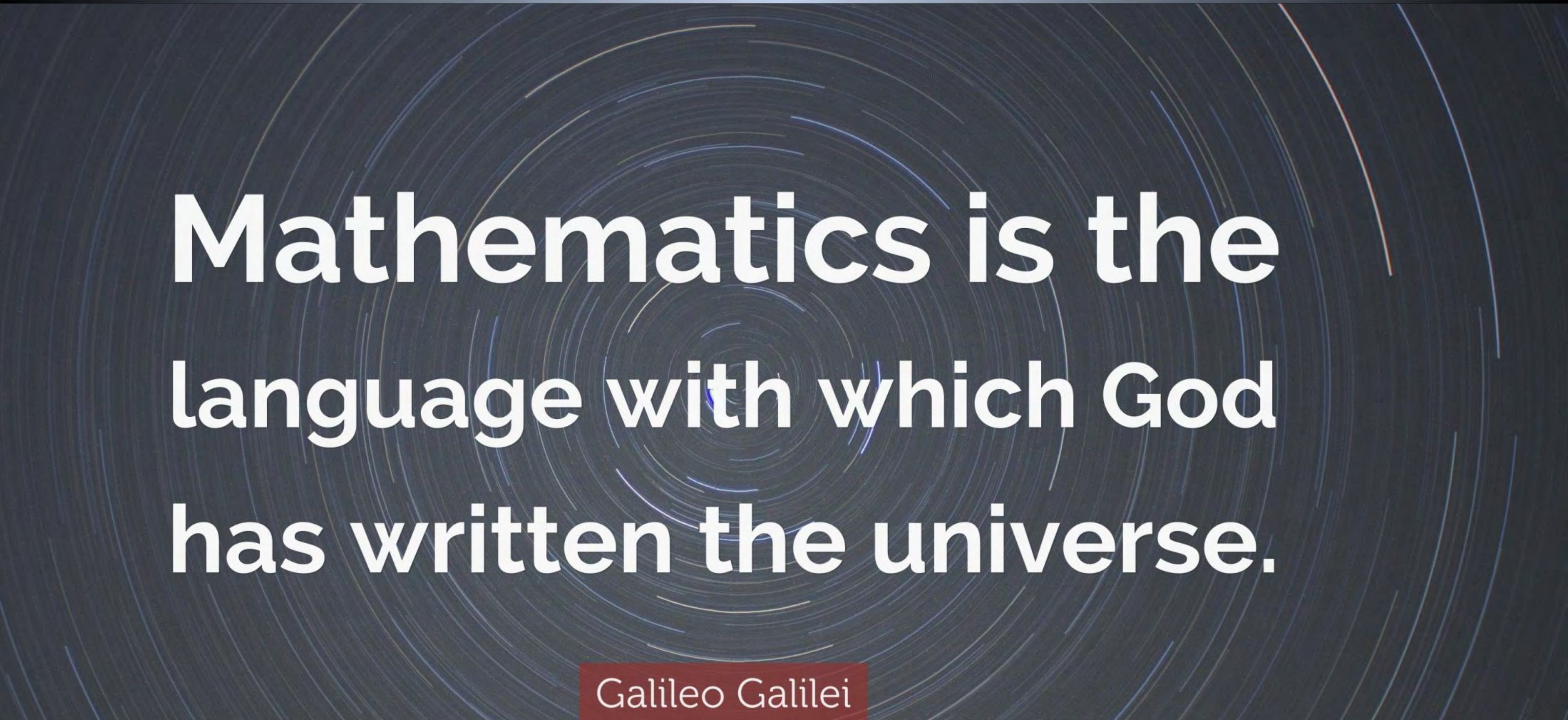
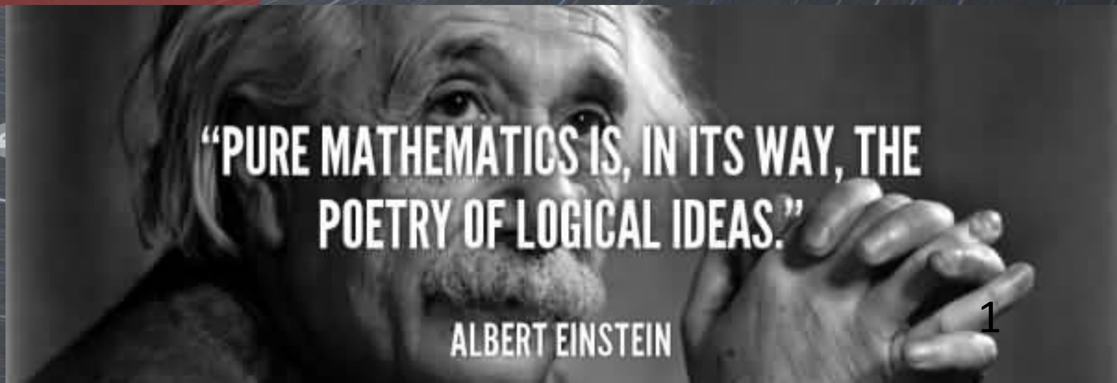
第零章 数学补充


Mathematics is the
language with which God
has written the universe.
Galileo Galilei


"PURE MATHEMATICS IS, IN ITS WAY, THE
POETRY OF LOGICAL IDEAS."
ALBERT EINSTEIN

§0−1 矢量代数

§0−2 场及其导数

§0−3 矢量场的积分

§0−4 平面角与立体角

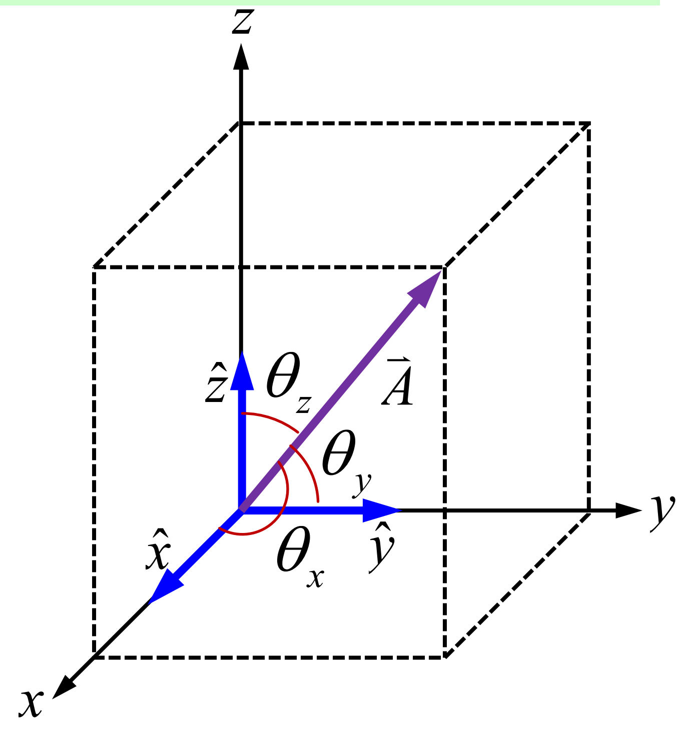
§0.1 矢量代数

一、矢量

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} A_x, & A_y, & A_z \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

大小： $$A = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

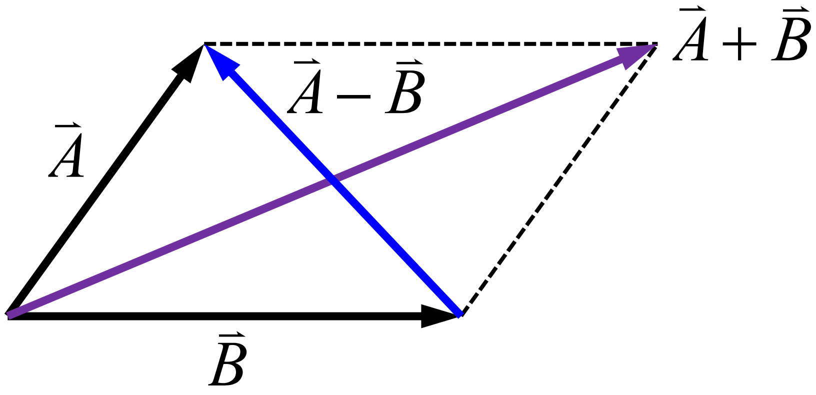
方向： $$\begin{cases} \cos\theta_x = A_x / A \\ \cos\theta_y = A_y / A \\ \cos\theta_z = A_z / A \end{cases}$$

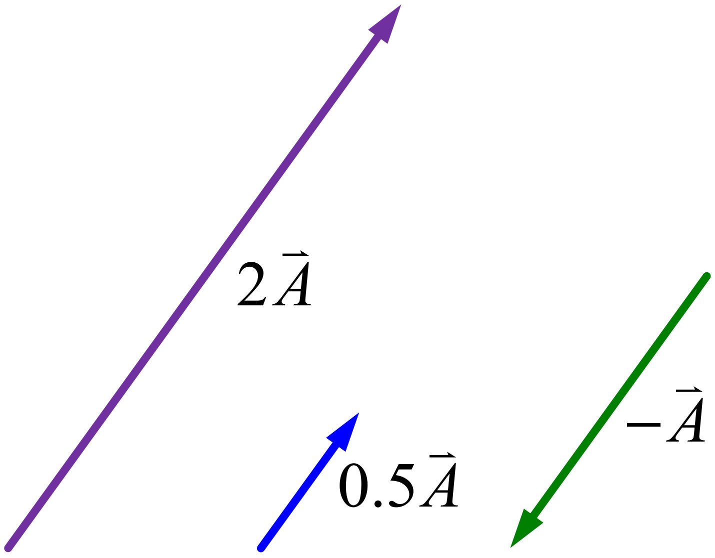


二、矢量的线性运算

加法： $$\vec{A}+\vec{B} \triangleq (A_x+B_x)\hat{x}+\left(A_y+B_y\right)\hat{y}+(A_z+B_z)\hat{z}$$

数乘： $$\lambda\vec{A} \triangleq (\lambda A_x)\hat{x}+\left(\lambda A_y\right)\hat{y}+(\lambda A_z)\hat{z}$$





三、矢量的点乘（标量积）

$$\vec{A}\cdot\vec{B} \triangleq A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

法则：

（1） $\vec{B}\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\vec{B}$

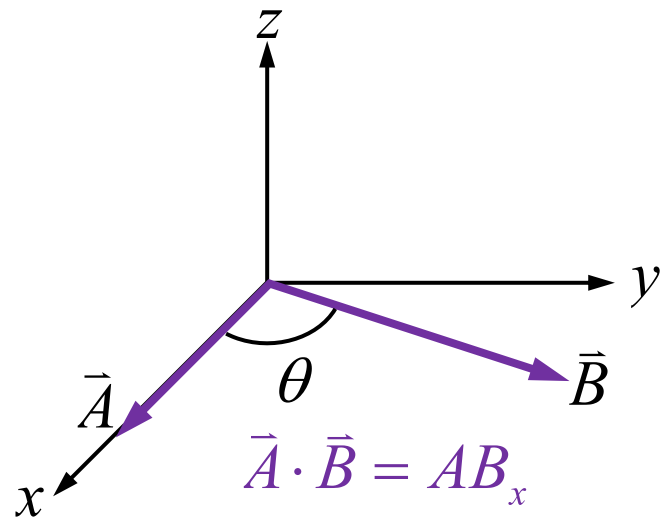
（2） $\left(\lambda\vec{A}+\mu\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\lambda\vec{A}\cdot\vec{C}+\mu\vec{B}\cdot\vec{C}$

性质：

（1） $A=\left|\vec{A}\right|\triangleq\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$

（2） $\begin{cases}\hat{x}\cdot\hat{x}=\hat{y}\cdot\hat{y}=\hat{z}\cdot\hat{z}=1\\ \hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{y}\cdot\hat{z}=\hat{z}\cdot\hat{x}=0\end{cases}$

（3） $\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$



矢量及其分量： $\vec{A}=\left(\vec{A}\cdot\hat{x}\right)\hat{x}+\left(\vec{A}\cdot\hat{y}\right)\hat{y}+\left(\vec{A}\cdot\hat{z}\right)\hat{z}$

四、矢量的叉乘（矢量积）

$$\vec{A}\times\vec{B} \triangleq \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{matrix} (A_yB_z - A_zB_y)\hat{x} \\ +(A_zB_x - A_xB_z)\hat{y} \\ +(A_xB_y - A_yB_x)\hat{z} \end{matrix}$$

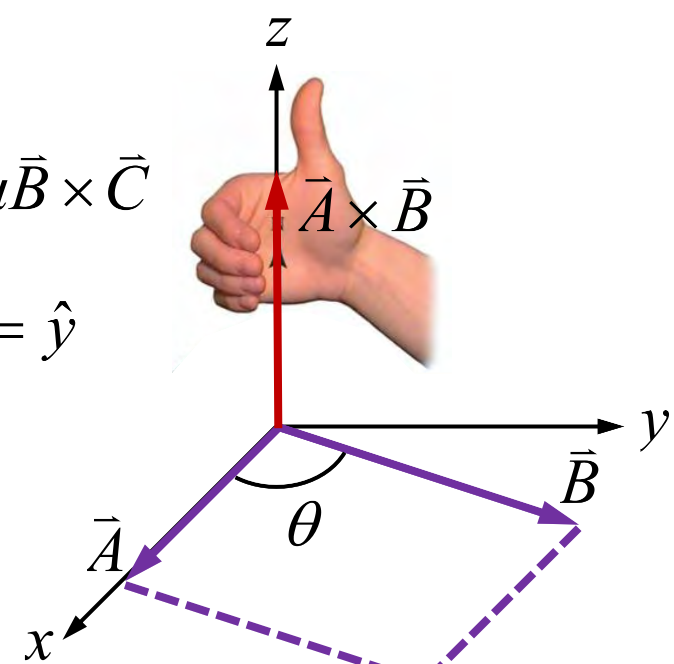
法则： （1） $\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$

（2） $\left(\lambda\vec{A}+\mu\vec{B}\right)\times\vec{C} = \lambda\vec{A}\times\vec{C}+\mu\vec{B}\times\vec{C}$

性质： （1） $\begin{cases} \hat{x}\times\hat{y}=\hat{z},\ \hat{y}\times\hat{z}=\hat{x},\ \hat{z}\times\hat{x}=\hat{y} \\ \hat{x}\times\hat{x}=\hat{y}\times\hat{y}=\hat{z}\times\hat{z}=0 \end{cases}$

（2） $\vec{A}\times\vec{B} = \left(AB\sin\theta\right)\hat{n}$

（A、B、n）满足右手法则



$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB_y\hat{z}$

三个重要关系

(1) $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A}$

【证明】 只需证明左右两边的对应分量相等。以 x 分量为例。

$$\left[\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}\right]_x=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_y C_z-\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_z C_y$$

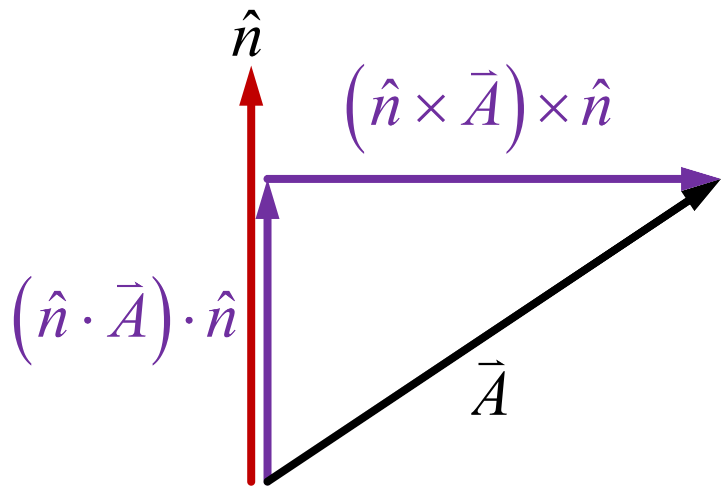
$$=\left(A_zB_x-A_xB_z\right)C_z-\left(A_xB_y-A_yB_x\right)C_y$$

$$=\left(A_yC_y+A_zC_z\right)B_x-\left(B_yC_y+B_zC_z\right)A_x+A_xB_xC_x-A_xB_xC_x$$

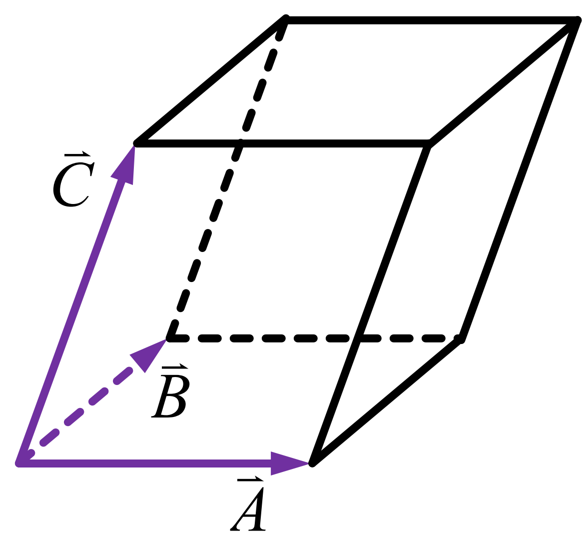
$$=\left(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z\right)B_x-\left(B_xC_x+B_yC_y+B_zC_z\right)A_x$$

$$=\left[\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A}\right]_x$$

(2) $\vec{A}=(\hat{n}\cdot\vec{A})\cdot\hat{n}+(\hat{n}\times\vec{A})\times\hat{n}$



(3) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}=\pm$体积



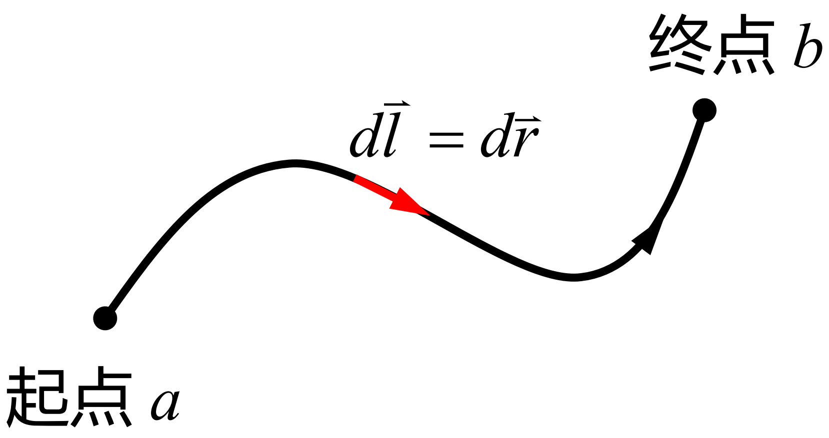
$\Rightarrow$ $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}$

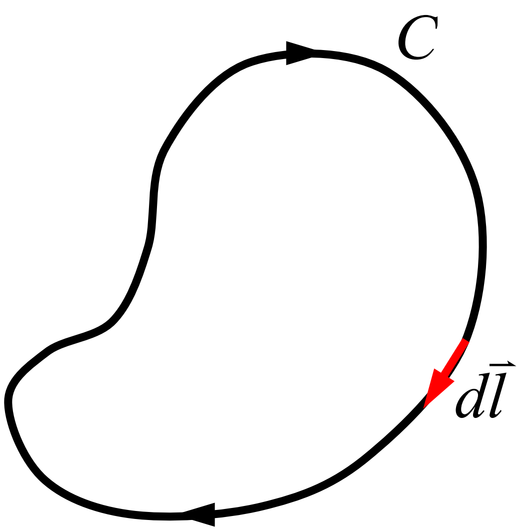
$\Rightarrow$ $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

五、两个常用矢量

线元： 曲线上无限靠近的两点之间的相对位矢

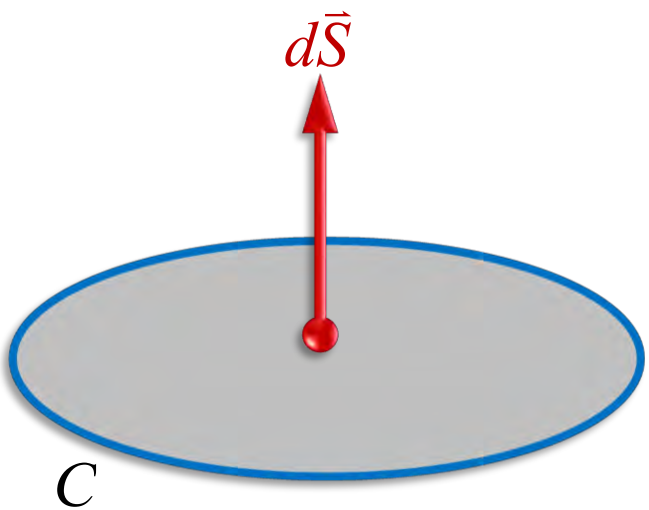
- 线元沿着曲线的切线方向
- 约定起点和终点后，开曲线上各线元的方向唯一确定
- 约定绕行方向后，闭曲线上各线元的方向唯一确定

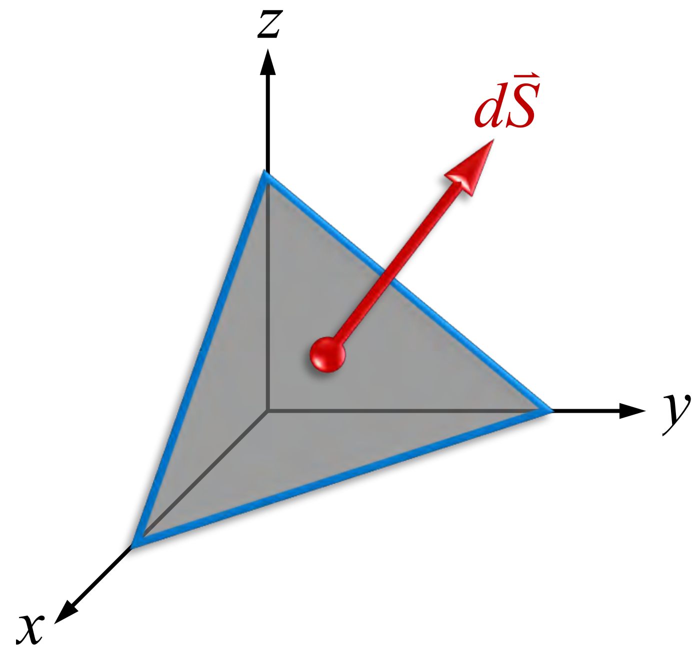




面元： 曲面的面元沿着法向方向

$$d\vec{S} = \hat{n}dS = \left(n_x dS\right)\hat{x} + \left(n_y dS\right)\hat{y} + \left(n_z dS\right)\hat{z}$$



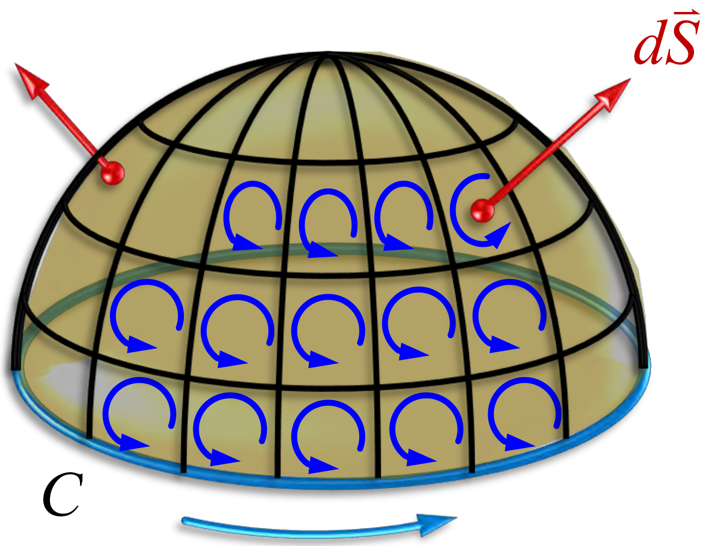


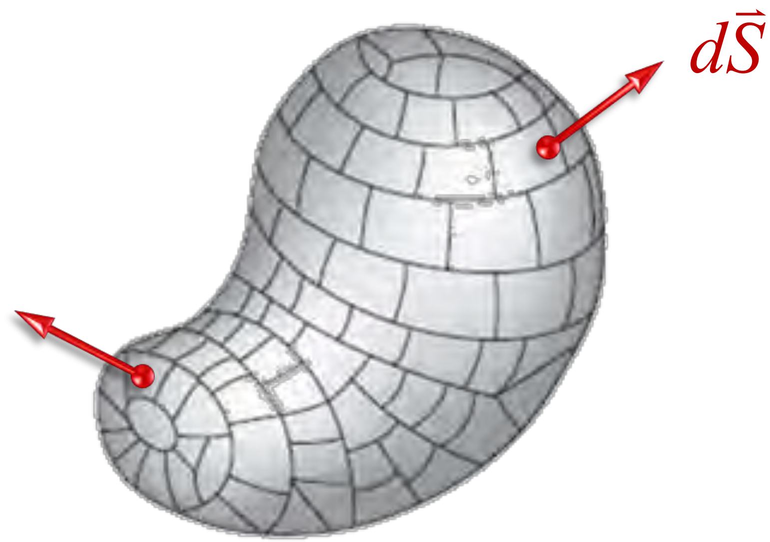
- 开曲面的法向可任意约定（要求连续变化）
- 闭曲线 C 是开曲面 S 的边界（$C=\partial S$）

规定：开曲面法向与其边界的绕行方向满足右手法则

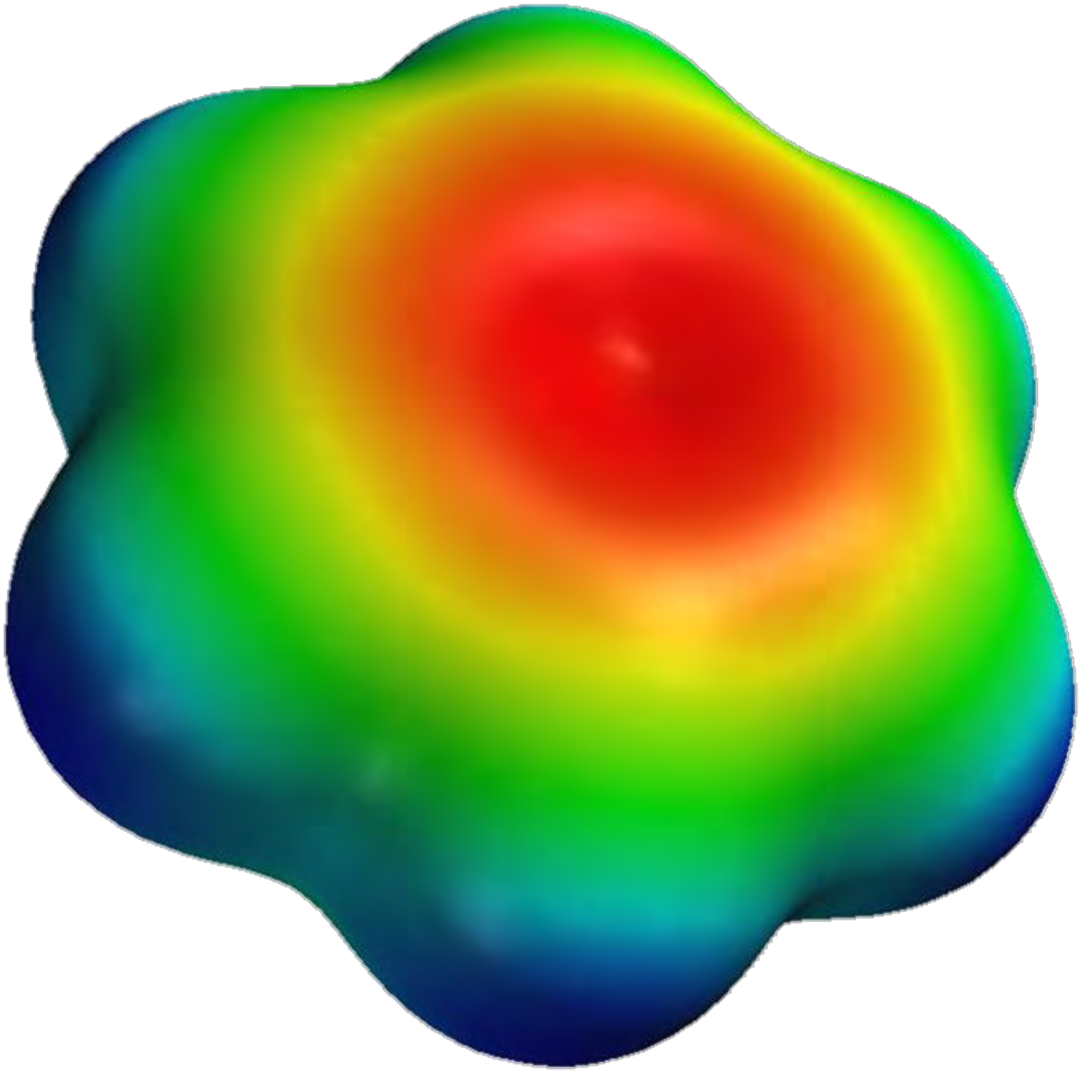
- 闭曲面 S 是三维区域 V 的边界（$S=\partial V$）

规定：闭曲面总是以外法向作为面元正向





§0.2 场及其导数



一、标量场与矢量场

标量场（标量函数）：空间每一点都指定了唯一的一个标量

$$\varphi=\varphi\left(\vec{r}\right)=\varphi\left(x,y,z\right)$$

二维空间的标量函数称为二维标量场，如

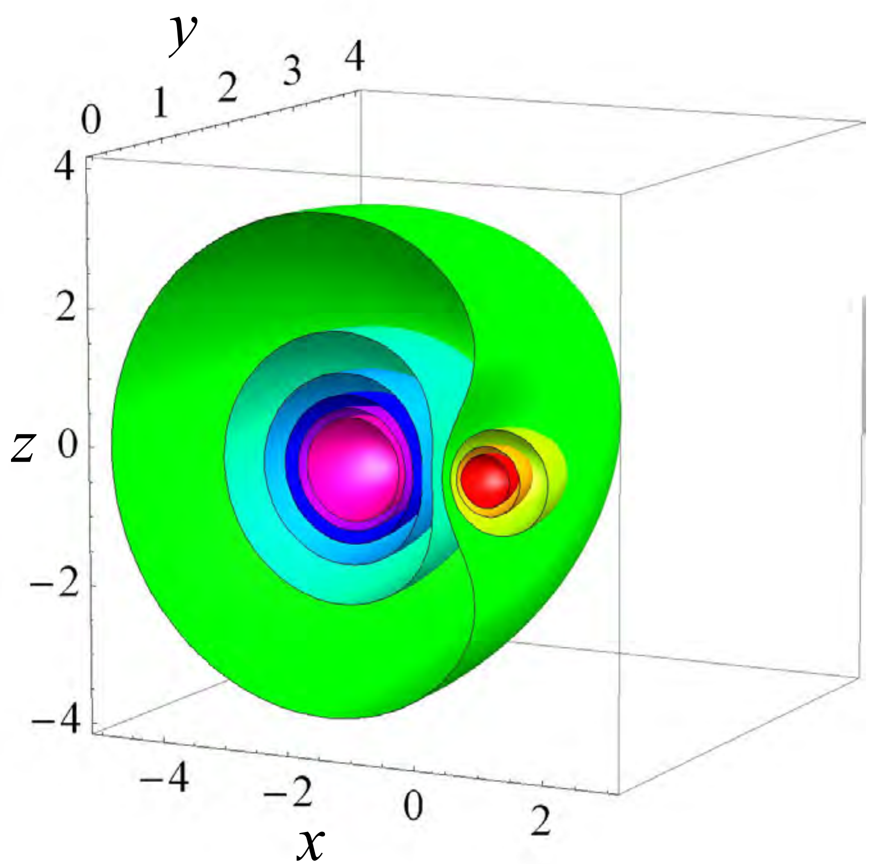
$$\varphi=\varphi\left(x,y\right),\qquad \varphi=\varphi\left(\theta,\phi\right)$$

矢量场（矢量函数）：空间每一点都指定了唯一的一个矢量

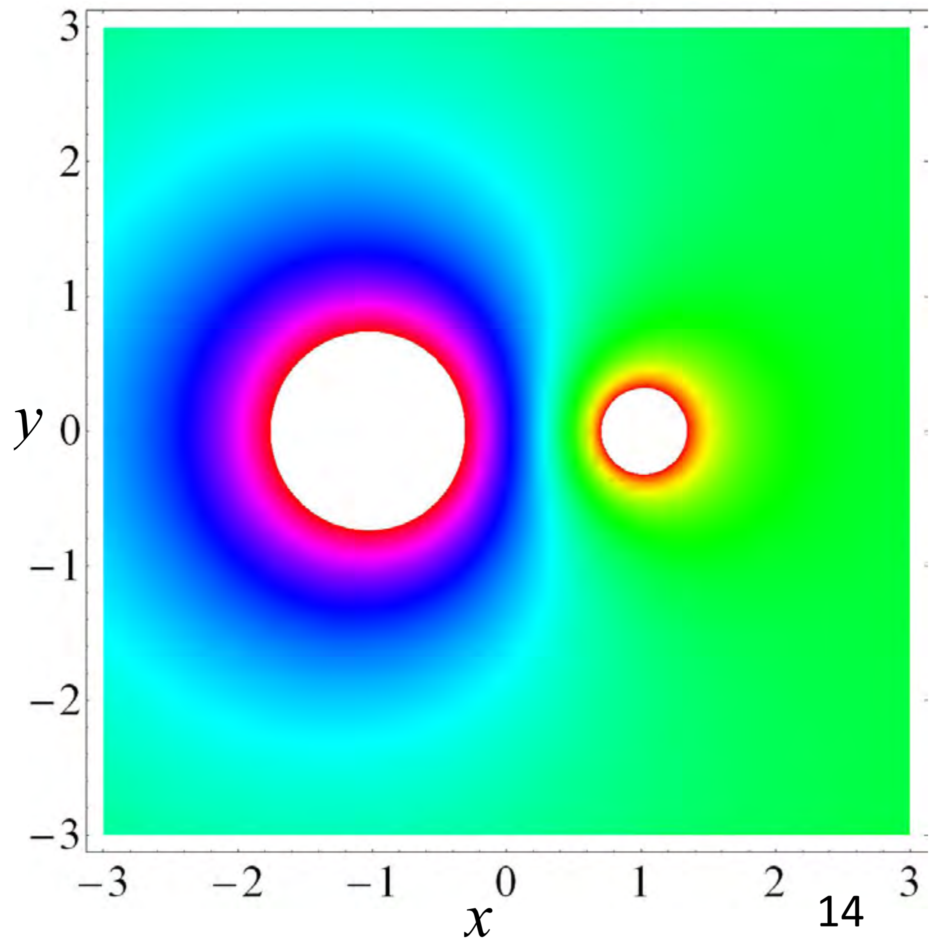
$$\begin{aligned}\vec{F}&=\vec{F}\left(\vec{r}\right)=\vec{F}\left(x,y,z\right)\\&=F_x\left(x,y,z\right)\hat{x}+F_y\left(x,y,z\right)\hat{y}+F_z\left(x,y,z\right)\hat{z}\end{aligned}$$

【例】 $$\varphi = \frac{3}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}}$$

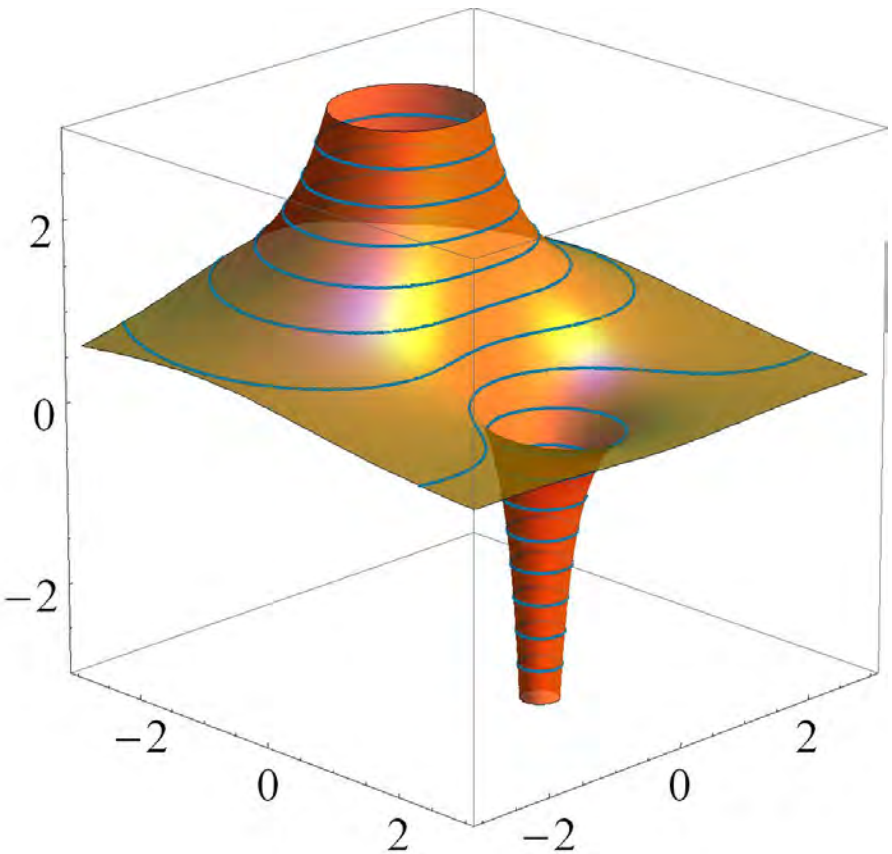
$\varphi(x, y, z) = const.$



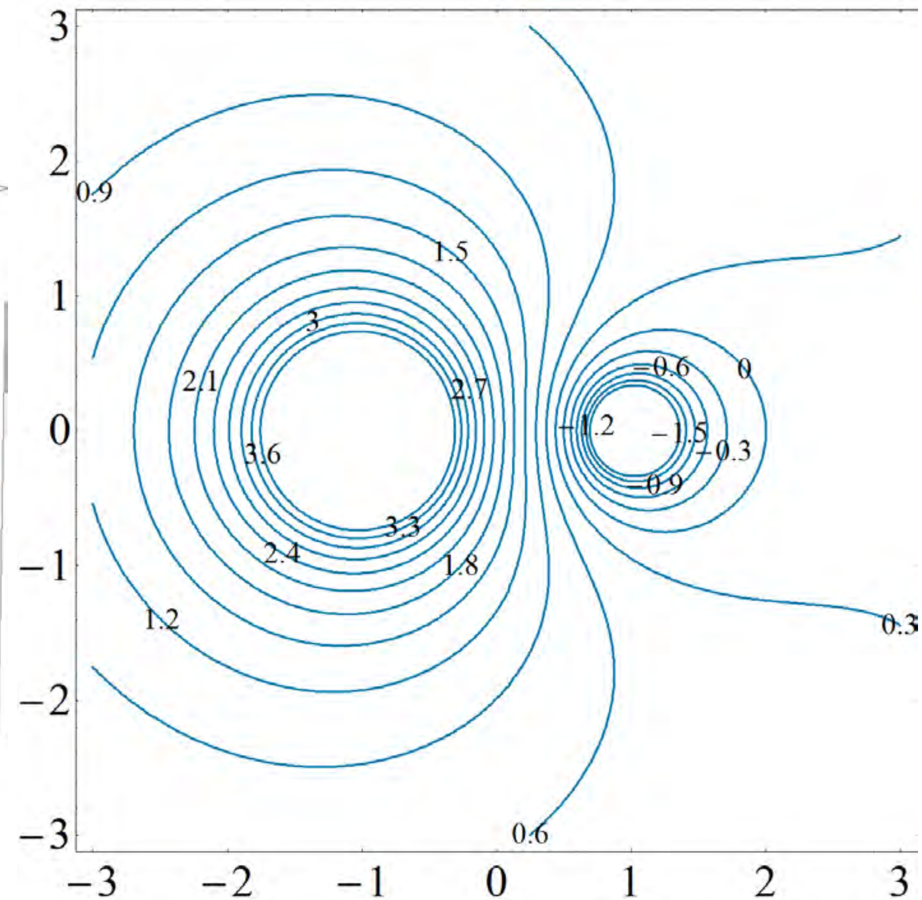
$\varphi(x, y, z=0)$



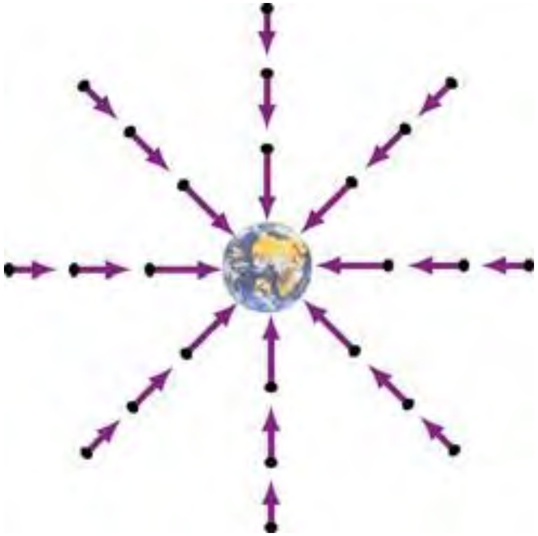
$\varphi(x, y, z = 0)$

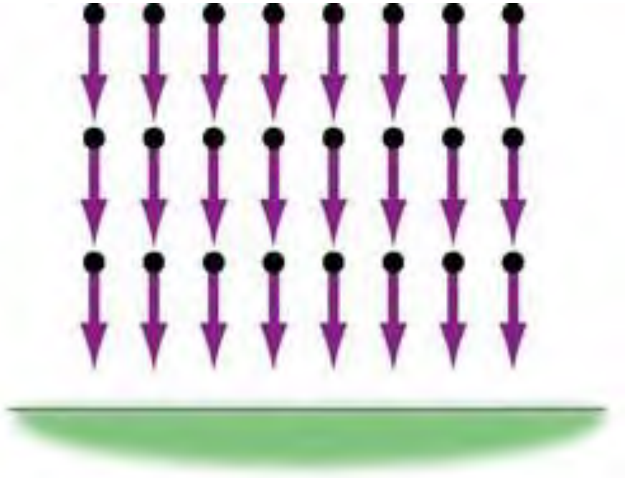


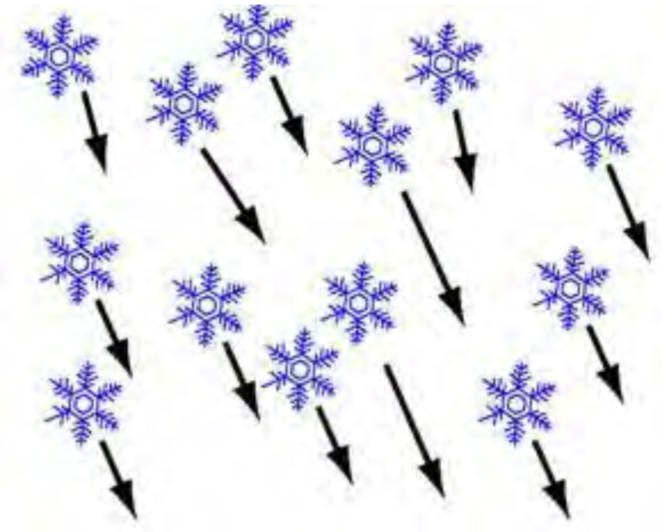
$\varphi(x, y, z = 0) = const.$



【例】矢量场





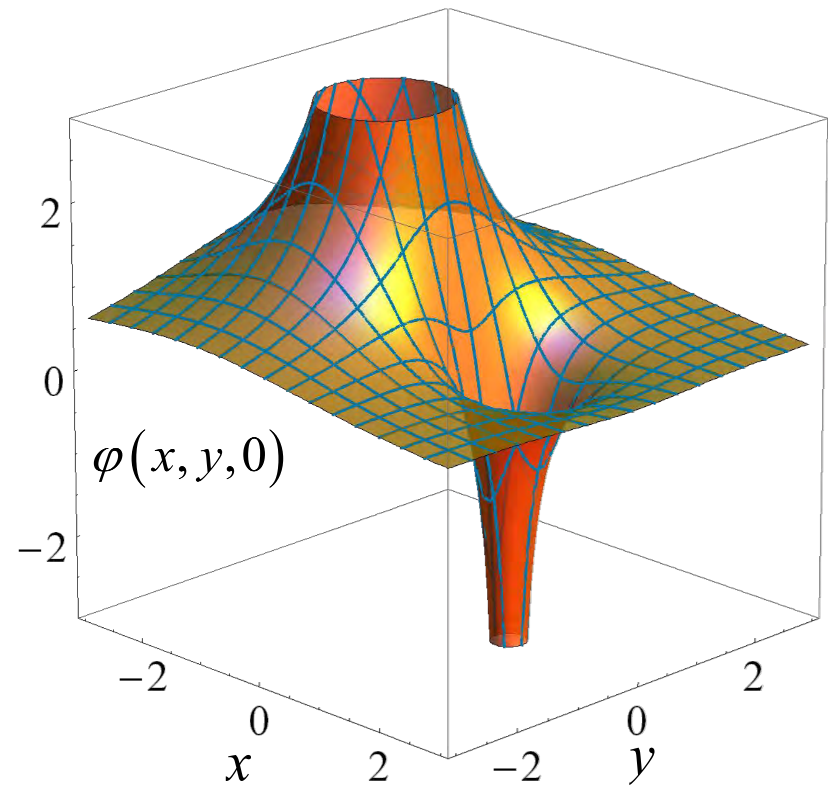


对于确定的 y、z，定义单变量函数

$$f(x)=\varphi(x,y,z)$$

则 df/dx 给出了函数 φ 在 $\boldsymbol{r}$ 点处沿着 x 轴方向的变化率

$$\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$



将其称为 φ 对 x 的**偏导数**，记为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\triangleq\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x,y,z)-\varphi(x,y,z)}{\Delta x}=\partial_x\varphi$$

类似地，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \triangleq \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\varphi(x+\Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta x} = \partial_x \varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \triangleq \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\varphi(x, y+\Delta y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta y} = \partial_y \varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \triangleq \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\varphi(x, y, z+\Delta z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta z} = \partial_z \varphi \end{cases}$$

法则：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\psi + \varphi\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\varphi(\psi) = \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

【例】 $\varphi(x,y,z)=x^2y^5z^7$

【解】 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=2xy^5z^7,\qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=5x^2y^4z^7,\qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=7x^2y^5z^6$

【例】 $\varphi=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

【解】

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{r}\\[2ex]\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{y}{r}\\[2ex]\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{z}{r}\end{cases}$$

二、标量场的梯度

标量场 $\varphi(x, y, z)$ 在 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ 两点处的差值

$$d\varphi(x,y,z)=\varphi(x+dx,y+dy,z+dz)-\varphi(x,y,z)$$

$$=\left[\varphi(x+dx,y+dy,z+dz)-\varphi(x,y+dy,z+dz)\right]$$

$$+\left[\varphi(x,y+dy,z+dz)-\varphi(x,y,z+dz)\right]$$

$$+\left[\varphi(x,y,z+dz)-\varphi(x,y,z)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad d\varphi(\vec{r}) \triangleq \varphi(\vec{r}+d\vec{r})-\varphi(\vec{r})=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

$$\Longrightarrow \quad d\varphi(\vec{r})=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cdot(dx,dy,dz)$$

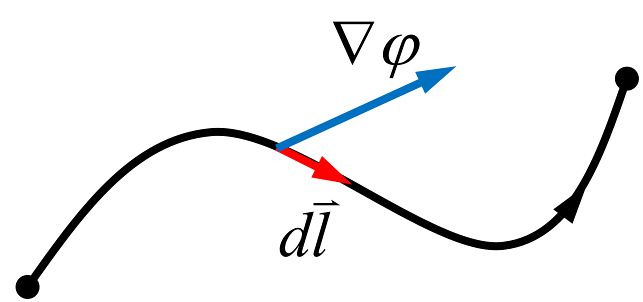
在直角坐标系下，标量场 $\varphi(x, y, z)$ 的**梯度**定义为

$$\nabla\varphi \triangleq \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

- 在每个点处确定了唯一的一个矢量，标量场的梯度是一个矢量场。

- 梯度的与坐标系无关的定义：

$$d\varphi(\vec{r}) \triangleq \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = \nabla\varphi \cdot \vec{r}$$

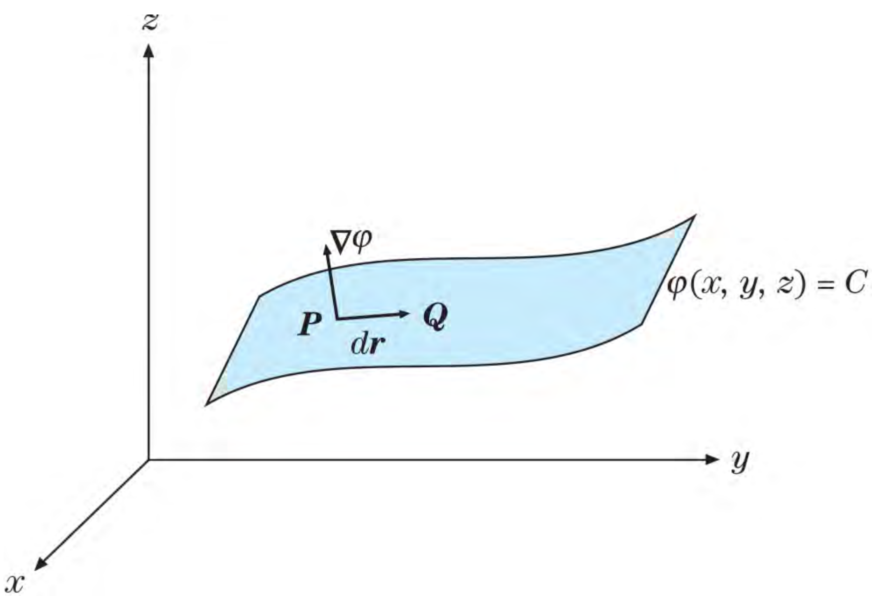


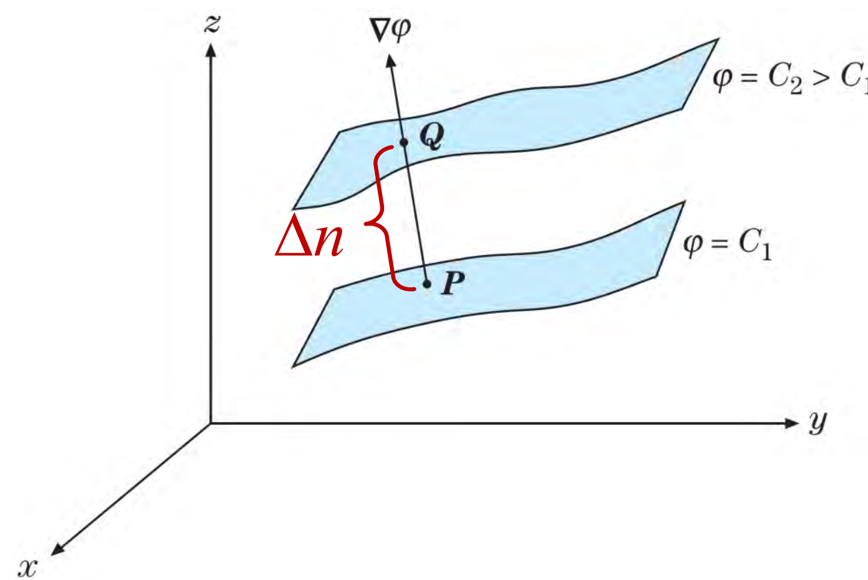
- **梯度积分的基本定理**

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \nabla\varphi \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) \quad \Longrightarrow \quad \oint_C \nabla\varphi \cdot d\vec{l} = 0$$

（与路径无关）

如果 P 点处 $\nabla\varphi=0$，则 P 为驻值点：$d\varphi(P)=0$





$\nabla\varphi$ 垂直于 φ 的等值面/线指向 φ 增加最快方向（设为 $\boldsymbol{n}$），

大小则是沿着方向的变化率

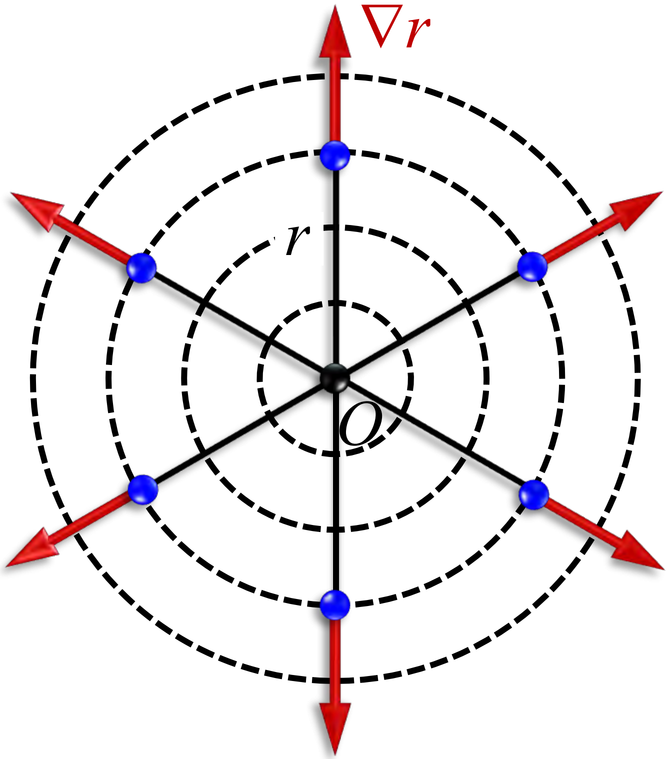
$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\hat{n}$$

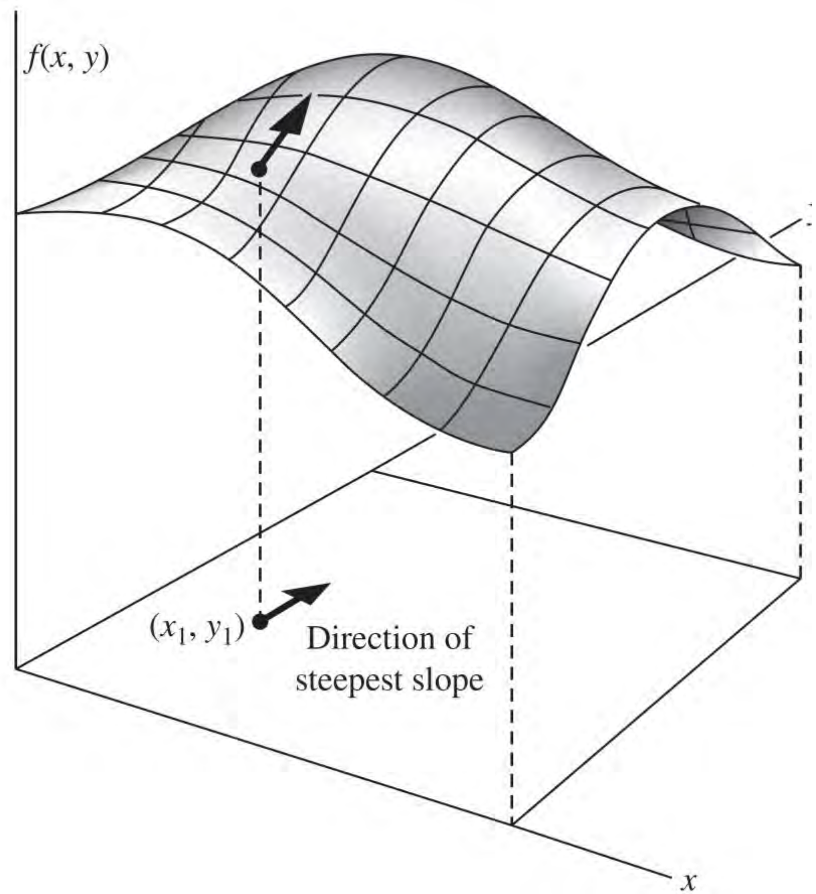
【例】径向距离$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的梯度。

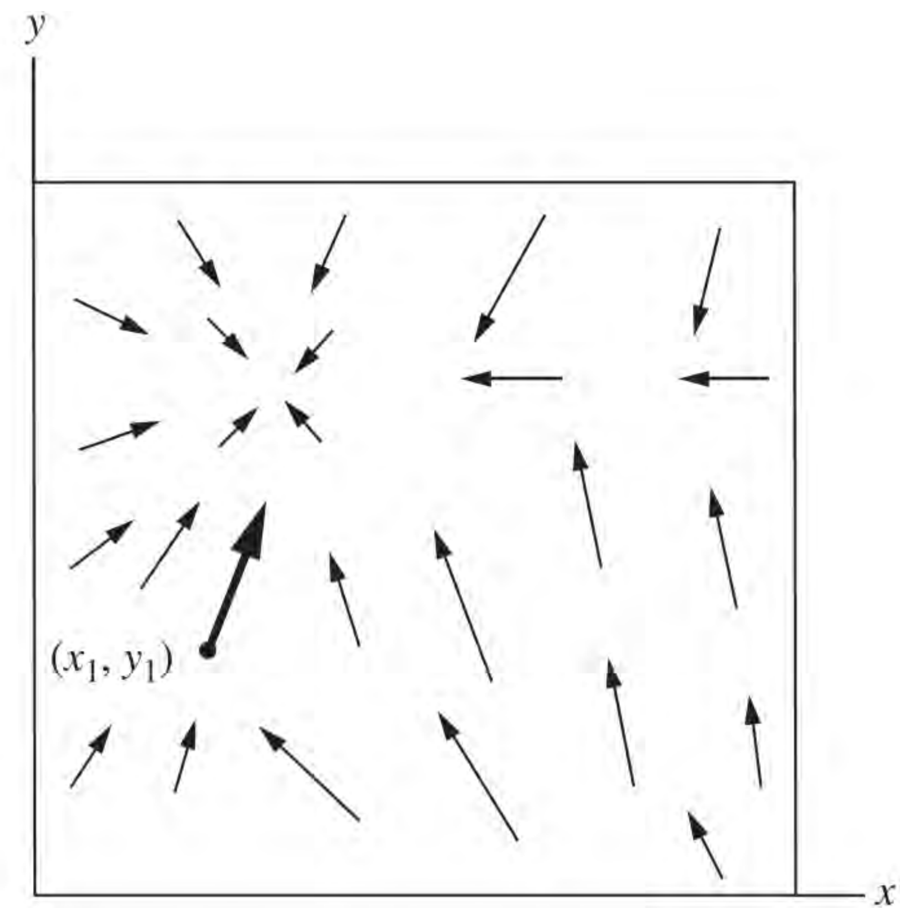
【解】 $$\nabla r=\frac{\partial r}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial r}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial r}{\partial z}\hat{z}=\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{r}=\frac{\vec{r}}{r}$$

或者 $$\nabla r=\frac{\partial r}{\partial r}\hat{r}=1\cdot\hat{r}$$

$\Rightarrow$ $\nabla r=\hat{r}$




$f(x, y)$
(x_1, y_1)
Direction of steepest slope
x


y
(x_1, y_1)
x

三、梯度算子

- 定义**梯度算子**

$$\nabla \triangleq \hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

- 性质:
  - **It looks like a vector.**
  - **It works like a vector.**
  - **It's an operator.**

$$\vec{A}\varphi=\varphi A_x\hat{x}+\varphi A_y\hat{y}+\varphi A_z\hat{z}=\varphi\vec{A}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{F}=A_xF_x+A_yF_y+A_zF_z=\vec{F}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{A}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=-\vec{F}\times\vec{A}$$

- ∇ 可以作用于标量及矢量函数上
  - 作用于标量函数：梯度 $\nabla\varphi \rightarrow$ 矢量
  - 点乘作用于矢量函数：散度 $\nabla\cdot\vec{F} \rightarrow$ 标量
  - 叉乘作用于矢量函数：旋度 $\nabla\times\vec{F} \rightarrow$ 矢量

$$\nabla\varphi\neq\varphi\nabla$$

$$\nabla\cdot\vec{F}\neq\vec{F}\cdot\nabla$$

$$\nabla\times\vec{F}\neq-\vec{F}\times\nabla$$

四、矢量场的散度

- 矢量场 $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$ 的**散度**定义为

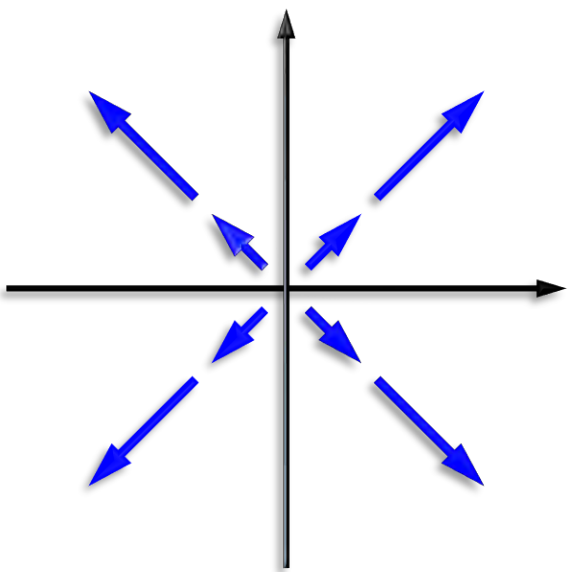
$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} \triangleq \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

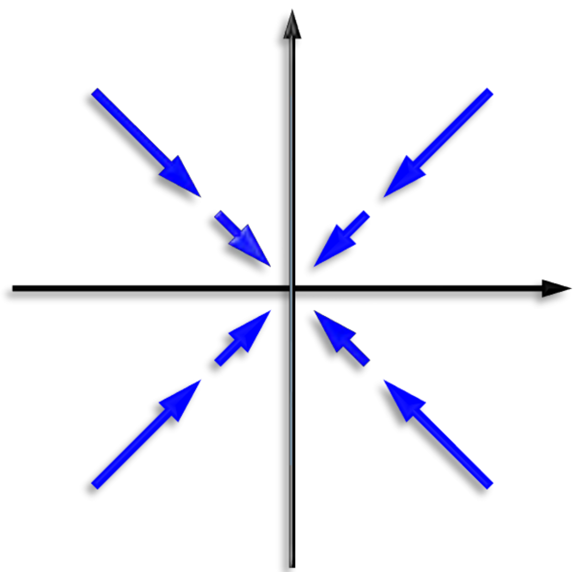
$$\partial_x \triangleq \frac{\partial}{\partial x},\quad \partial_y \triangleq \frac{\partial}{\partial y},\quad \partial_z \triangleq \frac{\partial}{\partial z}$$

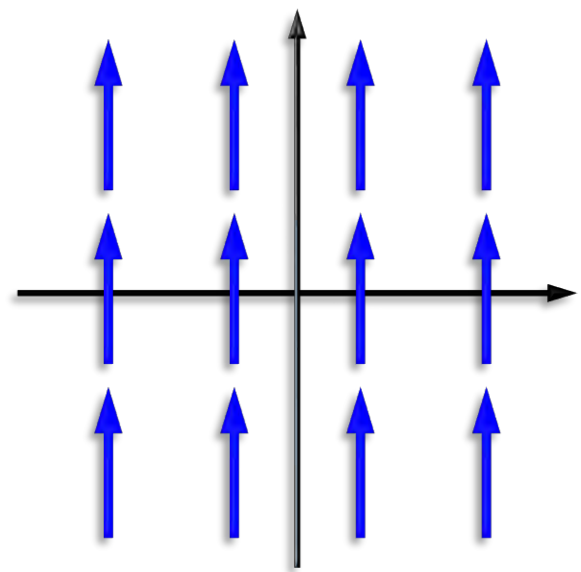
- 矢量场的散度是一个标量场。

- 几何意义：散度(divergence) 量度矢量 $\vec{F}(\vec{r})$ 在 r 点附近是否发散或汇聚

$\vec{F} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ $\vec{F} = -x\hat{x} - y\hat{y} - z\hat{z}$ $\vec{F} = \hat{y}$



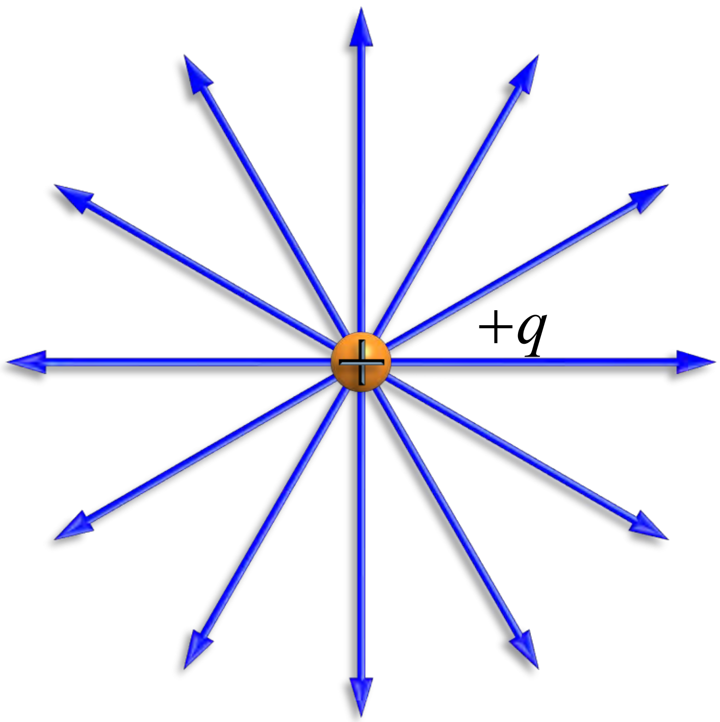


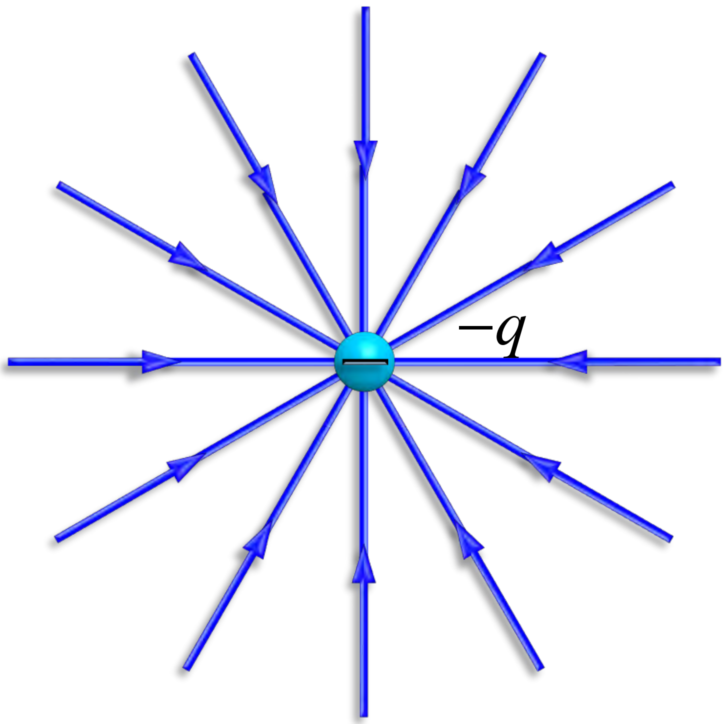


$\nabla \cdot \vec{F} = +3 > 0$ $\nabla \cdot \vec{F} = -3 < 0$ $\nabla \cdot \vec{F} = 0$

（源） （汇） （无源）

有源





$$\nabla \cdot \vec{E} > 0$$

（正电荷为源）

$$\nabla \cdot \vec{E} < 0$$

（负电荷为源）

静电场是有源场

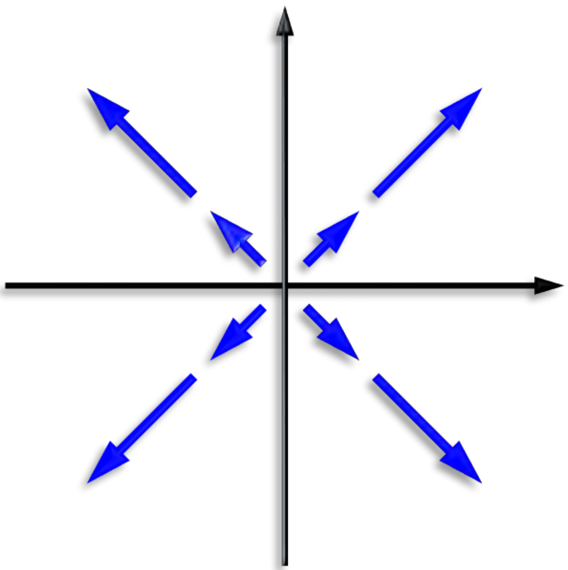
五、矢量场的旋度

- 矢量场 $\vec{F}(\vec{r})=\vec{F}(x,y,z)=F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z}$ 的**旋度**定义为

$$\mathrm{curl}\,\vec{F}=\nabla\times\vec{F}\triangleq\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}\quad \text{or}\quad \begin{cases}\left(\nabla\times\vec{F}\right)_x=\partial_y F_z-\partial_z F_y\\ \left(\nabla\times\vec{F}\right)_y=\partial_z F_x-\partial_x F_z\\ \left(\nabla\times\vec{F}\right)_z=\partial_x F_y-\partial_y F_x\end{cases}$$

- 矢量场的旋度仍然是一个矢量场。
- 几何意义：旋度量度矢量 $\vec{F}(\vec{r})$ 在 $\boldsymbol{r}$ 点附近是否旋转

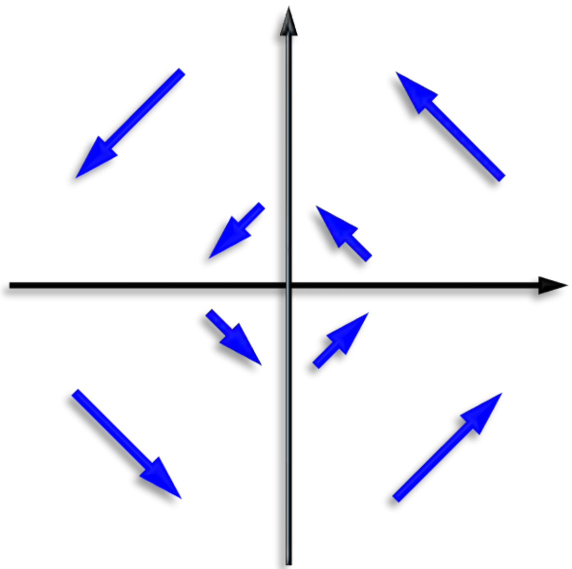
$$\vec{F} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$



$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

(无旋)

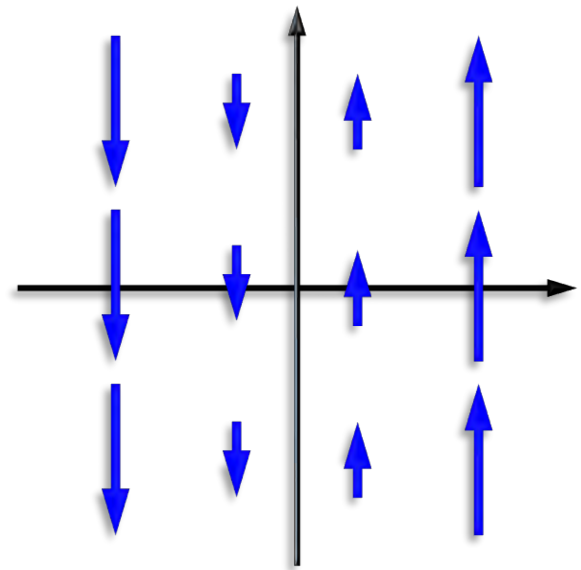
$$\vec{F} = -y\hat{x} + x\hat{y}$$



$$\nabla \times \vec{F} = 2\hat{z}$$

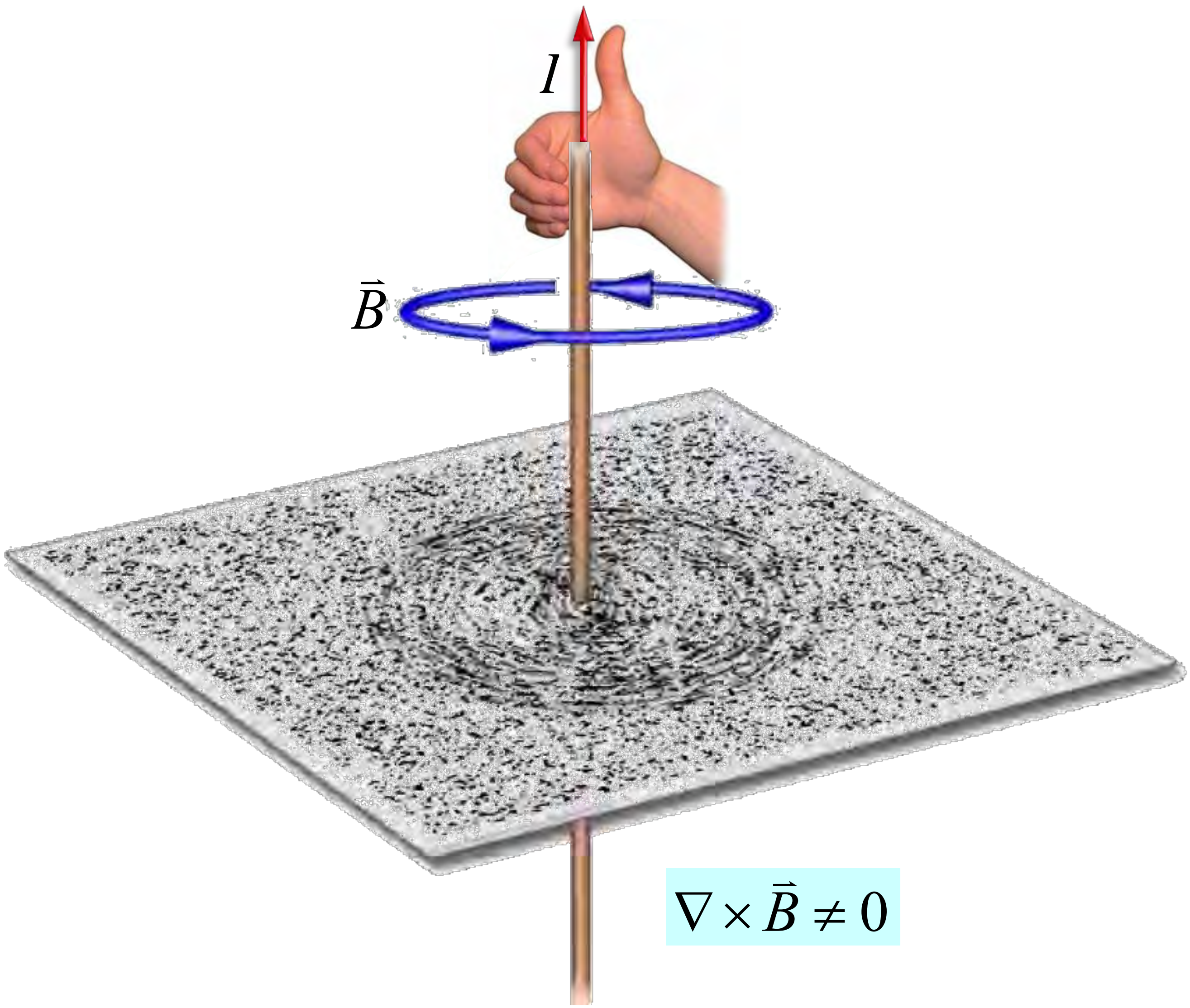
(有旋)

$$\vec{F} = x\hat{y}$$



$$\nabla \times \vec{F} = \hat{z}$$

(有旋)



静磁场是有旋场

小结

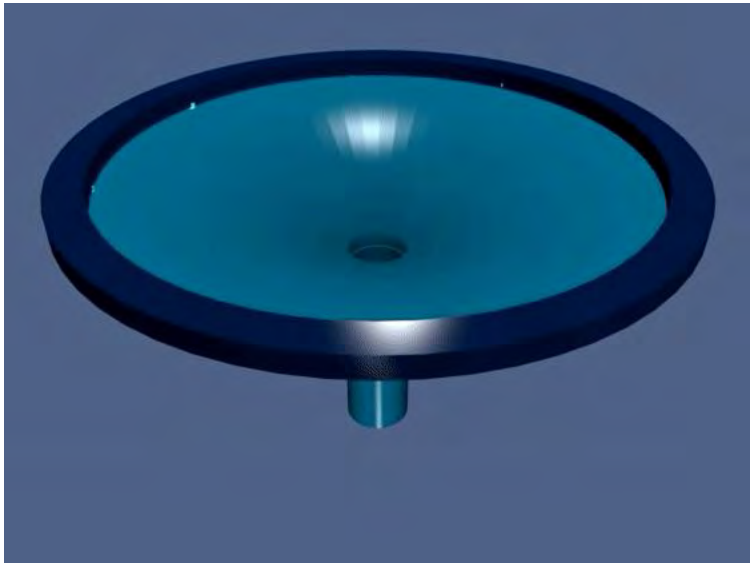
梯度算子 $\nabla \triangleq \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

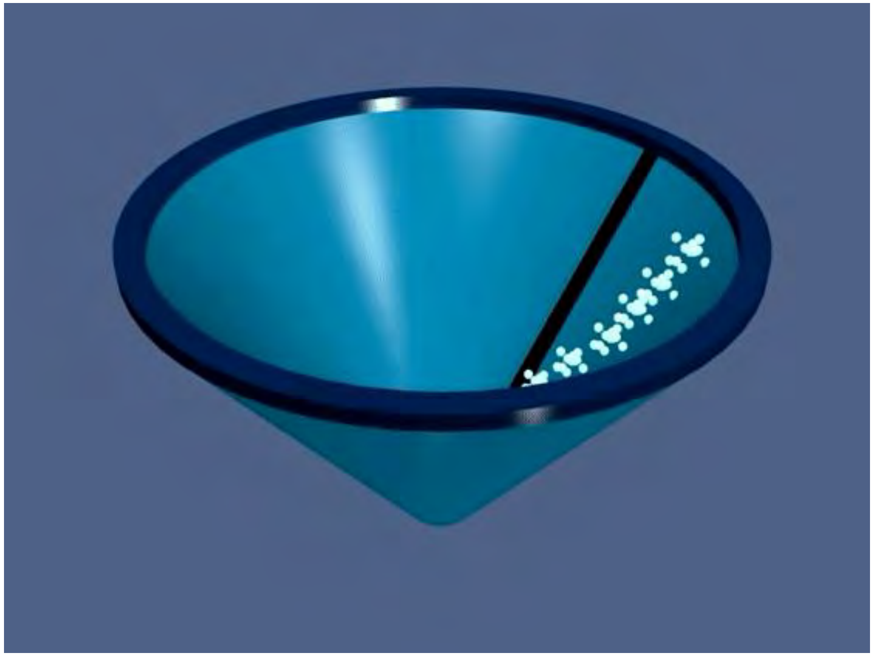
- **梯度(矢量场)**： $\nabla\varphi \triangleq \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$

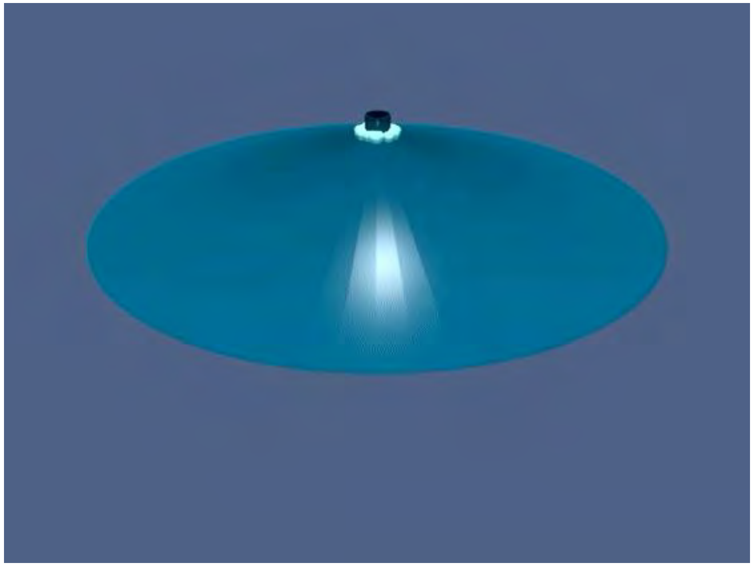
- **散度(标量场)**： $\nabla\cdot F \triangleq \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

- **旋度(矢量场)**： $\nabla\times\vec{F} \triangleq \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \hat{x}\left(\partial_y F_z - \partial_z F_y\right) \\ +\hat{y}\left(\partial_z F_x - \partial_x F_z\right) \\ +\hat{z}\left(\partial_x F_y - \partial_y F_x\right) \end{array}$

§0.3 矢量场的积分







水流的源与汇

- 穿过闭曲面 S 的**水流通量** Φ_v：

  单位时间从闭曲面 S 流出去的水的体积

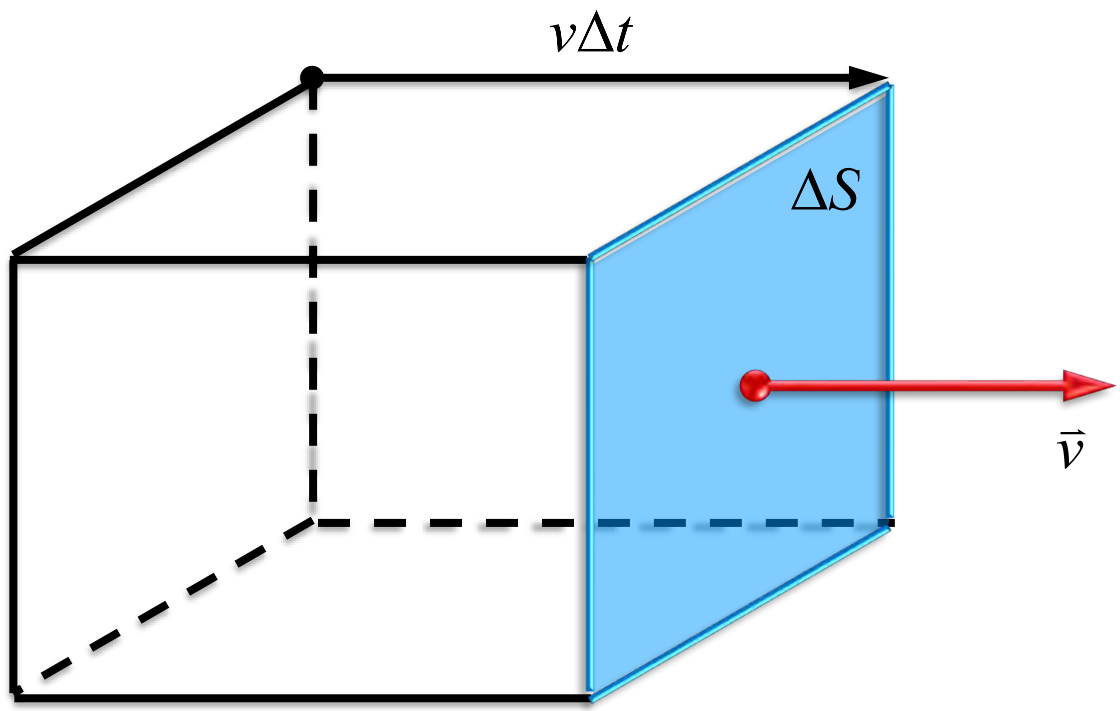
  - $\Phi_v > 0$：S 内存在水流的源

    $\Phi_v < 0$：S 内存在水流的汇

- **如何计算** Φ_v？

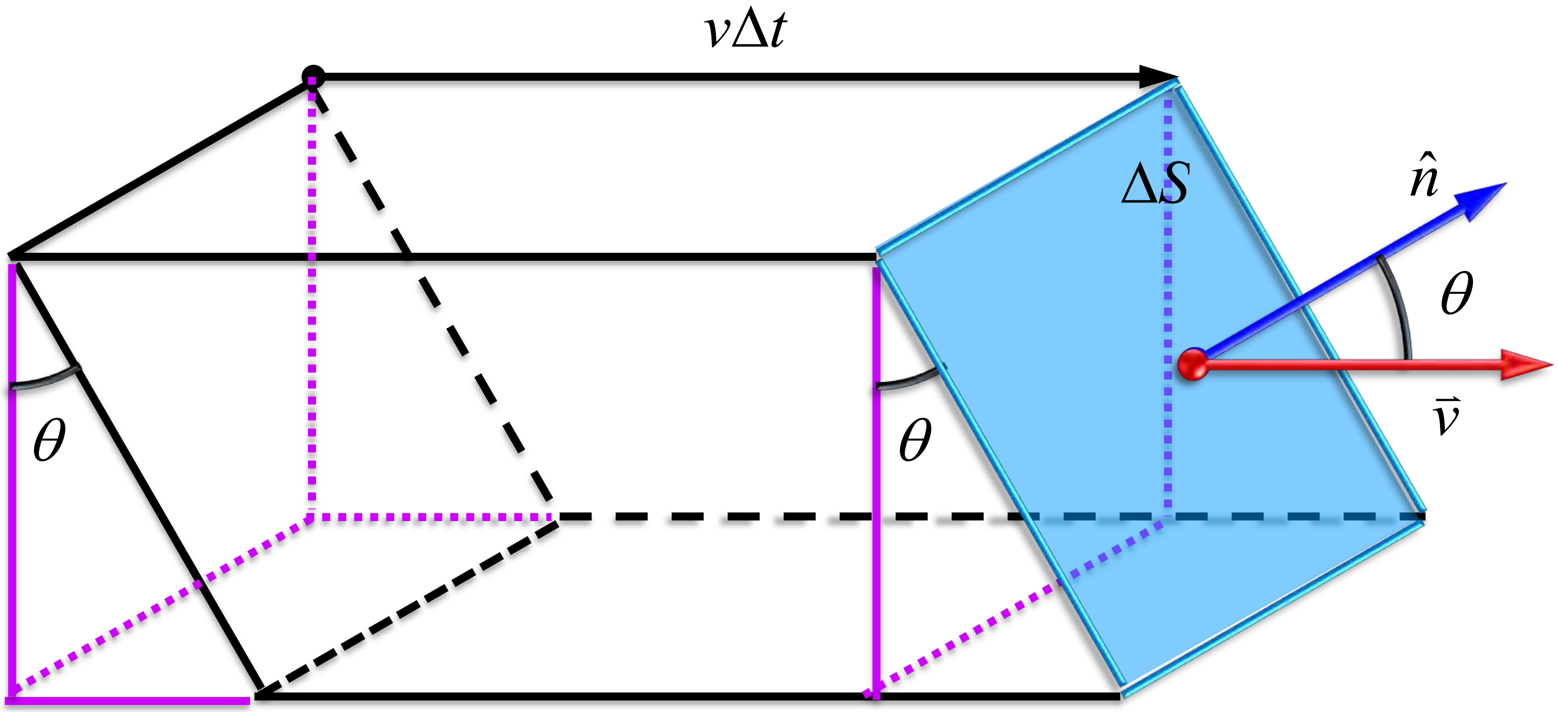
  等于从每一个面元流出去的水量的代数和

  - 对于闭曲面，以外法向为面元方向



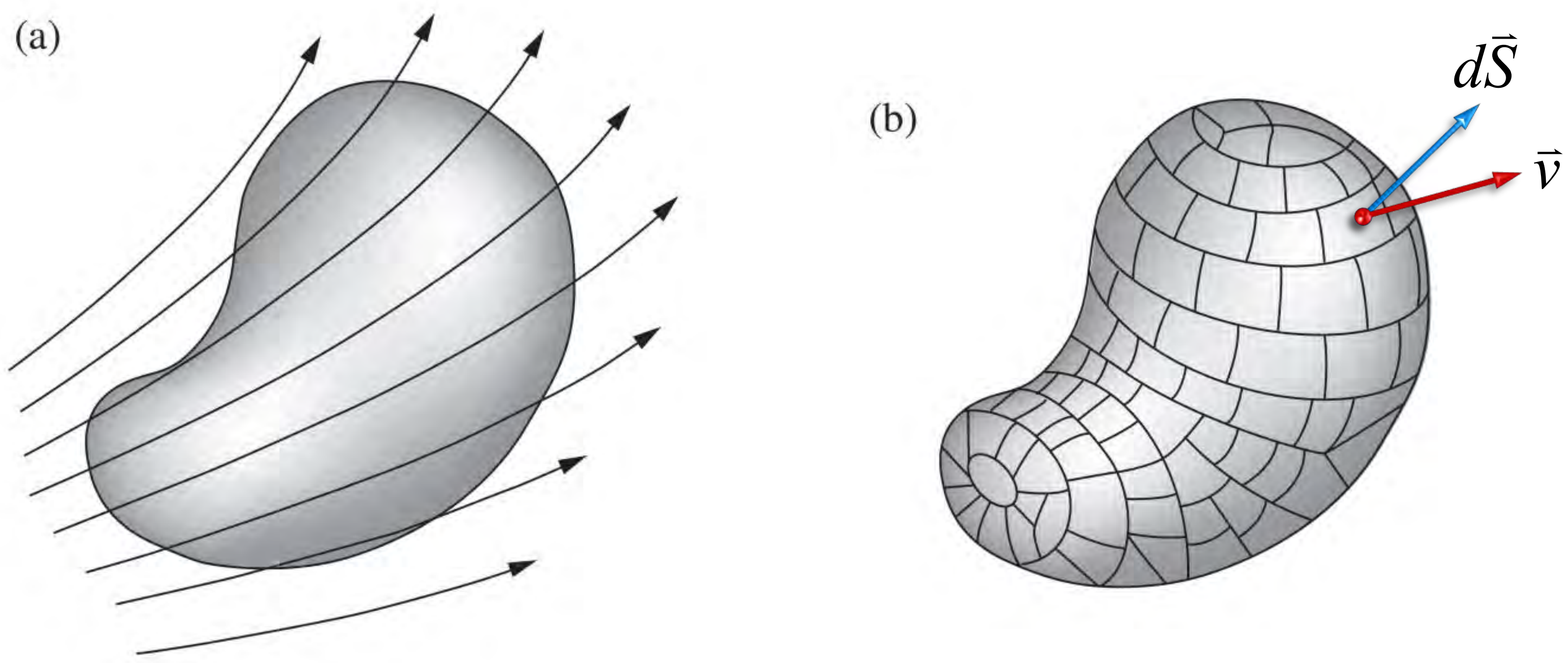
单位时间内通过面元 ΔS 的水量为

$$\frac{v\Delta t\Delta S}{\Delta t}=v\Delta S$$



单位时间内通过面元 ΔS 的水量为

$$\frac{v\Delta t\Delta S\cos\theta}{\Delta t}=v\Delta S\cos\theta=\vec{v}\cdot\Delta\vec{S}$$



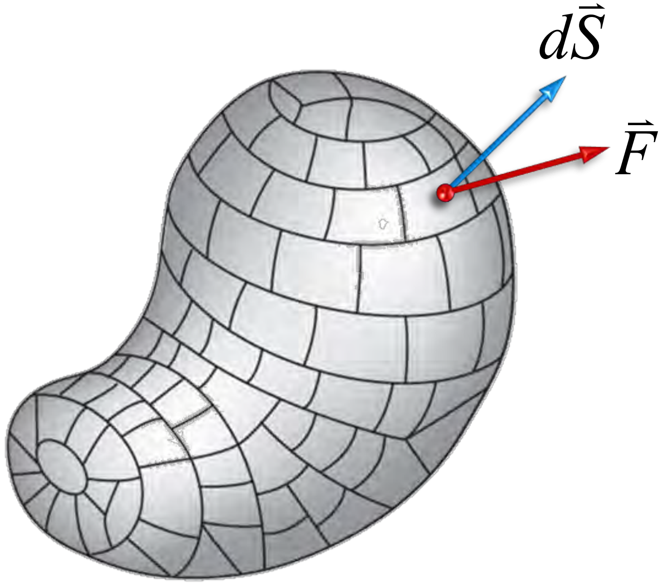
穿过闭曲面 S 的**水流通量**：

$$\Phi_v = \lim_{\Delta S \to 0} \sum \vec{v} \cdot \Delta\vec{S} = \oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

一、矢量场的通量

矢量场 $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ 穿过闭曲面 **S** 的**通量**定义为

$$\Phi_F \triangleq \oint\!\!\!\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$



- 闭曲面以外法向为正方向
- 物理含义：

  $\Phi_F>0$： S 内有 F 的**源；**

  $\Phi_F<0$： S 内有 F 的**汇。**

- 若对**任意**闭曲面均有 $\Phi_F = 0$，则称 $\boldsymbol{F}$ 为**无源场**

  只要**存在一个**闭曲面使得 $\Phi_F\neq 0$，则称 $\boldsymbol{F}$ 为**有源场**

【例】穿过小的长方体边界的通量。

【解】（1）穿过前后两个面的通量

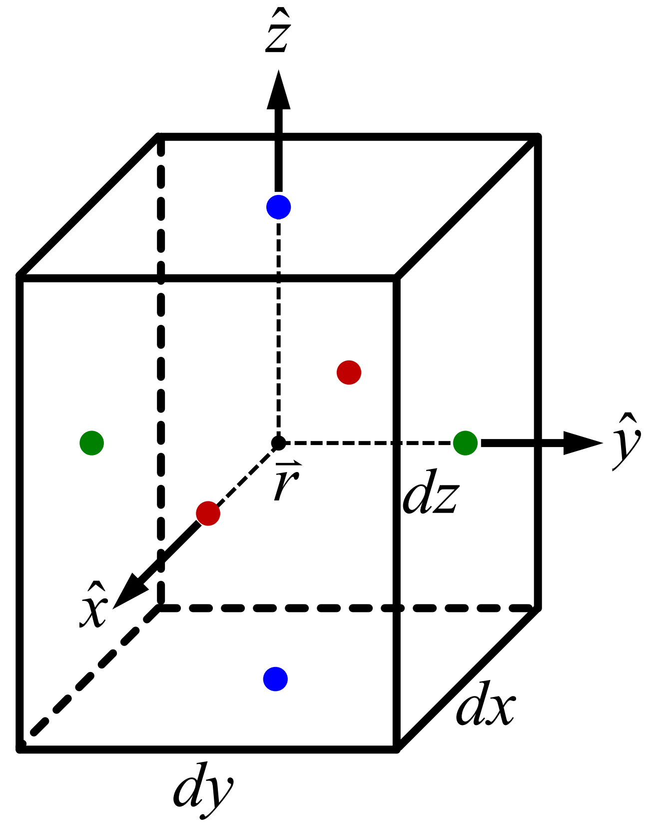
$$\left[F_x(x+\frac{1}{2}dx,y,z)-F_x(x-\frac{1}{2}dx,y,z)\right]dydz$$

（2）穿过左右两个面的通量

$$\left[F_y(x,y+\frac{1}{2}dy,z)-F_y(x,y-\frac{1}{2}dy,z)\right]dzdx$$

（3）穿过上下两个面的通量

$$\left[F_z(x,y,z+\frac{1}{2}dz)-F_z(x,y,z-\frac{1}{2}dz)\right]dxdy$$



$$\Longrightarrow \oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)dxdydz$$

二、矢量场的散度

矢量场 $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ 的**散度**定义为

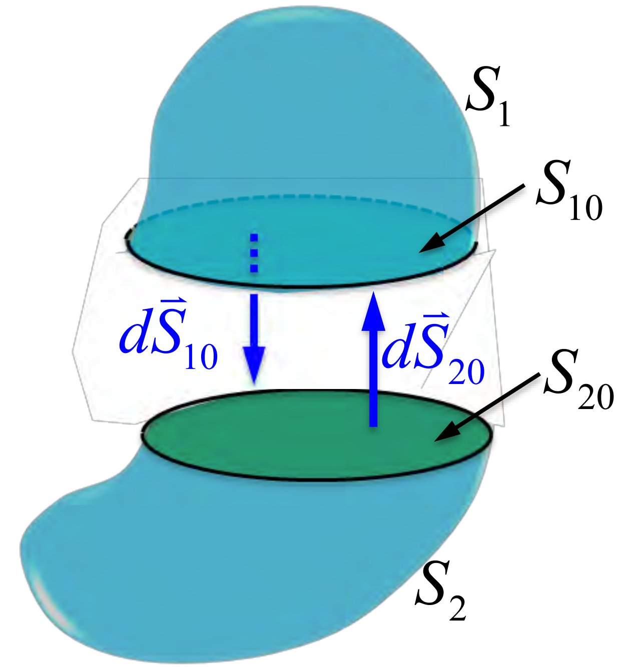
$$\nabla\cdot\vec{F}\triangleq\lim_{V\to 0}\left[\frac{1}{V}\oiint_{S=\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S}\right]$$

- 若 $\boldsymbol{F}$ 在某点的散度不为零，则 $\boldsymbol{F}$ 由该点发射或汇聚
- 若 $\boldsymbol{F}$ 的散度处处为零，则 $\boldsymbol{F}$ 为**无源场**
- 散度在直角坐标系下的表达式

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

将 S 所围区域切割为边界分别为 S_1 和 S_1 的两个区域

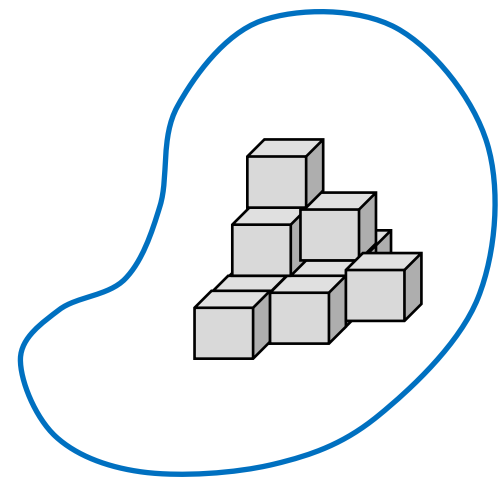
$$
\begin{aligned}
\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \oiint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \iint_{S_{10}} \vec{F}\cdot d\vec{S} \\
&\quad + \oiint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \iint_{S_{20}} \vec{F}\cdot d\vec{S} \\
&= \oiint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \oiint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S}
\end{aligned}
$$



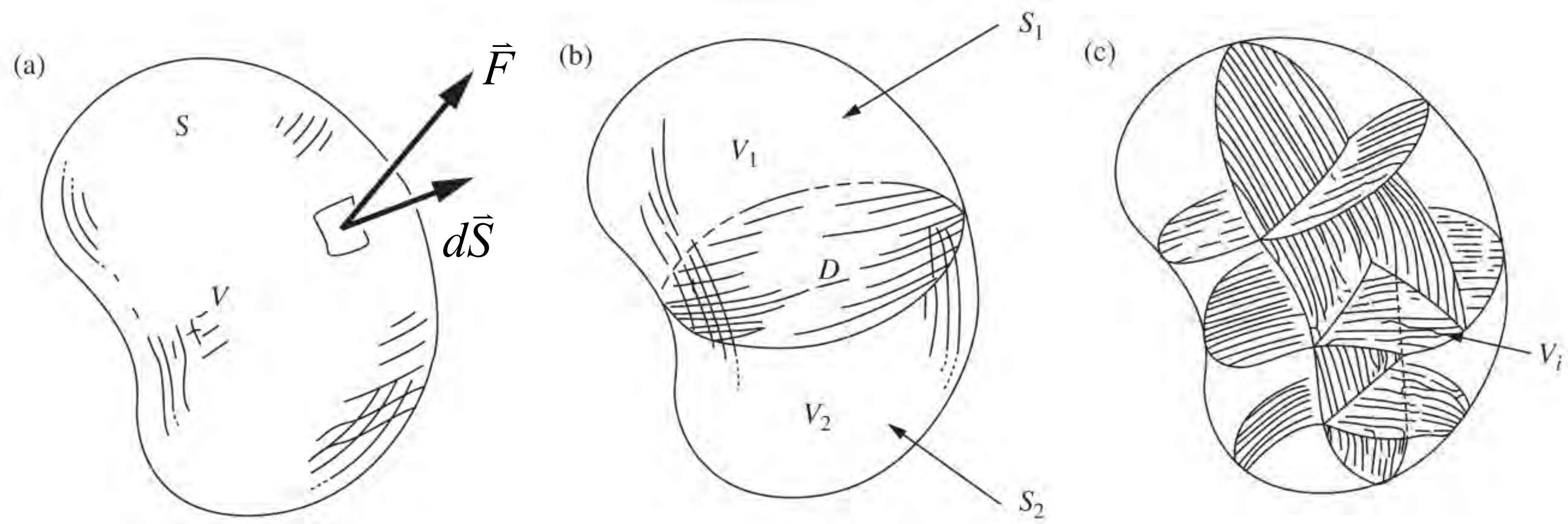
$$\Rightarrow \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

将 S 所围区域切割成更多的小块，则有

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i = \sum_{i=1}^{N} \oiint_{S_i} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} V_i \frac{\oiint_{S_i} \vec{F}\cdot d\vec{S}}{V_i}$$



三、高斯（Gauss）定理



散度积分的基本定理—— **高斯定理**

$$\oiint_{S=\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

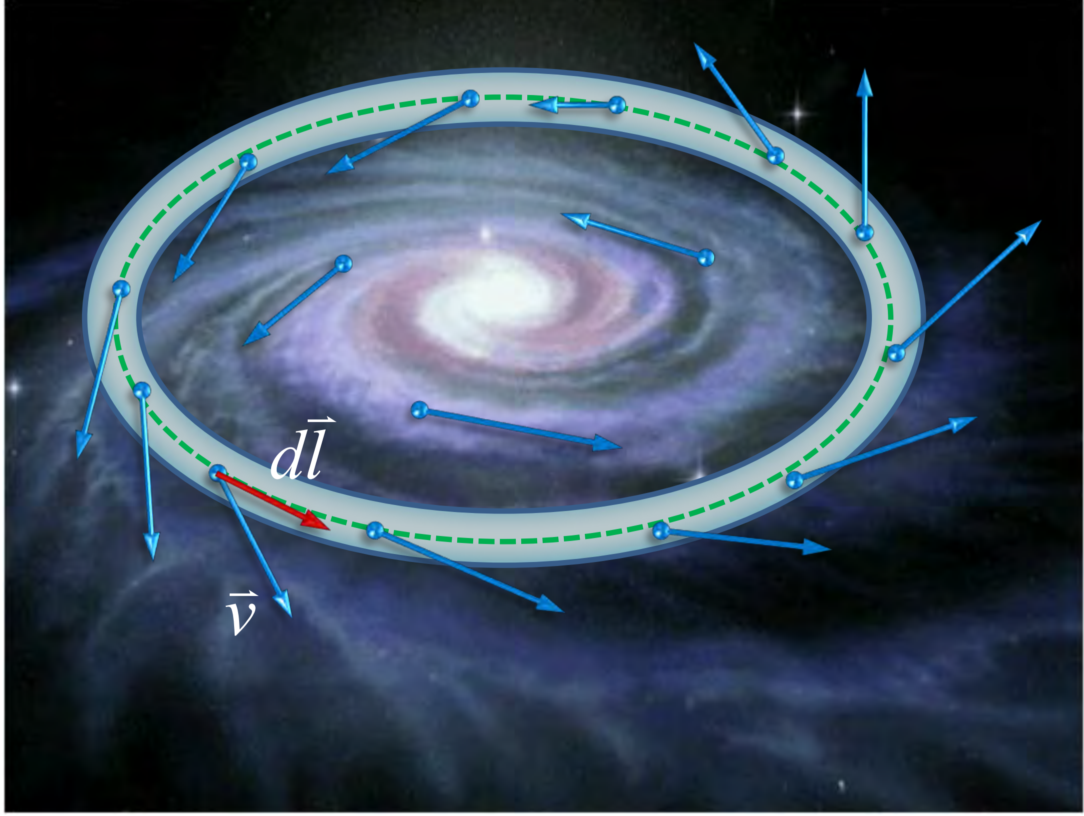
水流的涡旋

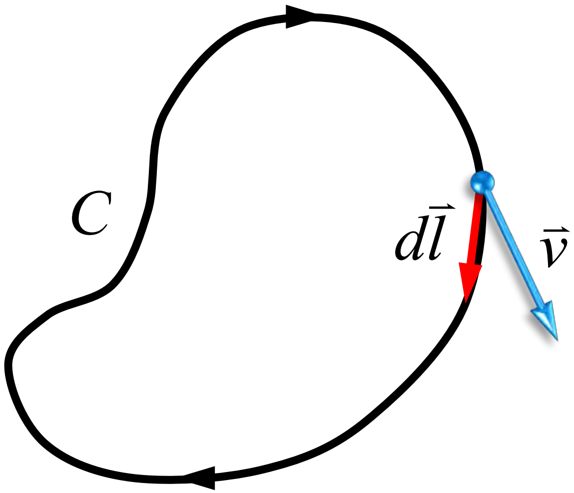
- 水流速度场的**环量**：

$$\Gamma_v \triangleq \lim_{\Delta l \to 0} \sum \vec{v} \cdot \Delta \vec{l}$$

$$= \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

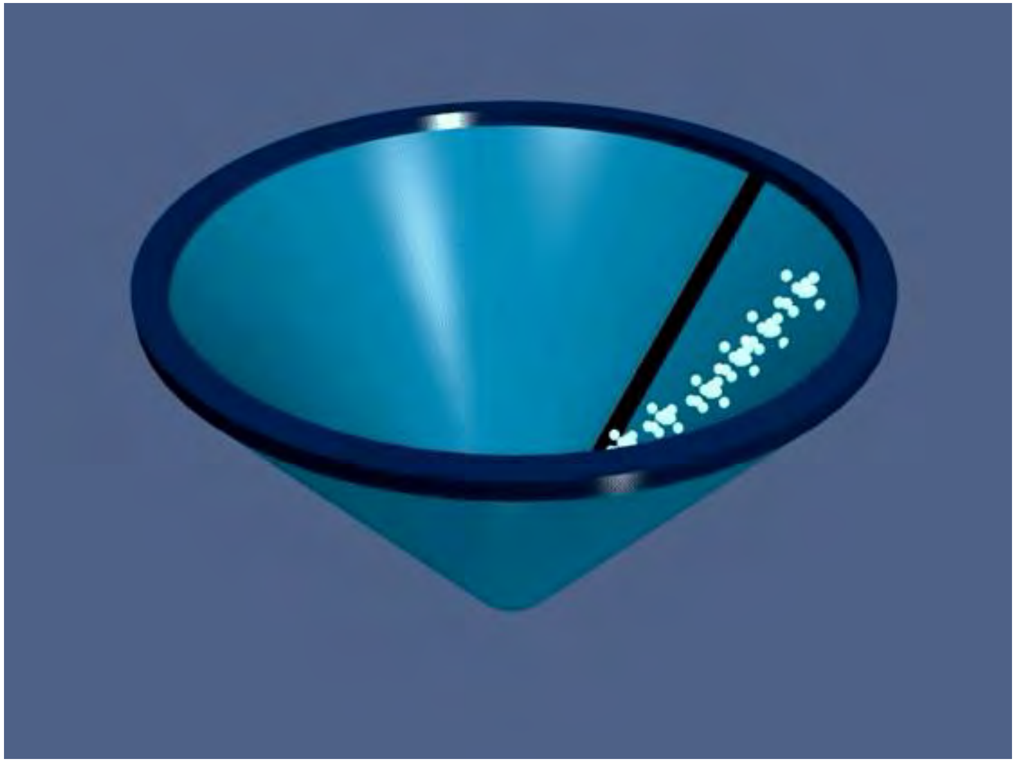
$$= \oint_C v \cos\theta \, dl$$





【例】 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

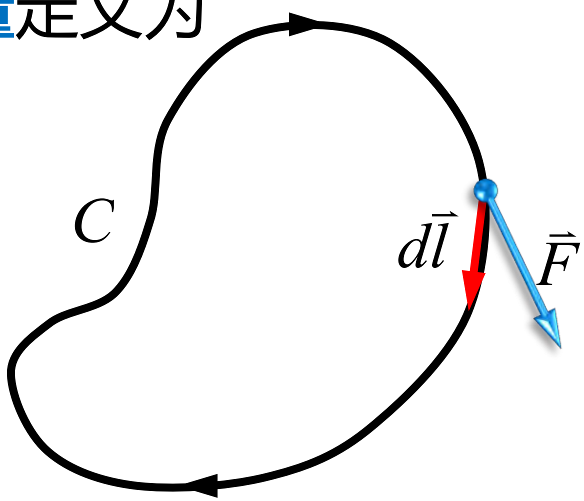
$$\Gamma_v = v \cdot 2\pi R = 2\pi\omega R^2$$



四、矢量场的环量

矢量场 $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ 绕闭曲线 C 的**环量**定义为

$$\Gamma_F \triangleq \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}$$



- 任意约定闭曲线的绕行方向为正，
  绕行方向决定了线元的方向

- $\Gamma_F > 0$：在 C 上 $\boldsymbol{F}$ 的转动与 C 的绕行方向一致

- 若对**任意**闭曲线均有 $\Gamma_F = 0$，则称 $\boldsymbol{F}$ 为**无旋场**
  只要**存在一条**闭曲线使得 $\Gamma_F \neq 0$，则称 $\boldsymbol{F}$ 为**有旋场**

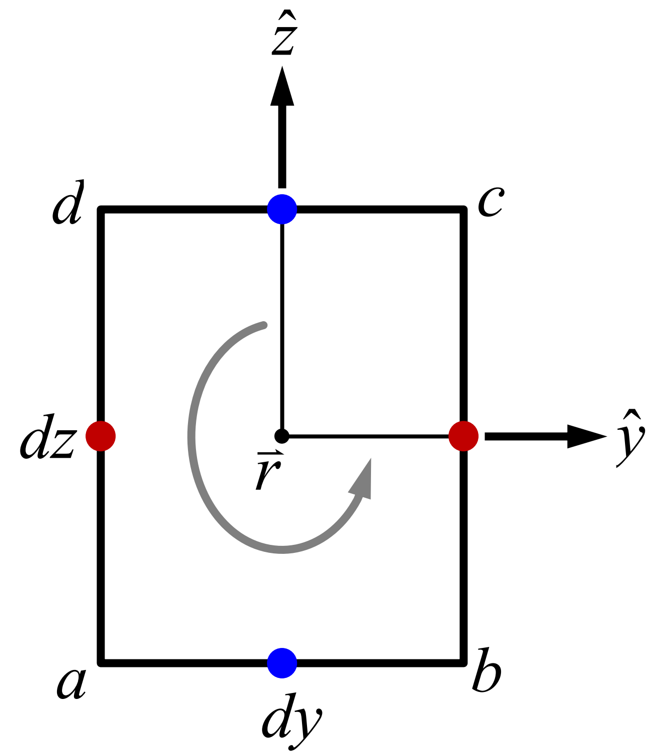
【例】绕小的长方形边界的环量。

【解】 （1）左右两边对环量的贡献

$$\left[F_z(x,y+\frac{1}{2}dy,z)-F_z(x,y-\frac{1}{2}dy,z)\right]dz$$

（2）上下两边对环量的贡献

$$\left[F_y(x,y,z-\frac{1}{2}dz)-F_y(x,y,z+\frac{1}{2}dz)\right]dy$$



$$\Longrightarrow \oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)dydz$$

对于一般的无限小的闭曲线：

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dxdy$$

五、矢量场的旋度

矢量场 $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ 的**旋度（在 n 方向投影）**定义为

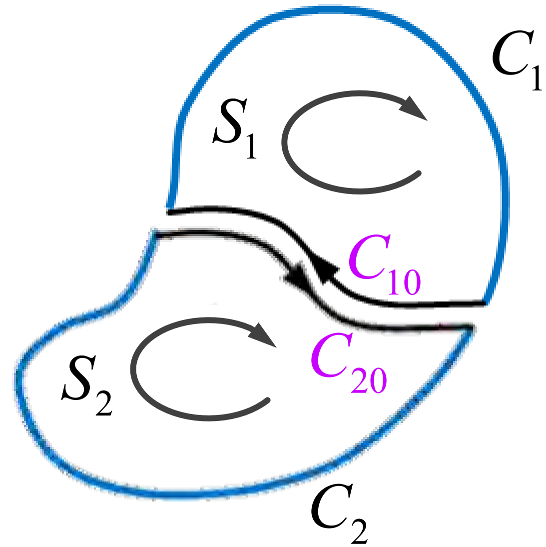
$$\hat{n}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)\triangleq\lim_{S\to 0}\left[\frac{1}{S}\oint_{C=\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{l}\right]$$

- 若 $\boldsymbol{F}$ 在某点的旋度不为零，则 $\boldsymbol{F}$ 在该点附近有涡旋
- 若 $\boldsymbol{F}$ 的旋度处处为零，则 $\boldsymbol{F}$ 为**无旋场**
- 旋度在直角坐标系下的表达式

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

将 C 所围区域切割为边界分别为 C_1 和 C_1 的两个区域

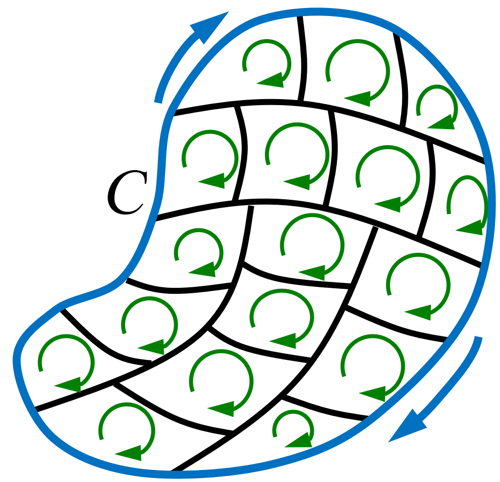
$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = \oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{l} - \int_{C_{10}} \vec{F}\cdot d\vec{l} + \oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} - \int_{C_{20}} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{l} + \oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$



$$\Rightarrow \quad \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

将 C 所围区域切割成更多的小块，则有

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i = \sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} S_i \frac{\oint_{C_i} \vec{F}\cdot d\vec{l}}{S_i}$$

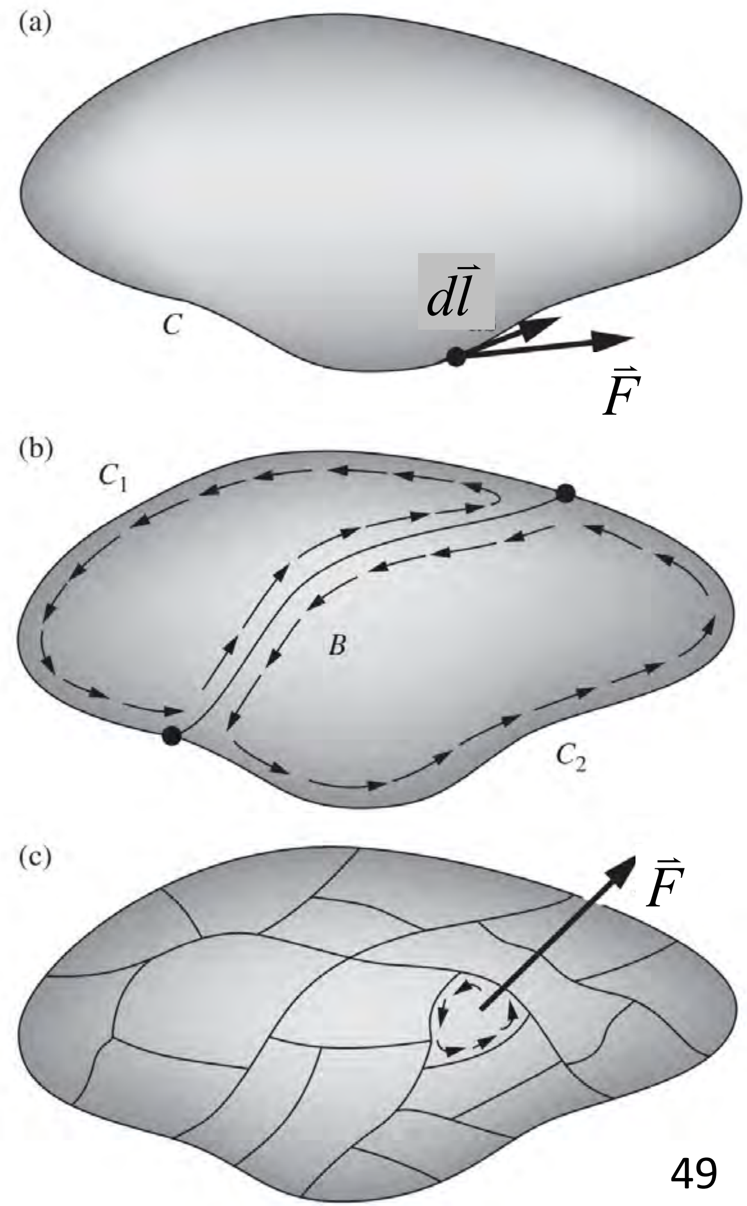


六、斯托克斯（Stokes）定理

散度积分的基本定理

—— **Stokes定理**

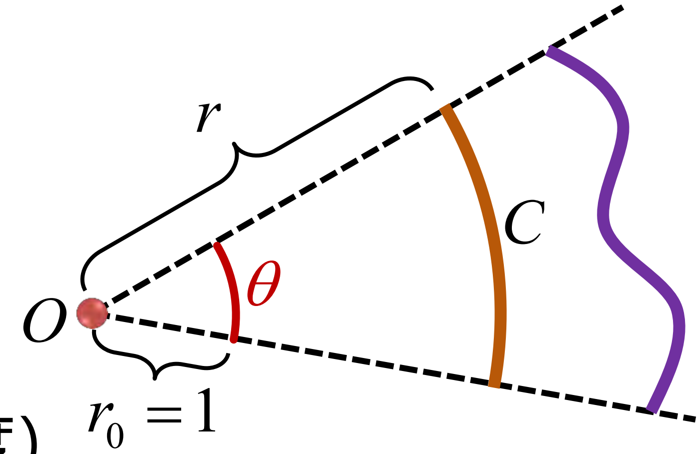
$$\oint_{C=\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \iint_{S} (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$$



§0.4 平面角与立体角

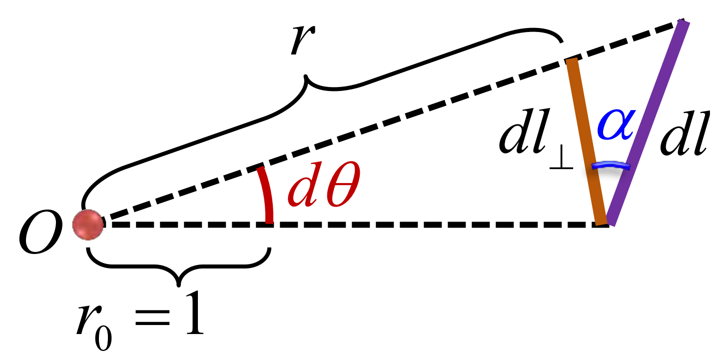
一、平面角

曲线相对于 O 点所张平面角，数值上等于相应的单位半径圆弧的长度



$$\theta \triangleq \frac{s}{r} = \frac{s_0}{r_0}$$

- **平面角元** （dl 相对于 O 点所张角度）

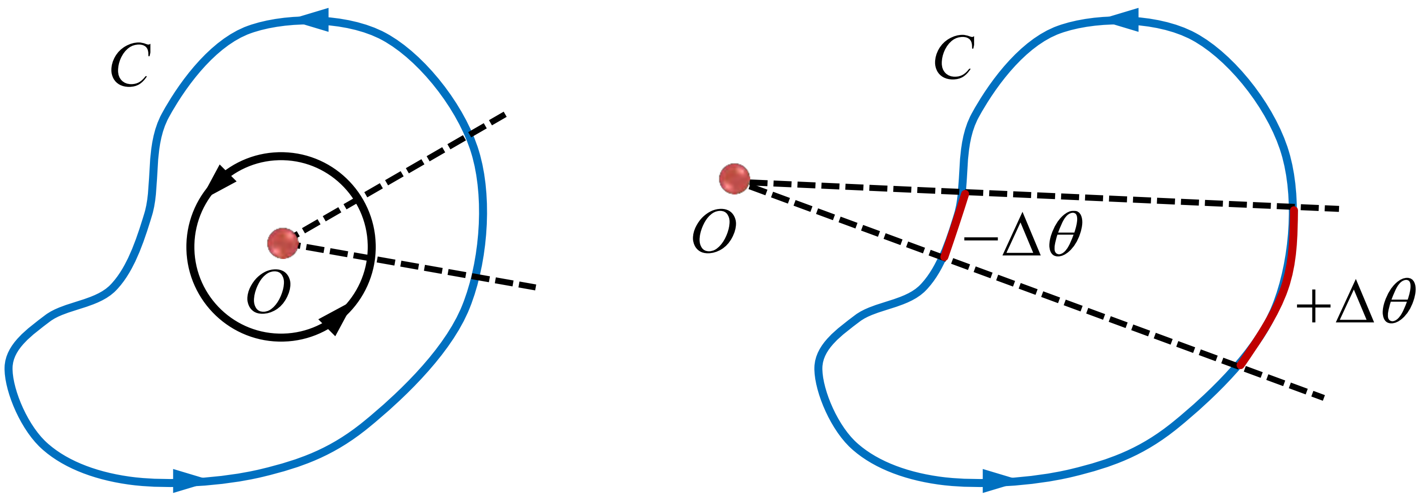


$$d\theta = \frac{dl_\perp}{r} = \frac{dl\cos\alpha}{r}$$

- 任一曲线 C 相对于 O 点所张角度

$$\theta = \int \frac{dl_\perp}{r} = \int \frac{dl\cos\alpha}{r}$$

若约定绕着 O 点逆时针转动为正



（1）闭曲线相对于内部一点所张平面角为 $\pm 2\pi$

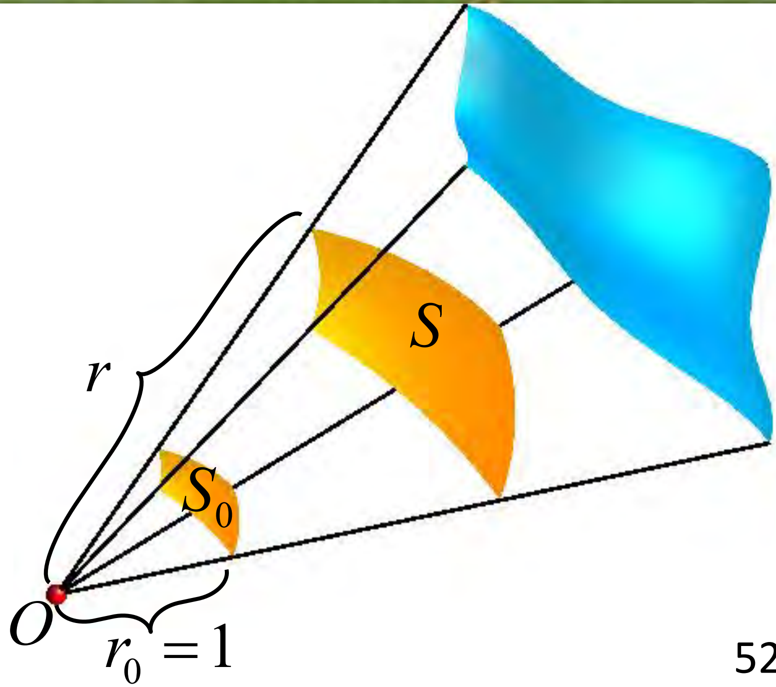
闭曲线相对于外部一点所张平面角为 0

（2）无限长直线相对于直线外一点所张平面角为 $\pm\pi$

二、立体角

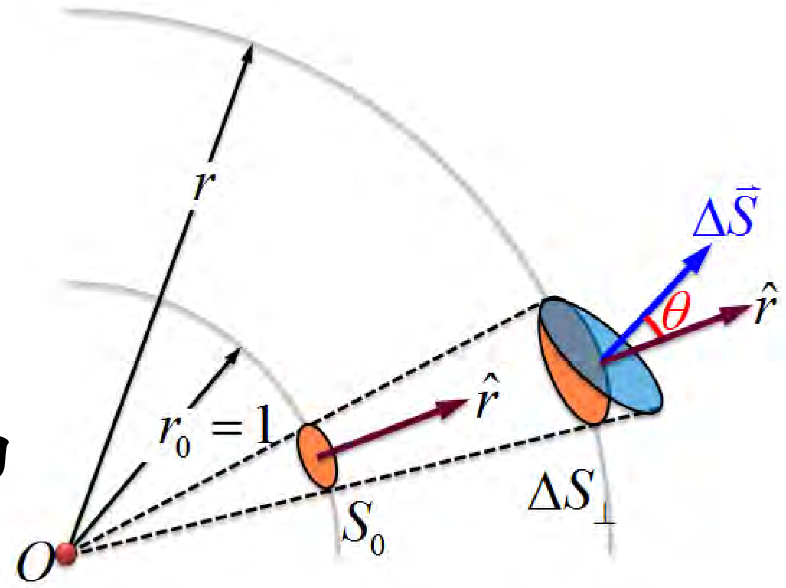
曲面相对于 O 点所张立体角，数值上等于相应的单位半径球面的面积

$$\Omega \triangleq \frac{S}{r^2} = \frac{S_0}{r_0^2}$$



- **立体角元**

$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{\hat{r}\cdot d\vec{S}}{r^2}$$



➢ 对于同一面元 **dS**，选取的法向不同，所得立体角相差一符号

- **任一曲面相对于 *O* 点所张立体角**

$$\Omega = \iint_S d\Omega = \iint_S \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \iint_S \frac{\hat{r}\cdot d\vec{S}}{r^2}$$

➢ 开曲面面元的法向选取可相差一符号

➢ 闭曲面总是以外法向作为面元正向

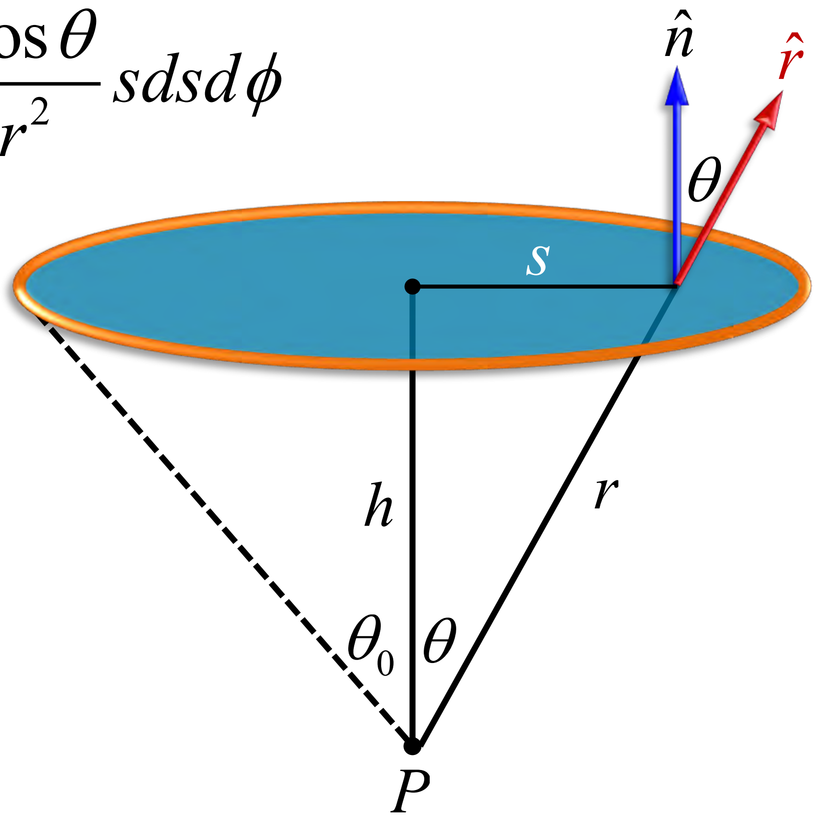
【例】试计算半径为 a 的圆盘相对于轴线上一点 P 所张的立体角，圆盘的法向取为向上的方向。已知 P 与圆盘距离为 h。

【解】

$$\Omega = \iint_S \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \iint_S \frac{\cos\theta}{r^2} s\,ds\,d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \frac{h s\,ds}{\left(s^2+h^2\right)^{3/2}}$$

$$= 2\pi\left[-\frac{h}{\sqrt{s^2+h^2}}\right]_0^a$$

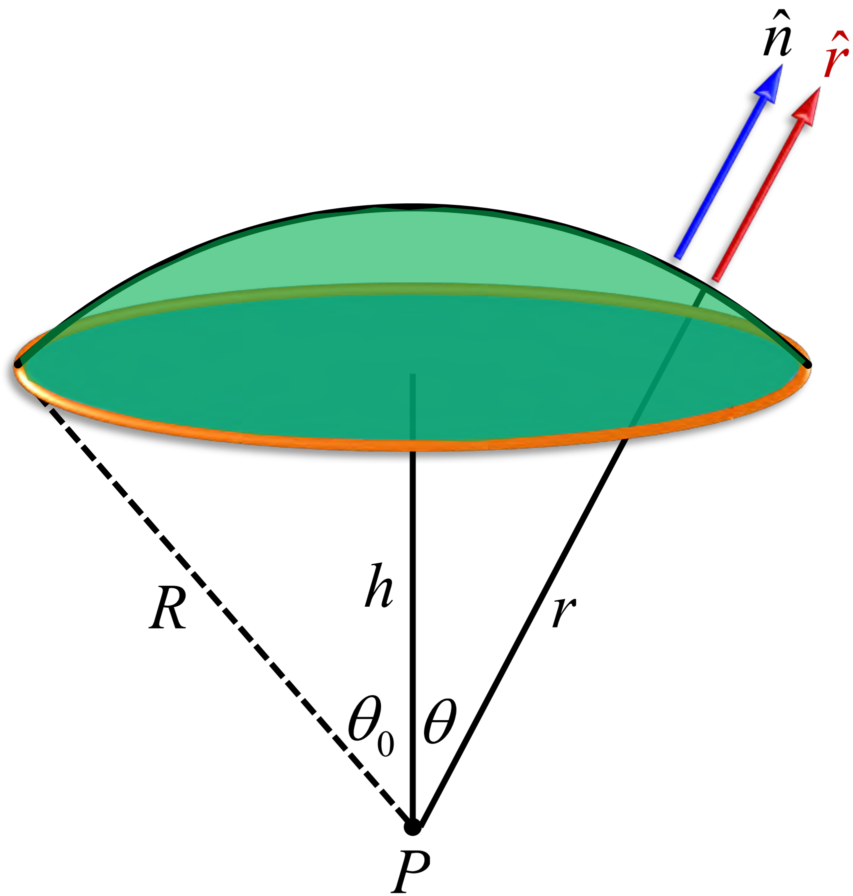


$$\Rightarrow \Omega = 2\pi\left(1-\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) = 2\pi\left(1-\cos\theta_0\right)$$

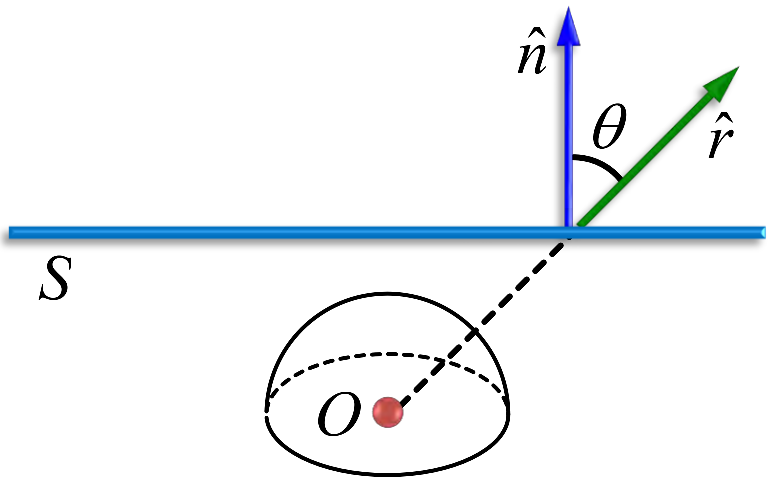
或者，由于圆盘与图示球冠相对于 P 点的立体角相同，因而

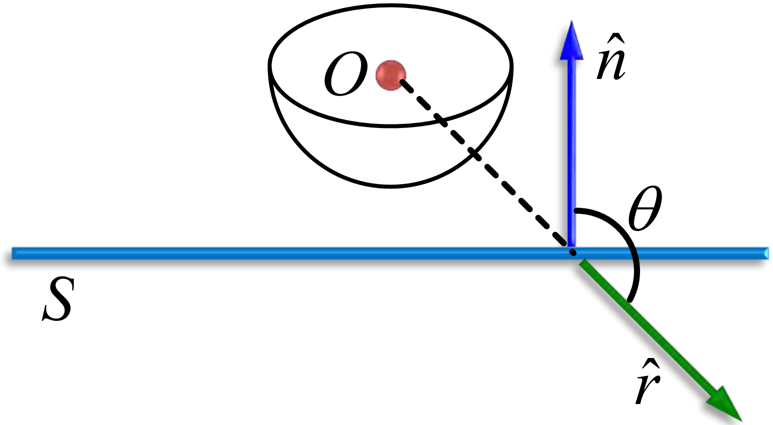
$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_0} \sin\theta d\theta$$

$$\Omega = 2\pi\left(1 - \cos\theta_0\right)$$



【例】无限大平面 S 的法向取向上方向，试计算 S 相对于其上方和下方某点所张的立体角。





【解】

$$\Omega = \begin{cases} +2\pi, & O\text{ 在 } S\text{ 下方} \\ -2\pi, & O\text{ 在 } S\text{ 上方} \end{cases}$$

- 此结论也适用于：

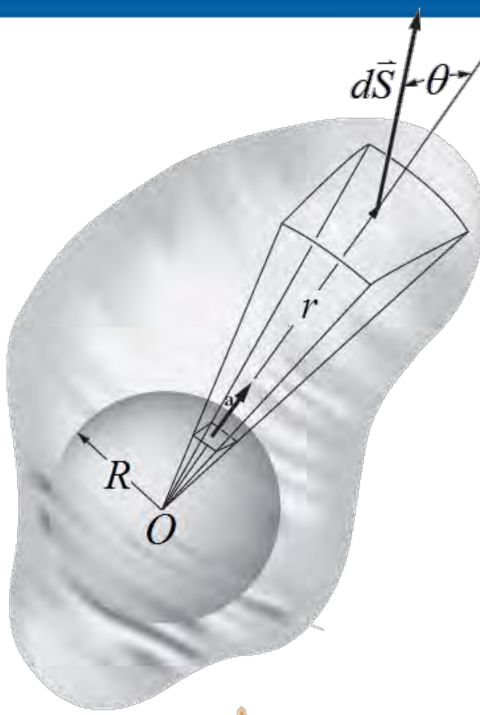
  圆盘相对于盘面两侧无限靠近的两个点的立体角

三、闭曲面所张立体角

- 闭合曲面相对于点 O 点所张的立体角

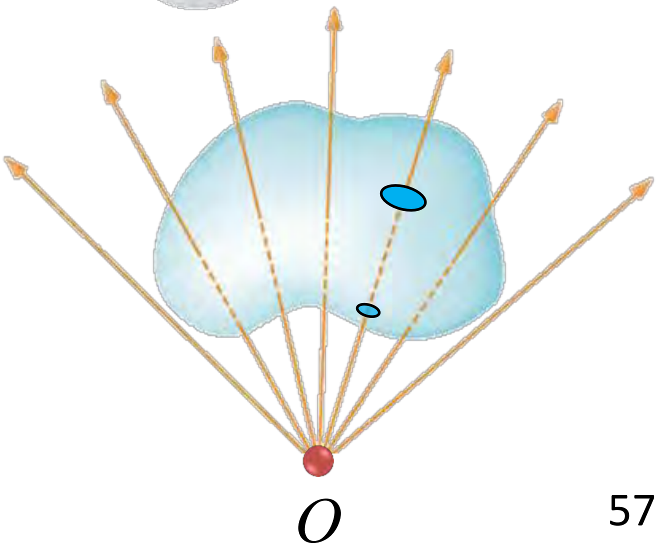
$$\Omega = \oiint_{S} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{S}$$

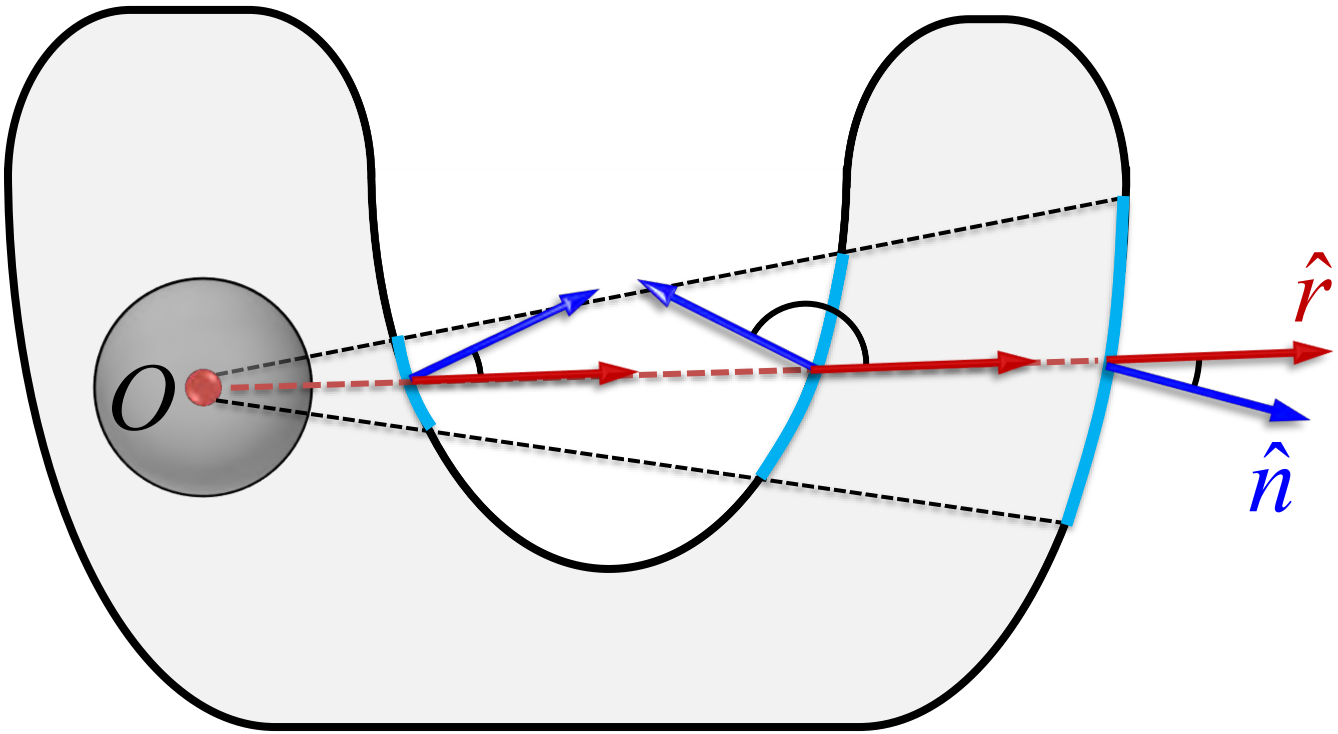
➢ Ω 等于 $\vec{A} = \hat{r}/r^2$ 的通量

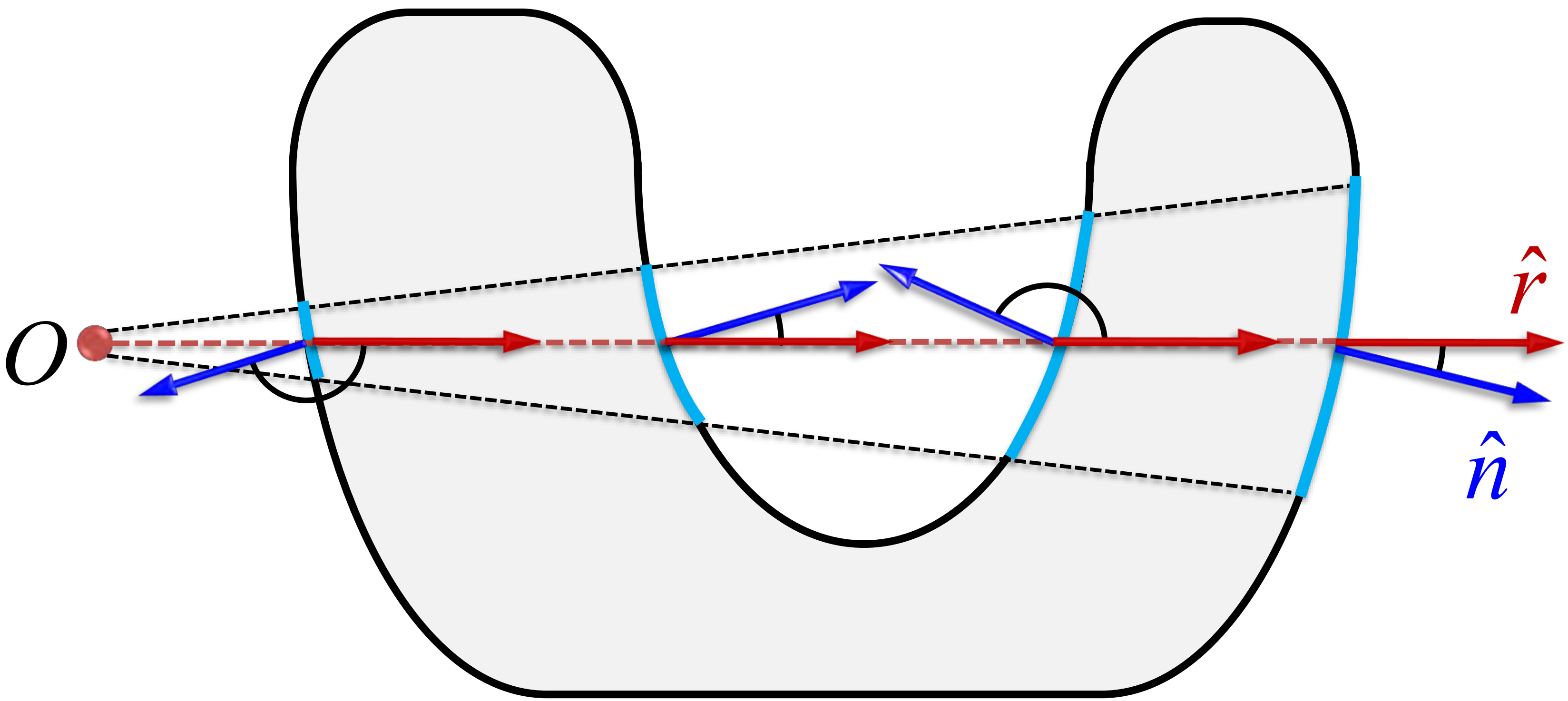


- 闭合曲面相对于点 O 的立体角

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi, & O \text{ 在 } S \text{ 内} \\ 0, & O \text{ 在 } S \text{ 外} \end{cases}$$




O
$\hat{r}$
$\hat{n}$

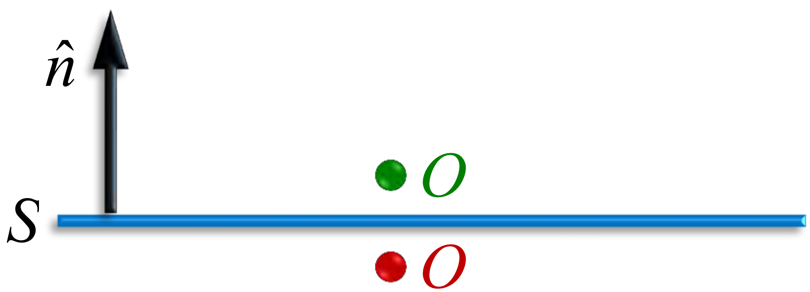

O
$\hat{r}$
$\hat{n}$

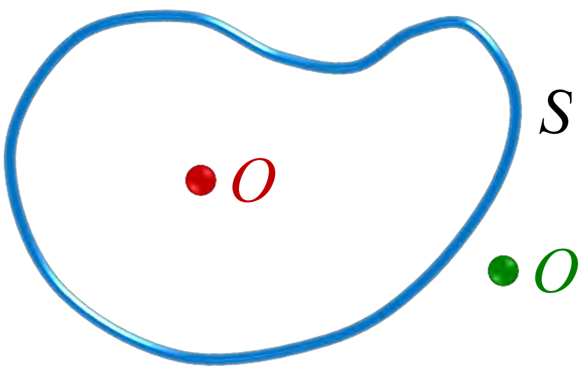
■ 任一曲面相对于 O 点所张立体角

$$\Omega = \iint_S d\Omega = \iint_S \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \iint_S \frac{\hat{r}\cdot d\vec{S}}{r^2}$$

数值上等于相应的单位半径球面的面积

闭曲面总是以外法向作为面元正向





$$\Omega = \begin{cases} +2\pi, & O\text{ 在 }S\text{ 下方} \\ -2\pi, & O\text{ 在 }S\text{ 上方} \end{cases}$$

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi, & O\text{ 在 }S\text{ 内} \\ 0, & O\text{ 在 }S\text{ 外} \end{cases}$$


Thank You !