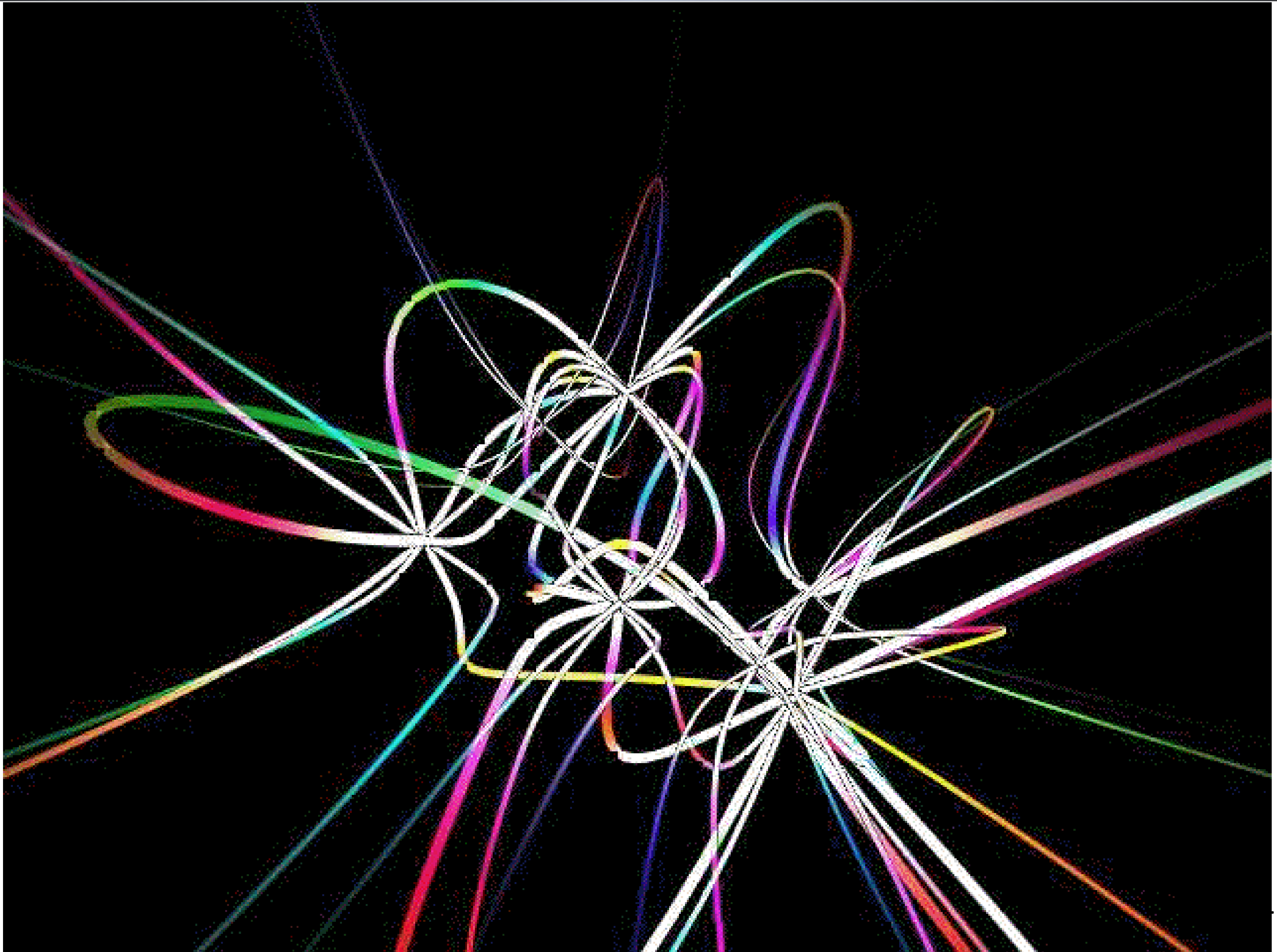
§1-4 电场强度



一、看待相互作用的两种观点

- 由**库仑定律**和**叠加原理**这两个实验规律可以给出两个带电体之间电力的正确表达式。

  - 恰如由**万有引力定律**和**叠加原理**可以给出两个物体之间正确引力的正确表达式。

什么才是描述电荷效应的最好方式？如何解释？

对物体间的作用，自牛顿以来存在着两种作用的争论：

近距接触作用 or **瞬时超距作用**

中间媒介 or **虚无真空**

1. 超距作用（theory of action at a distance）

- 1686年，牛顿发表万有引力定律
  - 笛卡尔反对超距作用，提出以太概念；否定引力定律；
  - 牛顿学派捍卫万有引力定律；反对包含以太的一切概念。

"...没有其他东西为媒介，一个物体可超越距离通过真空对另一物体作用...这种思想荒唐之极。我相信从来没有一个在哲学问题上具有充分思考能力的人会沉迷其中。" ——牛顿

- 18世纪后期，牛顿学派占据上风
  - 万有引力的极大成功；
  - **Lagrange、Laplace、Poisson**等发展的势论这一简洁优美的数学理论某种程度上支持了超距作用的观点；
  - 没有以太证据以及以太的种种怪异特性。

- 库仑定律给出了两个静止电荷间的相互作用力，但没有说明这种作用是通过什么途径发生的。超距作用的观点认为一个电荷对另一电荷的作用无需经中间物传递，即

- 超距作用的观点认为带电体之间的相互作用力是以无限大速度在两物体间直接传递的，与存在于两物体之间的物质无关。因此持有超距作用观点的人认为带电体之间的相互作用无需传递时间，也不承认电场是传递相互作用的客观物质。

- 电磁学建立初期，Coulomb、Ampere奉行超距作用，Neumann、Weber等用超距作用得到了相应的电磁理论。

2. 近距作用（theory of action through medium）

通过接触或媒介发生作用，作用需要时间

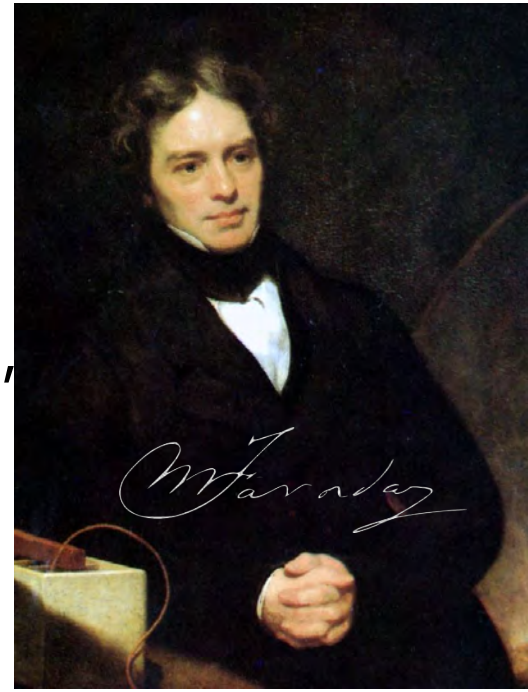
- 近距作用的媒介最初认为是“以太”。直到Faraday、Maxwell提出了力线和场，建立了近距作用的电磁理论并得到实验证实之后，这种状况才得以改变。

- 1881年 A.A.Michelson 设计了一个精密的实验来测量“以太风”。 1887年与 E.W.Morley 合作，重新实验，仍得到“零”结果。说明“以太”根本不存在。

【注】**A.A.Michelson**因为他的“零”结果而荣获**1907**年的诺贝尔奖。

3. 力线与场

- Michael Faraday (1791—1867) 是英国伟大的物理学家和化学家，是一位有深刻物理思想的实验物理学家。
- Faraday是电磁场理论的创始者和奠基者，他的工作为Maxwell建立电磁场理论奠定了基础，Faraday和Maxwell一起当之无愧地被誉为19世纪最伟大的物理学家。



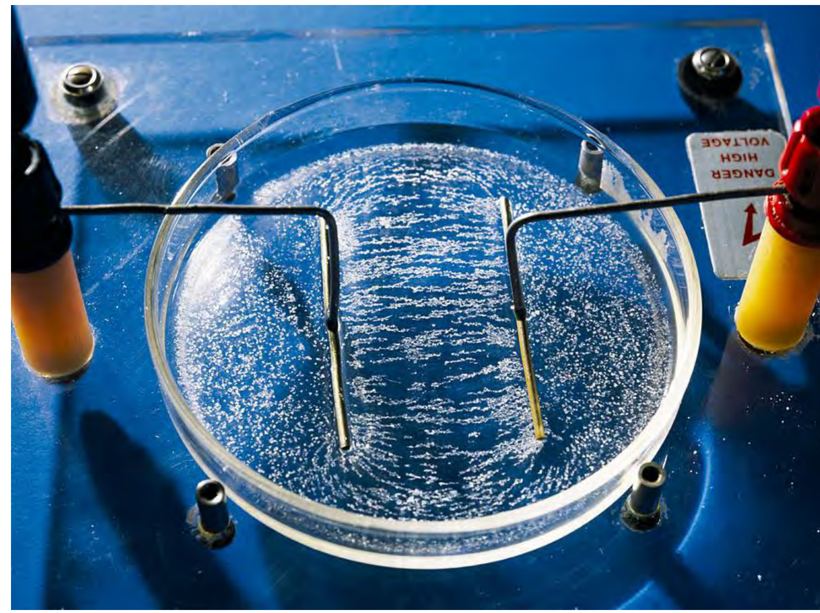
(1) 电磁感应的发现、研究和解释。

(2) 对电磁作用提出了近距作用观点(力线概念)

“在Faraday的许多贡献中，最伟大的一个就是力线概念了。借助于它，就可以把电场和磁场的许多性质，最简单而又极富启发性地表示出来。” ——Thomson

- Faraday提出力线概念，并坚持用**力线**去了解电磁现象背后的物理机制。

- Thomson在自己研究的基础上建议研究Faraday的力线思想。Maxwell将Faraday力线的基础上发展了近距作用观点的**场论思想**，最终建立了Maxwell方程组，奠定了经典电动力学的理论基础。



- 理论与实验均赋予了场**物理实在性**（能量、动量、角动量）

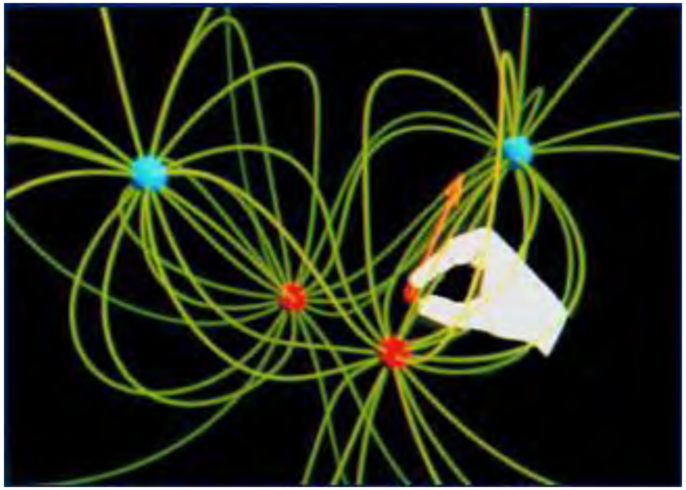
物质有两种：实物粒子和场

场的观点

- 近代物理的发展证明，超距作用的观点是错误的，近距作用的观点才是正确的。电力（磁力也是这样）虽然以极快的速度传递，但该速度仍然有限。在真空中，它的速度就是真空中的光速 c：

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 299792458 \ \text{m/s} \approx 3 \times 10^8 \ \text{m/s}$$

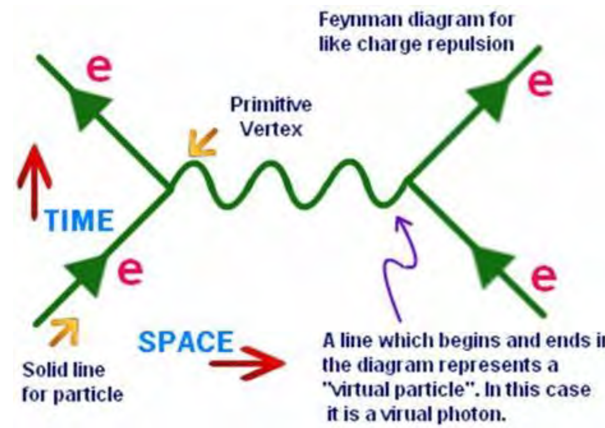
- “以太”并不存在，电力（磁力）通过电场（磁场）传递。凡是有电荷的地方，周围就存在电场，即电荷在自己的周围激发电场，电场对处在场内的其他电荷有力作用。电荷受到电场的作用力仅由该电荷所在处的电场决定，与其他地方的电场无关，这就是场的观点。

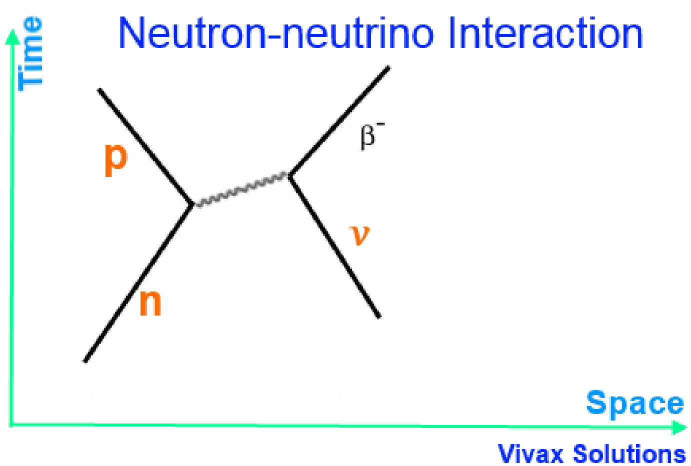


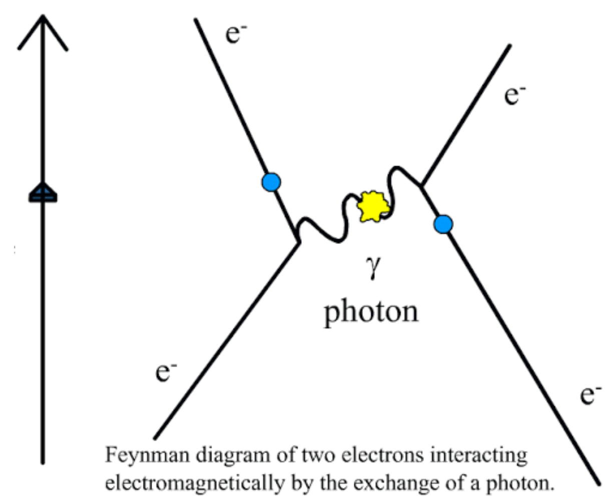
近距作用的物理图像

关于静电力，有两种等价地方式解释其作用机制。

- 量子图像
  - 带电粒子通过交换携带能量、动量、角动量的光量子相互作用
  - 因此，力是一种局域的现象：当交换量子时电荷所表现的一种性质
  - 电作用中交换的粒子是光子

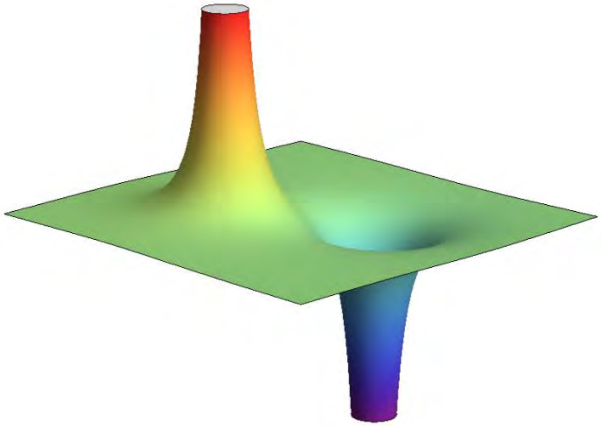






Feynman diagram of two electrons interacting electromagnetically by the exchange of a photon.

- 经典图像



➢ 电荷的存在改变了空间自身的性质：导致“隆起和凹陷”，并决定了其他电荷如何运动。

➢ 因此，力是空间自身的一个整体性质。

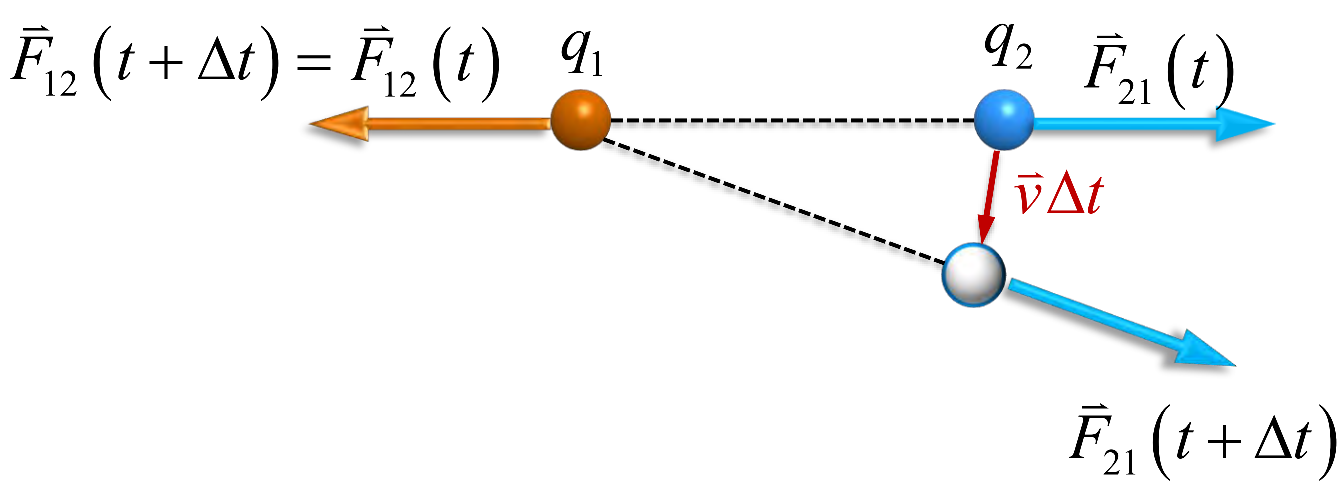
➢ 包含电荷的空间的特征由电场表征：

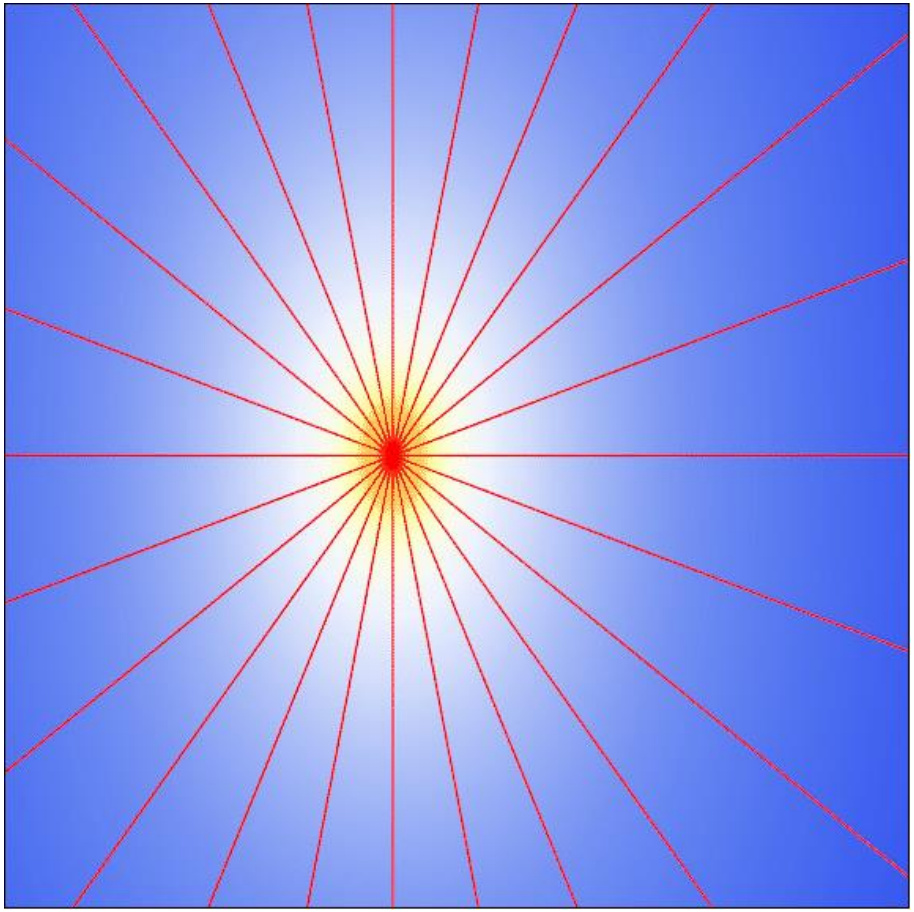
（1）空间每一点处的电场等于该处的单位电荷受到的力；

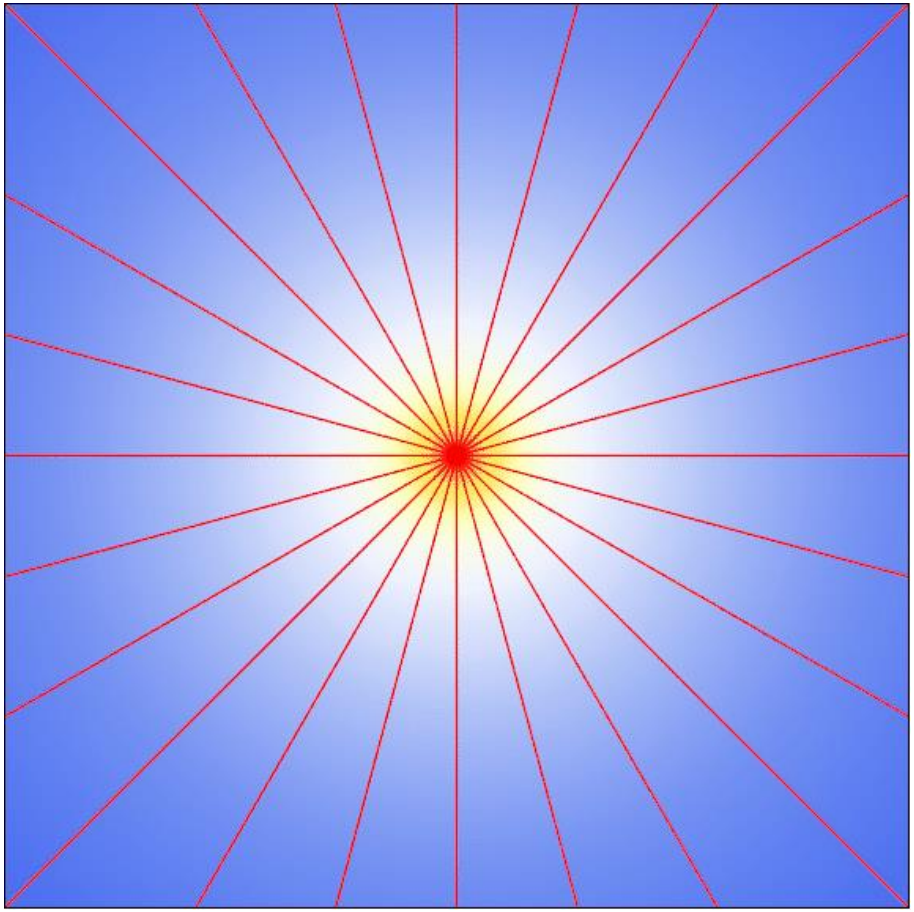
（2）某处电场决定该处的“检验”电荷如何运动。

“极富启发性”的一个例子

- 在**静态**情形，超距作用的观点与场的观点是**等价**的。
- 当电荷运动起来时，两种观点的差别就显现出来了。
  - ➢ 两个静止点电荷 q_1 和 q_2 的相互作用满足牛顿第三定律
  - ➢ 如果电荷 q_1 保持不动， q_2 从 t 时刻发生移动，到达新的位置，试问：二者之间的相互作用力如何?







二、电场

$\vec{E}(\vec{r},t)$ 静止于 r 处的单位正电荷在 t 时刻受到的力。

- 单位：N/C（常用单位 V/m）
- 测量：检验电荷

（电量、线度足够小，WHY？）

$$\vec{F}_0 = q_0\vec{E} \longrightarrow \vec{E} = \vec{F}_0 / q_0$$

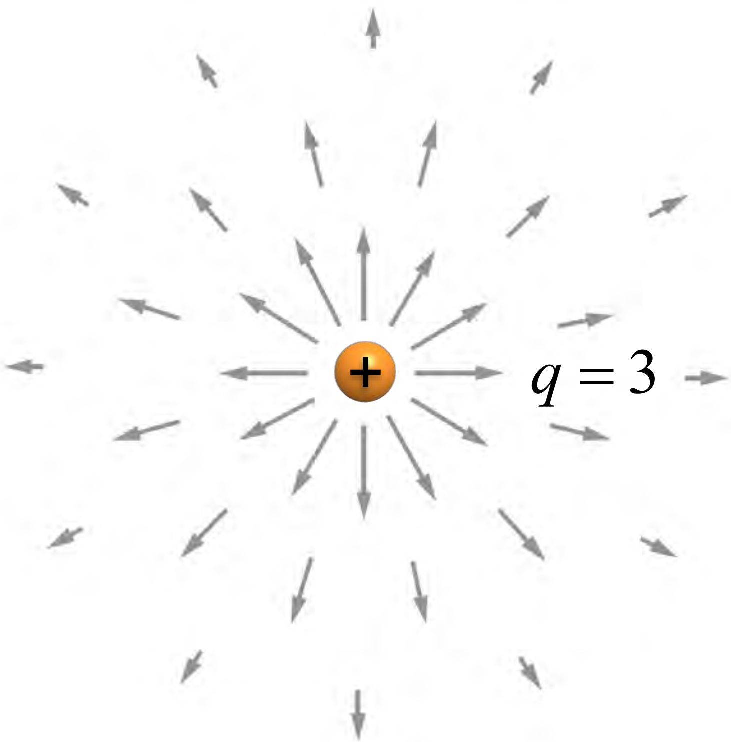
源	E (V/m)
荧光灯管	10
大气（晴天）	10^2
头发上摩擦过的气球	10^3
雷雨云中	10^4
复印机	10^5
空气击穿场强	3×10^6
原子表面	10^{11}
原子核表面	10^{21}

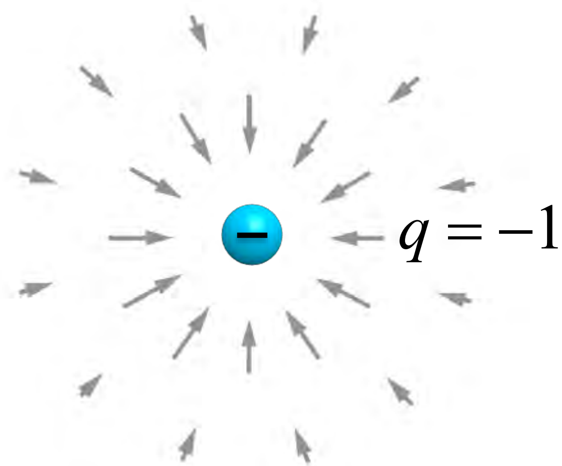
1. 静电场

静止电荷产生的电场称为**静电场**，

静电场对其他电荷的作用力谓之**静电力**。

$$\frac{\partial \rho\left(\vec{r},t\right)}{\partial t}=0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial \vec{E}\left(\vec{r},t\right)}{\partial t}=0$$





2. 点电荷的电场

静止点电荷激发的电场为

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

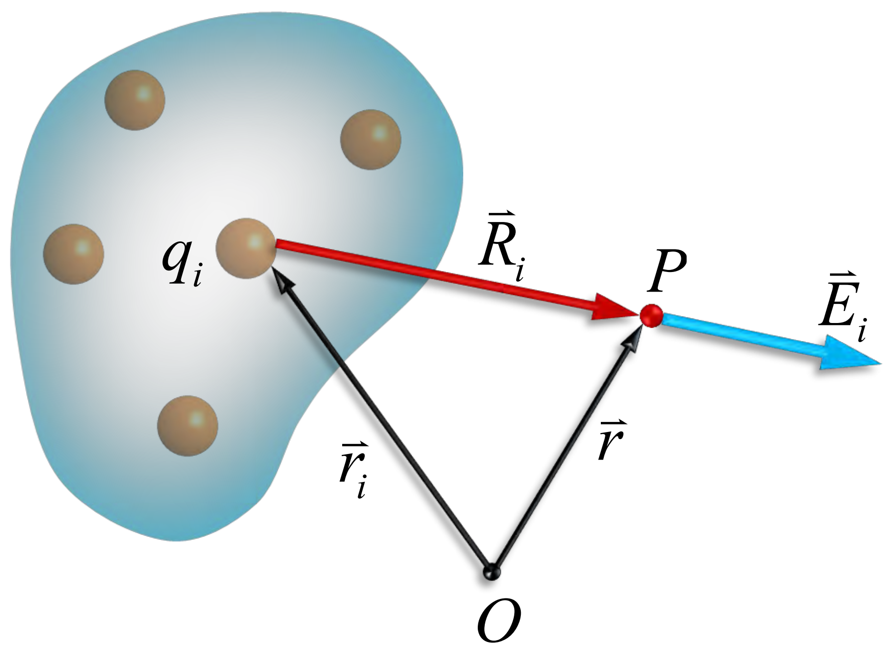
也将该式称为**库仑定律**。

任意电荷分布激发的电场可利用

库仑定律 和 叠加原理

求得。

3. 点电荷系统的电场

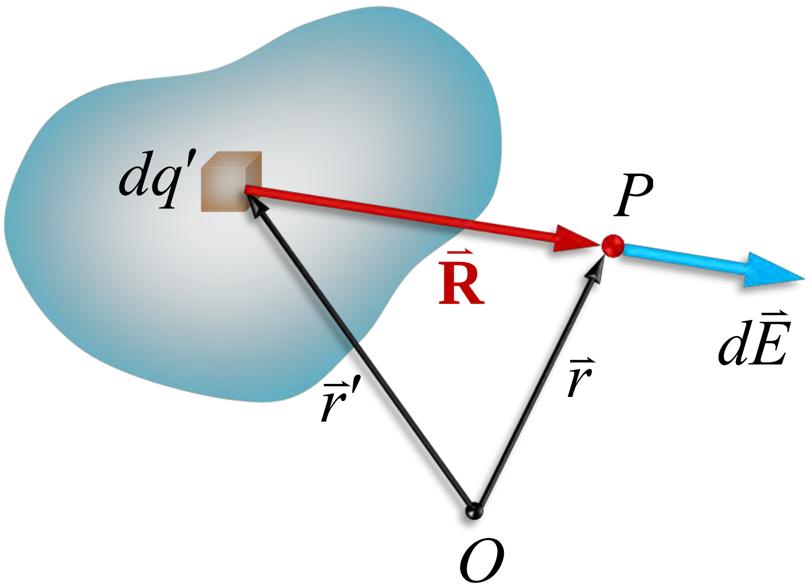


$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{R}_i}{R_i^2} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3}$$

- 场点（$\boldsymbol{r}$）相对于源点（$\boldsymbol{r}_i$）的位矢： $\vec{R}_i \triangleq \vec{r} - \vec{r}_i$

4. 连续电荷分布的电场

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}^2} dq'$$



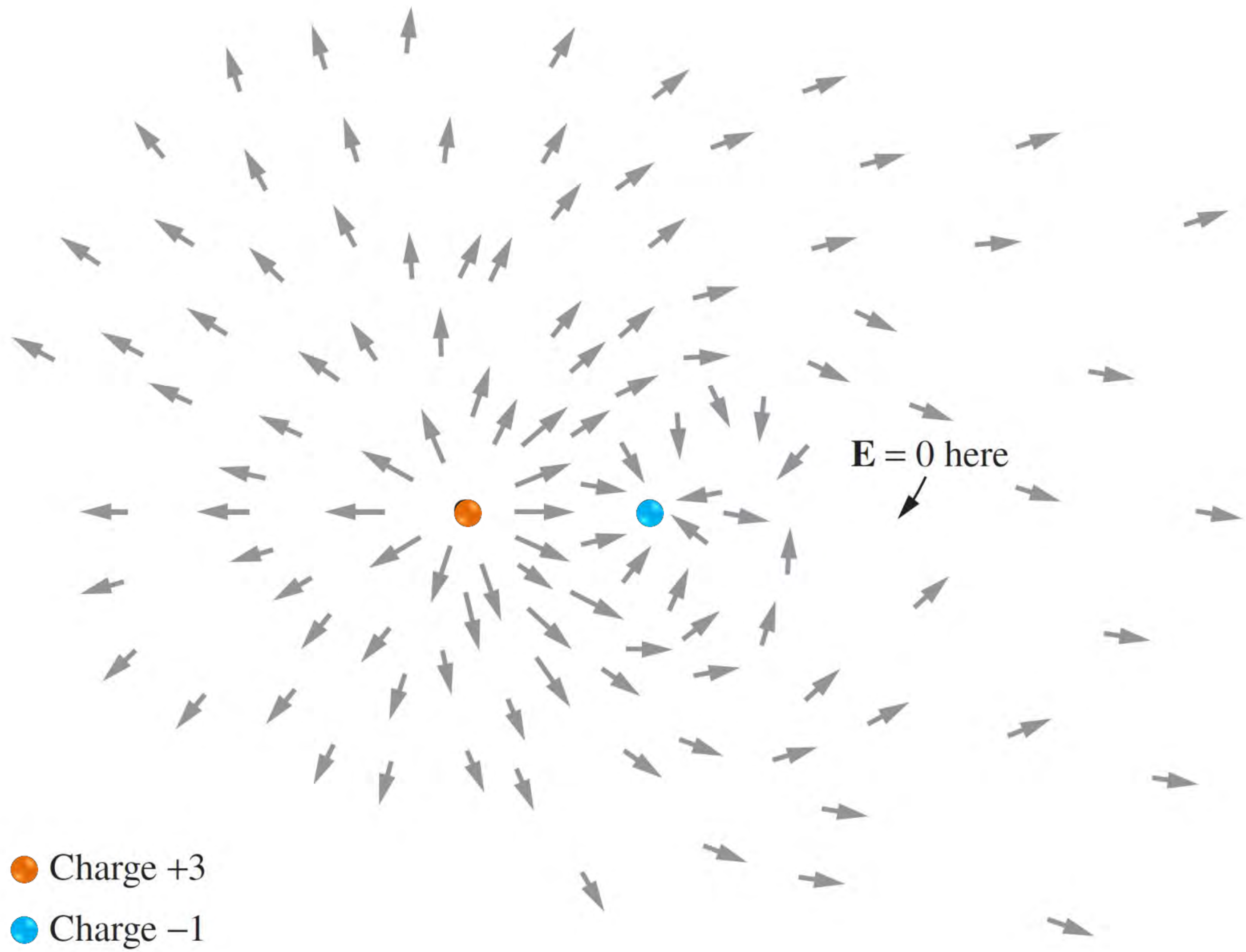
- 电荷元

$$\begin{cases} \text{体分布：} & dq' = \rho(\vec{r}')dV' \\ \text{面分布：} & dq' = \sigma(\vec{r}')dS' \\ \text{线分布：} & dq' = \lambda(\vec{r}')dl' \end{cases}$$

- 场点（$\boldsymbol{r}$）相对于源点（$\boldsymbol{r}'$）的位矢： $\vec{R} \triangleq \vec{r} - \vec{r}'$

三、电场的直观描述

1. 箭头



2. 电场线

- 电场线在其上任一点处的切线沿着该点 E 的方向。

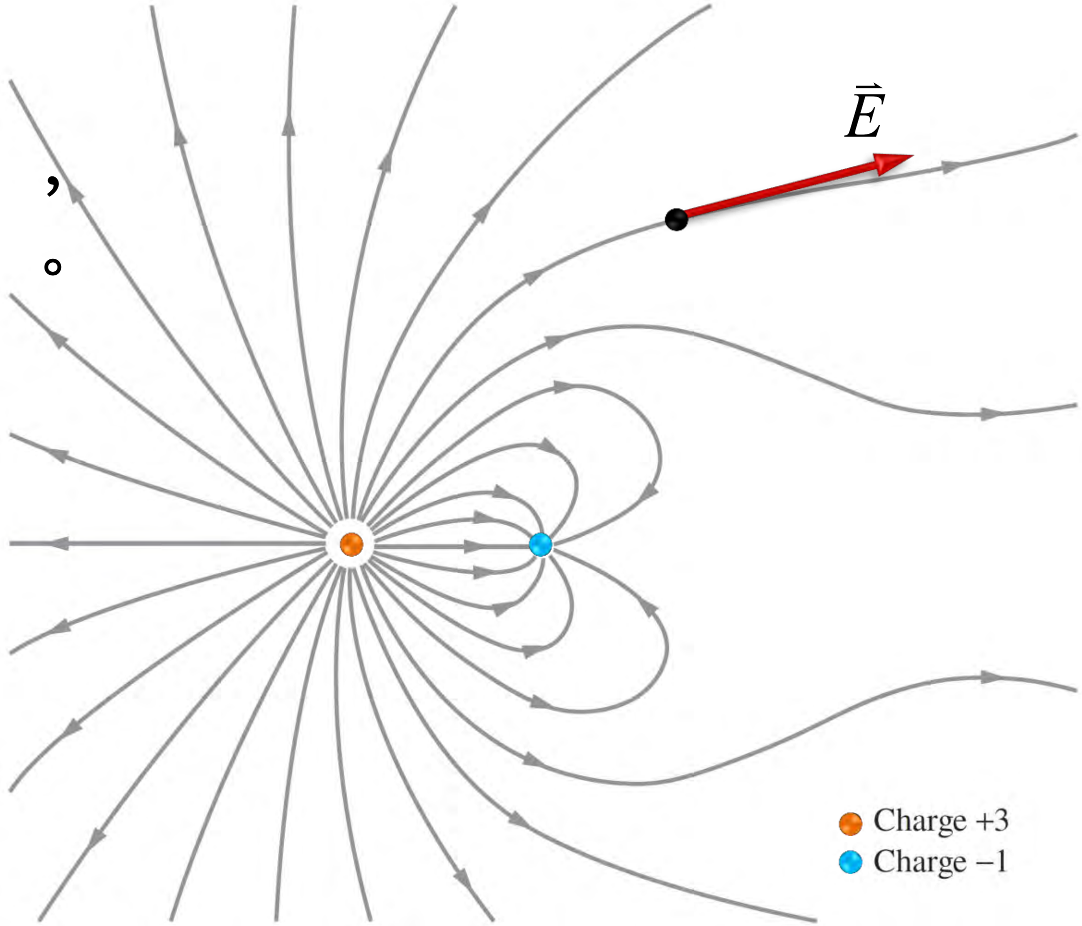
$$\vec{E}\times d\vec{l}=0 \quad \text{或者} \quad \frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y}=\frac{dz}{E_z}$$

➢ 起于正电荷（或∞远），
止于负电荷（或∞远）。

➢ 不闭合

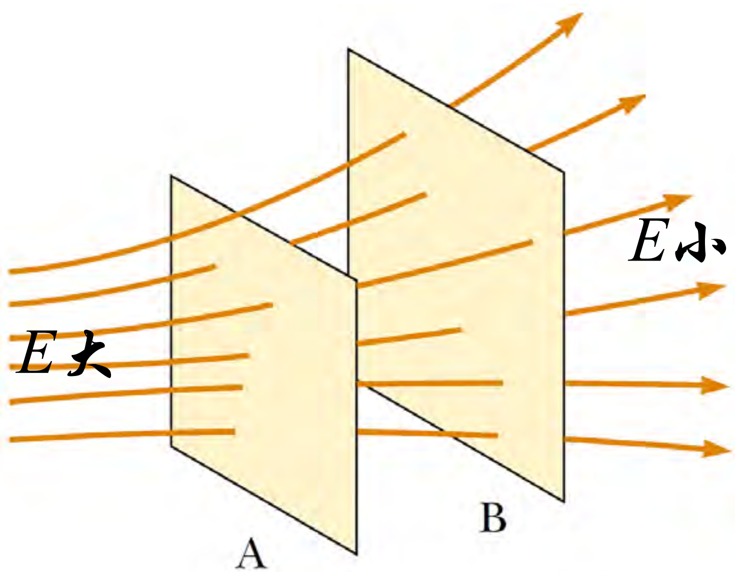
➢ 不会合并、
不会分岔

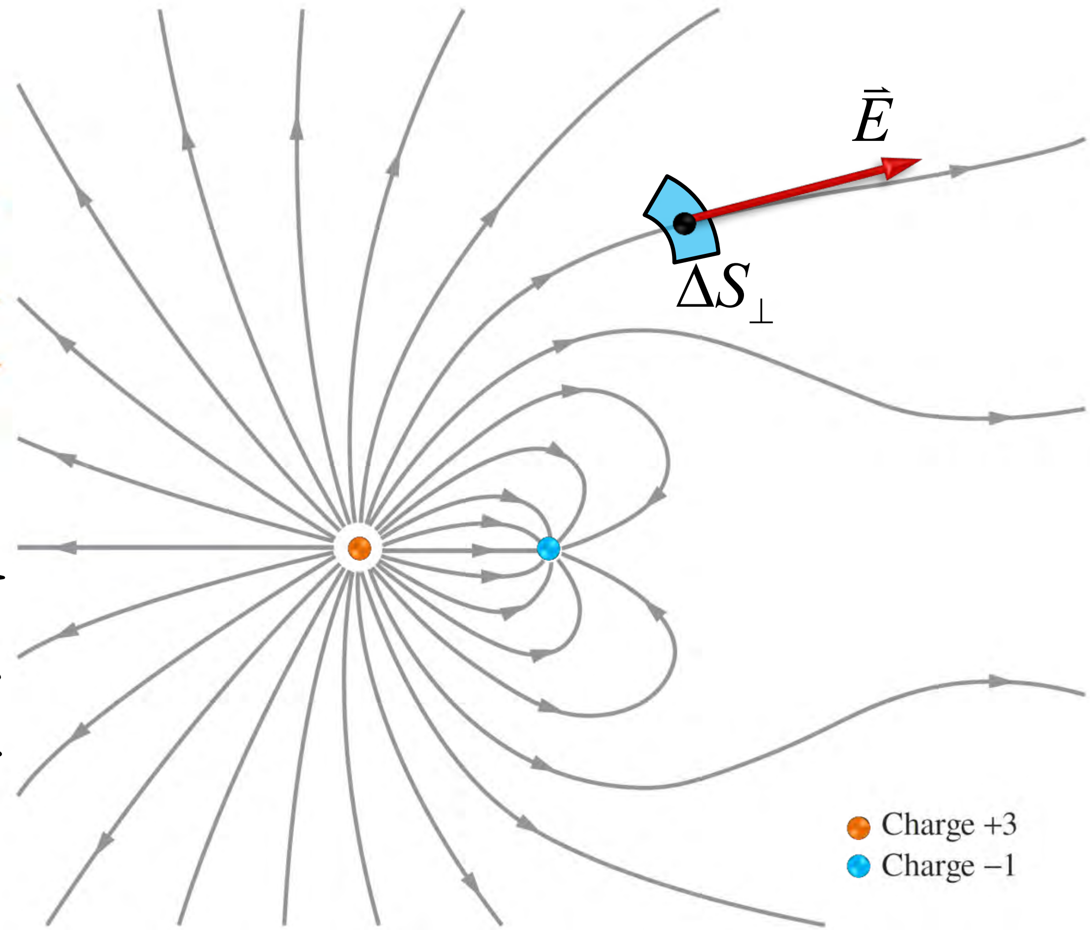
WHY?



- 电场线在任一点的数密度 n 正比于该点处 E 的大小

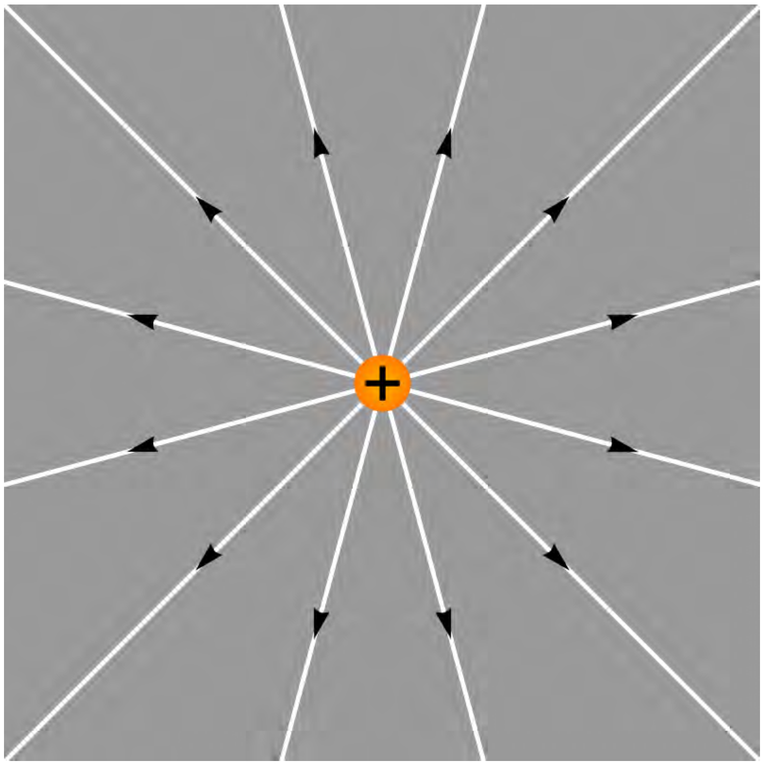
$$n(\vec{r}) \triangleq \frac{\Delta N}{\Delta S_{\perp}} \propto \left|\vec{E}(\vec{r})\right|$$

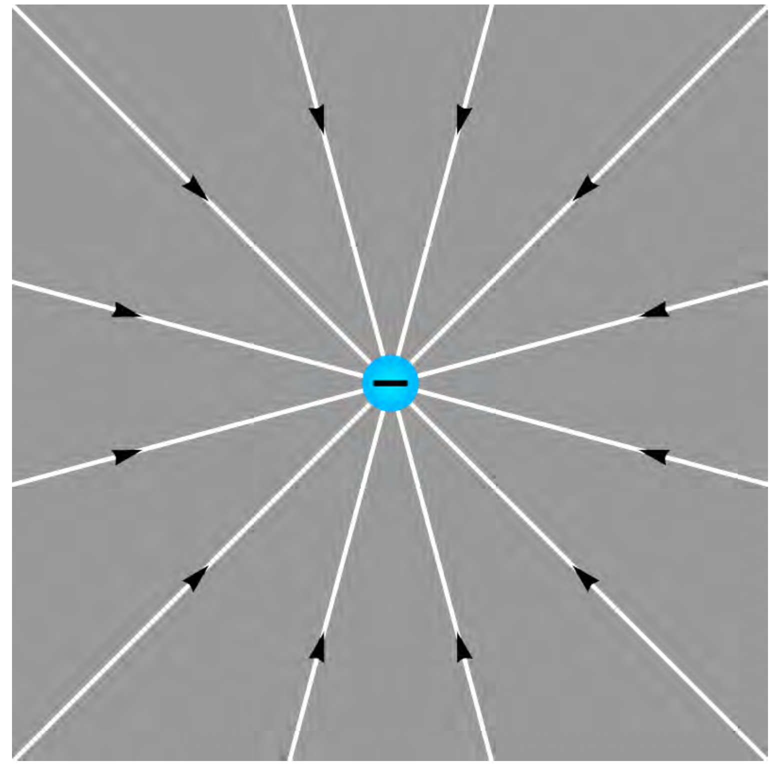




➢ 在点电荷系统中，各电荷发出或接受的电场线数目应正比于其电量。**WHY?**

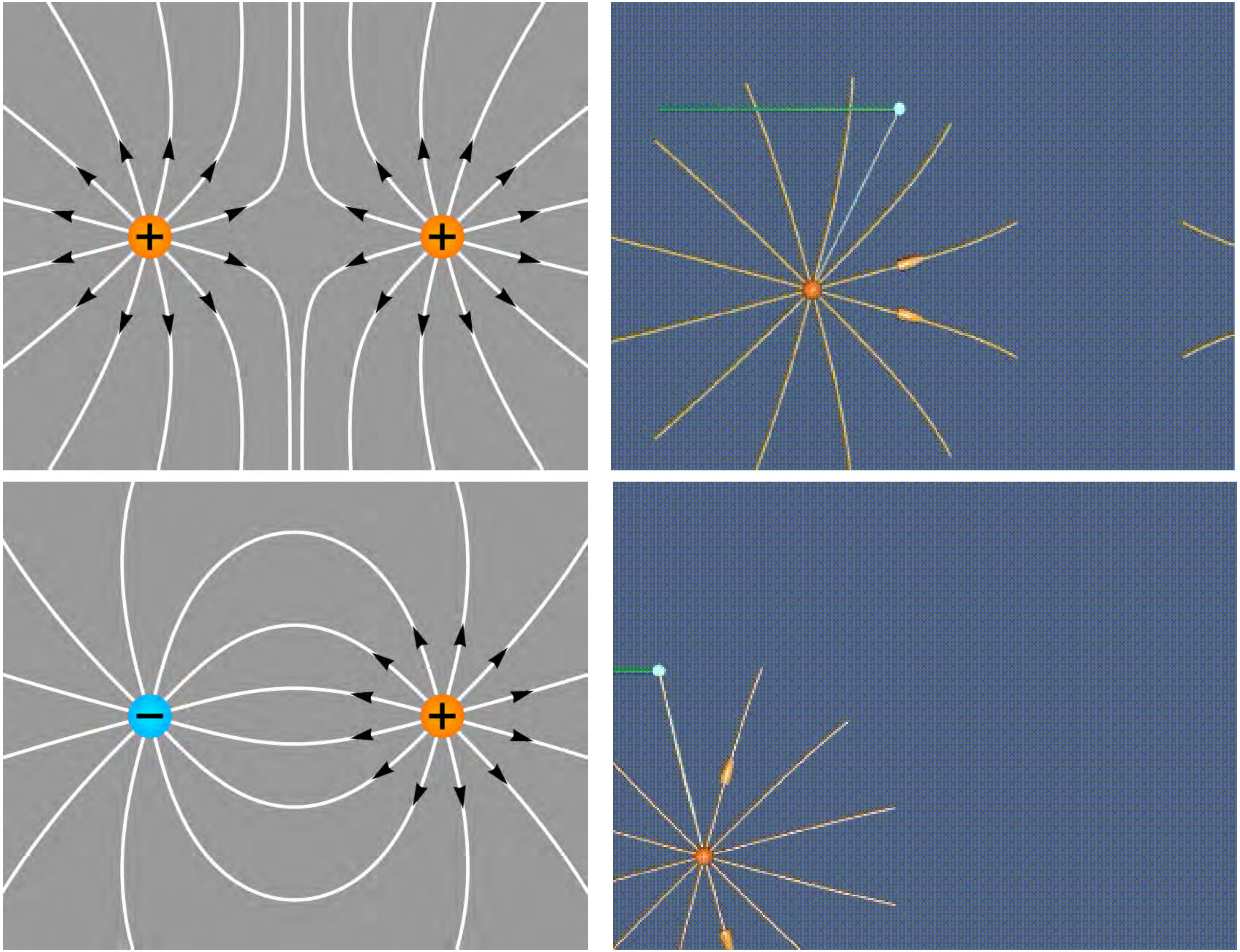
点电荷的电场线



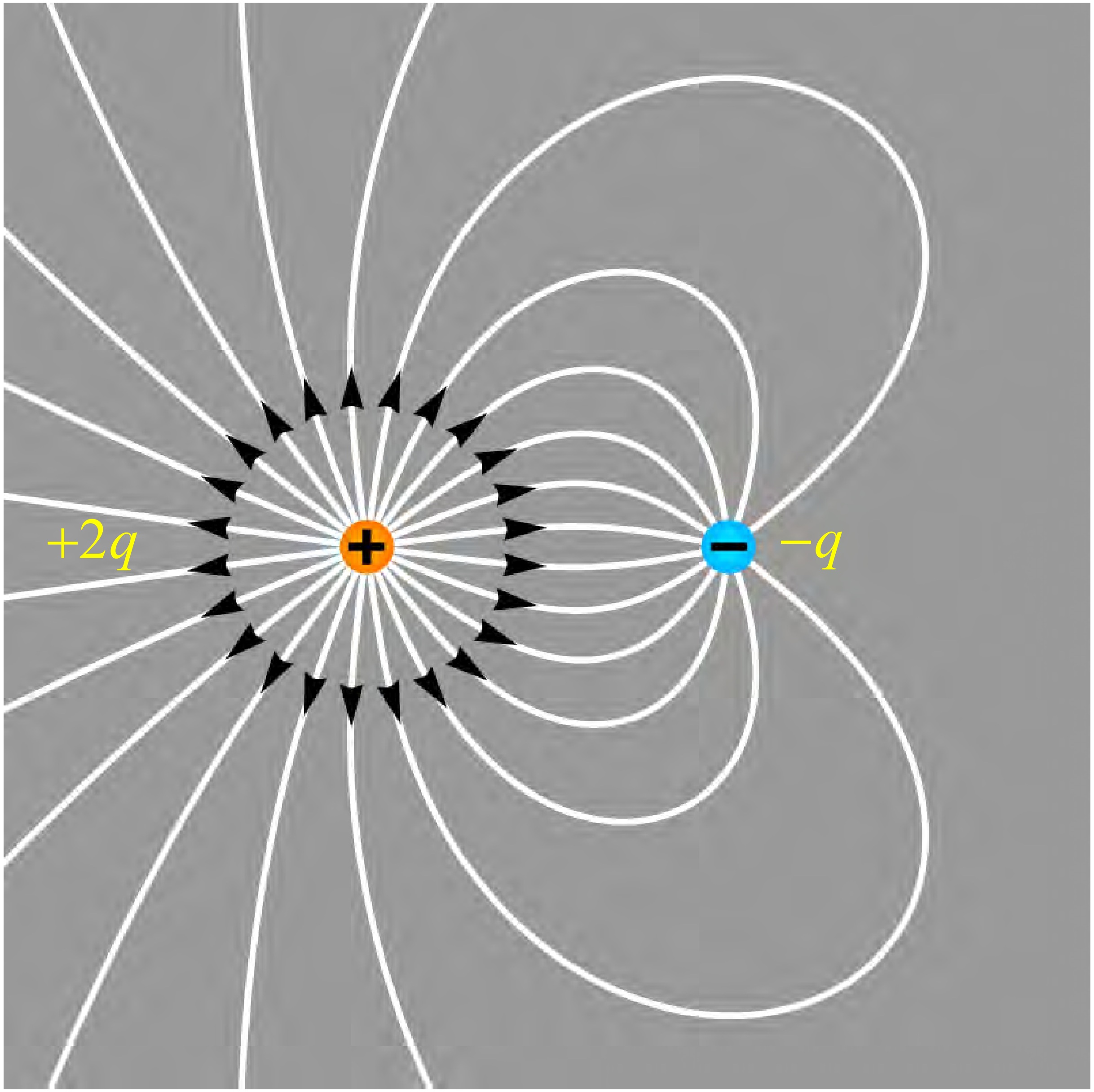


思考：为什么点电荷的电场线是连续的?

等量同号/等量异号点电荷的电场线



不等量、异号点电荷的电场线



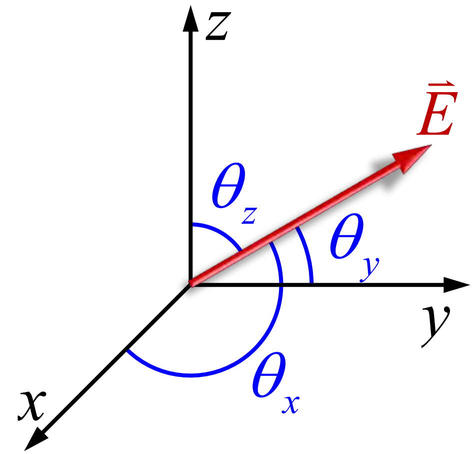
四、电场强度的计算

- 计算 E 的每一个分量：矢量积分化为3个标量积分

根据对称性选择合适坐标系（如直角坐标系）

$$d\vec{E}=\hat{x}dE_x+\hat{y}dE_y+\hat{z}dE_z$$

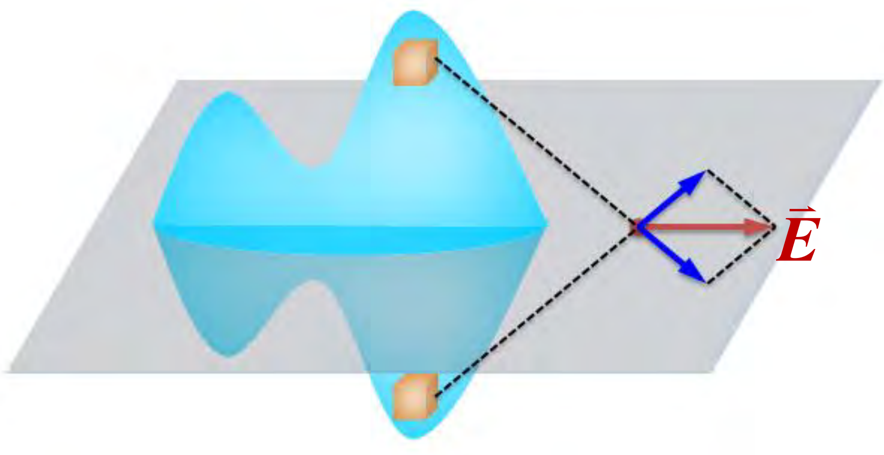
$$\Rightarrow \vec{E}=\int d\vec{E}=\hat{x}\int dE_x+\hat{y}\int dE_y+\hat{z}\int dE_z$$

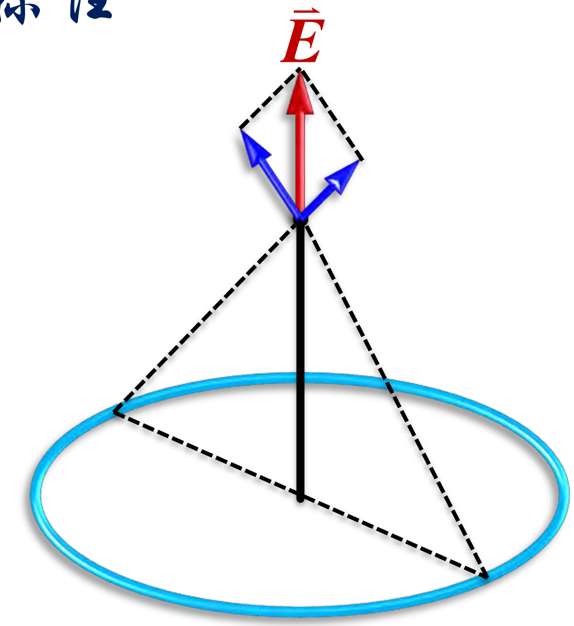


$$\Rightarrow \begin{cases} \text{大小：}\ E=\sqrt{E_x^2+E_y^2+E_z^2} \\ \text{方向：}\cos\theta_x=\dfrac{E_x}{E},\quad \cos\theta_y=\dfrac{E_y}{E},\quad \cos\theta_z=\dfrac{E_z}{E} \end{cases}$$

- 对于具有特殊对称性的电荷分布，也可以先判断 E 的方向，再计算其大小：矢量积分化为1个标量积分

叠加原理与对称性





如果电荷分布存在对称平面，那么**对称面上的电场没有法向分量**，即平行于对称面。

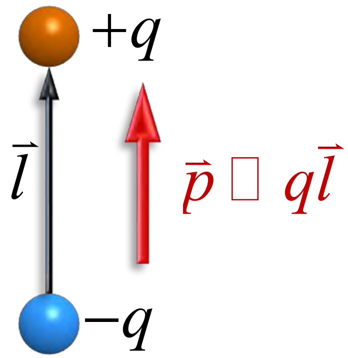
如果电荷分布存在对称轴，那么**对称轴上的电场沿着对称轴**。

对称性的本质乃是叠加原理！

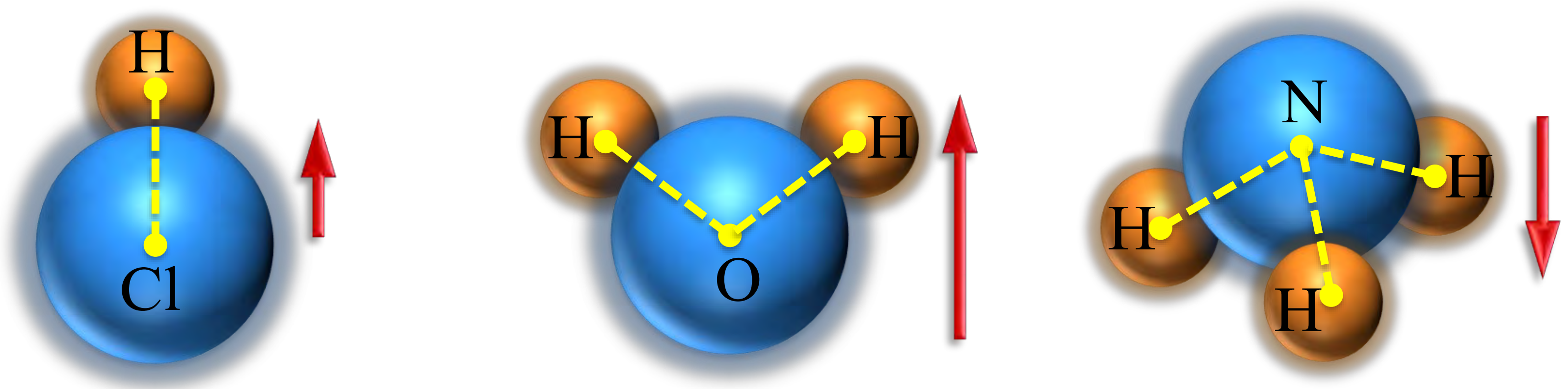
五、电偶极子的电场

(物理)电偶极子：相隔一定距离的一对等量、异号点电荷。

- **电偶极矩** $\vec{p} \triangleq q\vec{l} = q\vec{r}_+ + (-q)\vec{r}_-$



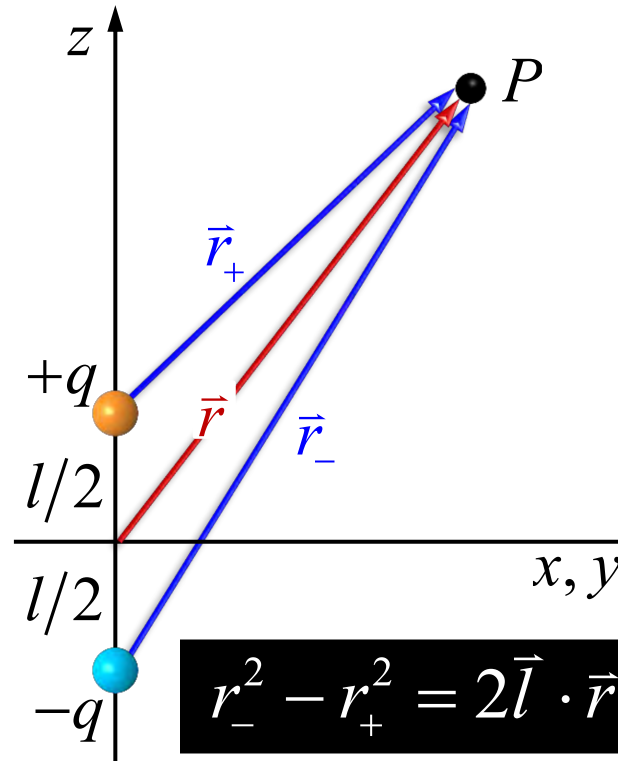
- 自然界中，很多分子的正负电荷并不完全重合，因此具有非零的电偶极矩：



$p = 3.43\times10^{-30}\ \mathrm{C\cdot m}$ $p = 6.13\times10^{-30}\ \mathrm{C\cdot m}$ $p = 4.77\times10^{-30}\ \mathrm{C\cdot m}$

电偶极子在 **远处** （$r >> l$） 任一点的电场如何?

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}\right)$$



$$r_-^2 - r_+^2 = 2\vec{l}\cdot\vec{r}$$

其中

$$\begin{cases} \vec{r}_+ = \vec{r} - \vec{l}/2 = x\hat{x} + y\hat{y} + (z - l/2)\hat{z} \\ \vec{r}_- = \vec{r} + \vec{l}/2 = x\hat{x} + y\hat{y} + (z + l/2)\hat{z} \end{cases}$$

因而

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\hat{x} + y\hat{y} + (z - l/2)\hat{z}}{\left[x^2 + y^2 + (z - l/2)^2\right]^{3/2}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\hat{x} + y\hat{y} + (z + l/2)\hat{z}}{\left[x^2 + y^2 + (z + l/2)^2\right]^{3/2}}$$

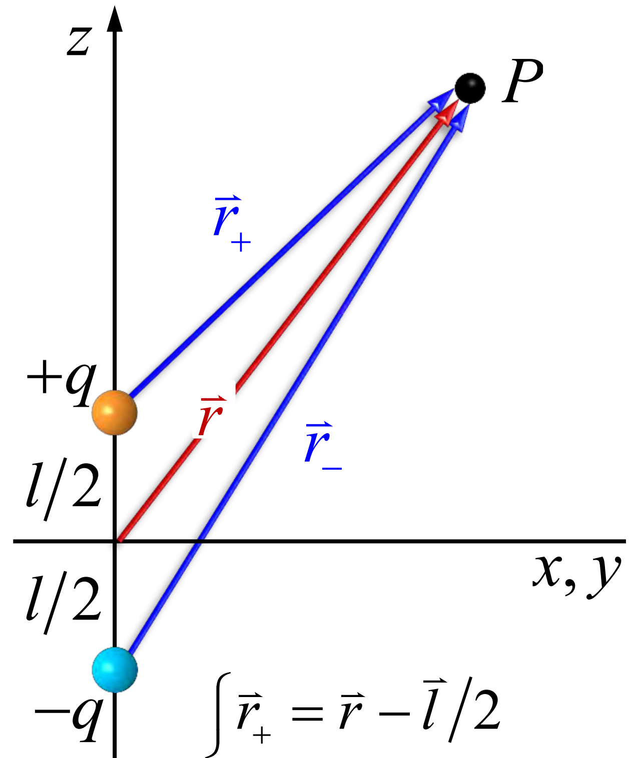
在远离电偶极子的地方，*$r >> l$*：

Taylor展开，保留**领先项（第一个非零项）**

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3}\right)\vec{r} - \left(\frac{1}{r_+^3} + \frac{1}{r_-^3}\right)\frac{\vec{l}}{2}\right]$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\vec{l}\cdot\hat{r}}{r^3}\hat{r} - \frac{\vec{l}}{r^3}\right)$$



$$\begin{cases} \vec{r}_+ = \vec{r} - \vec{l}/2 \\ \vec{r}_- = \vec{r} + \vec{l}/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}], \quad (r \gg l)$$

$$r_-^2 - r_+^2 = 2\vec{l}\cdot\vec{r}$$

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\right]$$

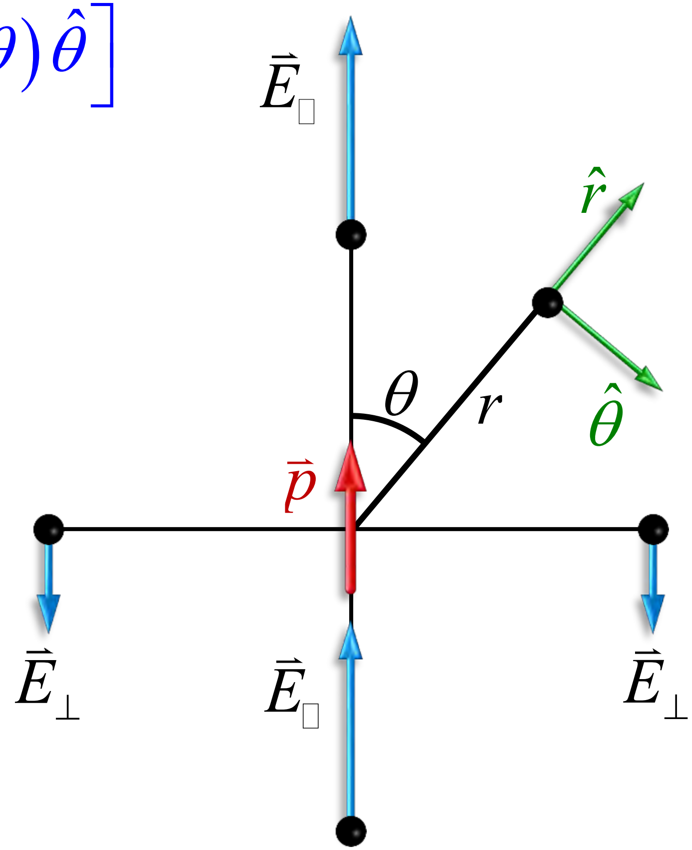
$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[(2\cos\theta)\hat{r} + (\sin\theta)\hat{\theta}\right]$$

- 中垂面上（$\theta = \pi/2$）

$$\vec{E}_\perp = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

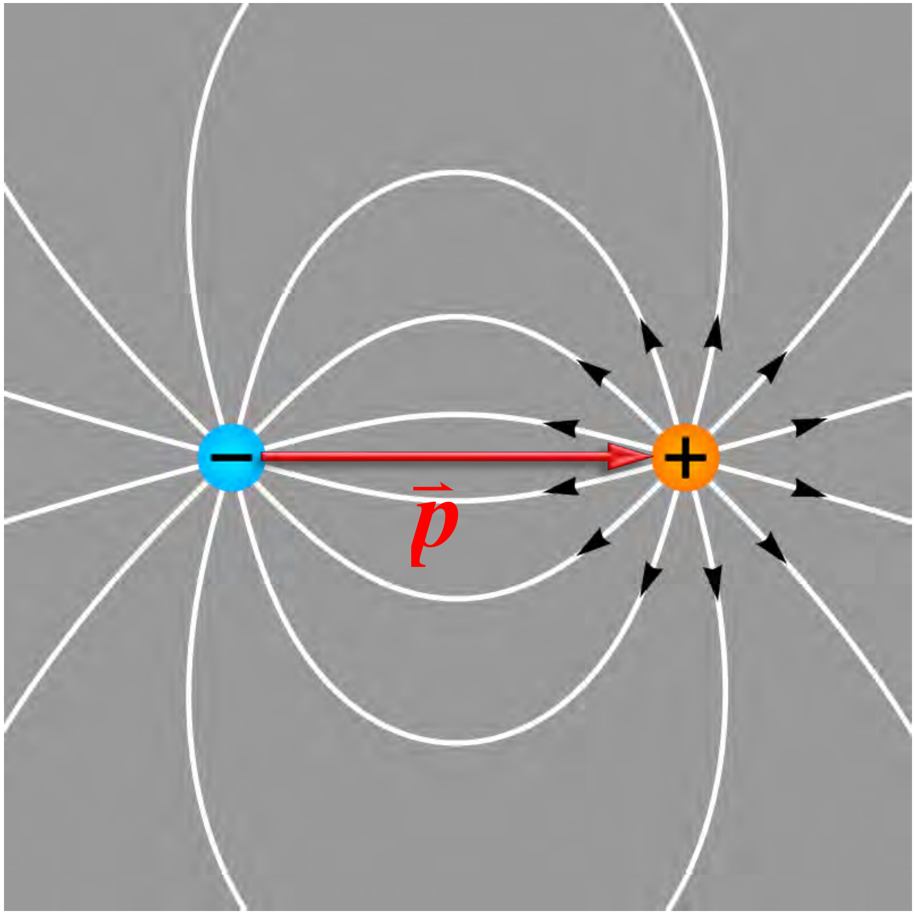
- 延长线上（$\theta = 0, \pi$）

$$\vec{E}_\parallel = \frac{2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



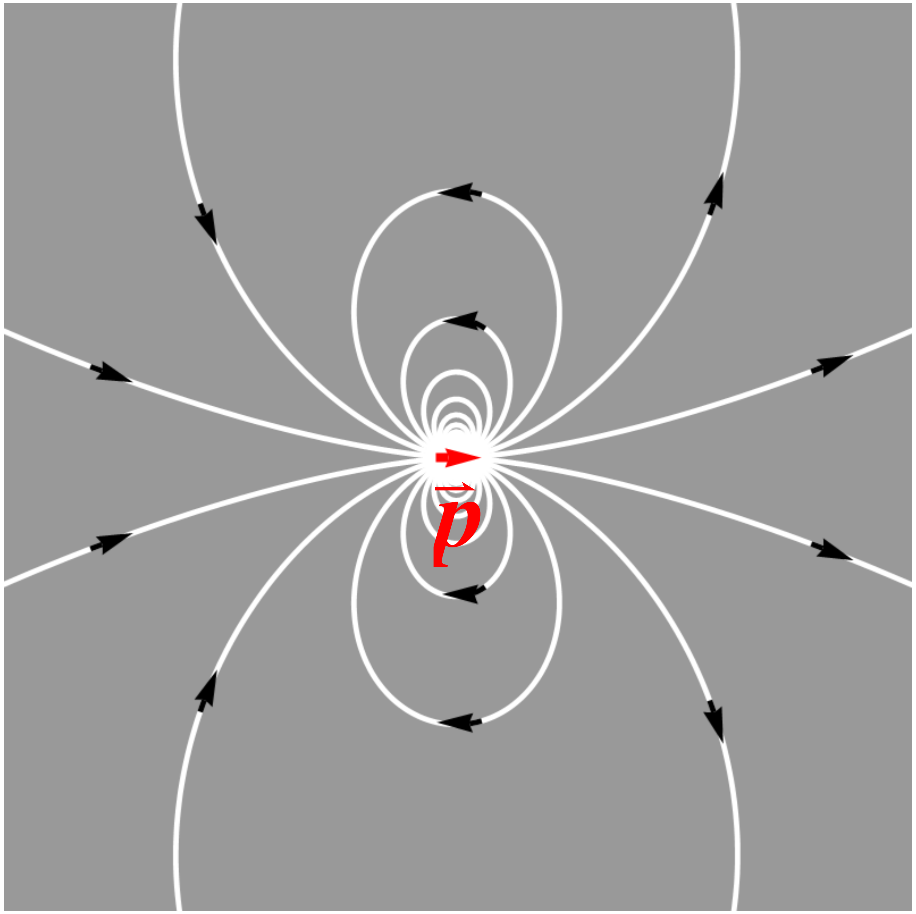
物理电偶极子与数学（理想）电偶极子

物理电偶极子



$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\left(\vec{p}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}-\vec{p}\right]$$

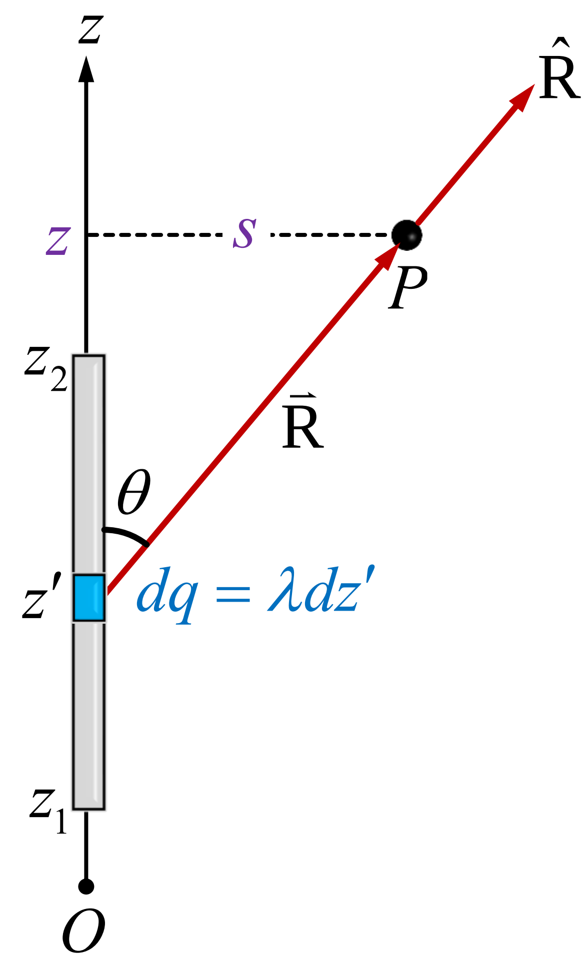
理想电偶极子



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\left(\vec{p}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}-\vec{p}\right]$$

六、连续电荷分布电场的例子

【例】 电量 Q 均匀分布于长 L 的细棒上，求空间任一点 P 处的电场强度。



【解】 设线电荷密度为 $\lambda = Q/L$。

电荷元贡献的电场为 $d\vec{E} = \dfrac{\lambda dz'}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{R}}{R^2}$

由于 $z - z' = s\cot\theta$

$$\Rightarrow \frac{dz'}{R^2} = \frac{s\,d\theta}{R^2\sin^2\theta} = \frac{s\,d\theta}{s^2} = \frac{d\theta}{s}$$

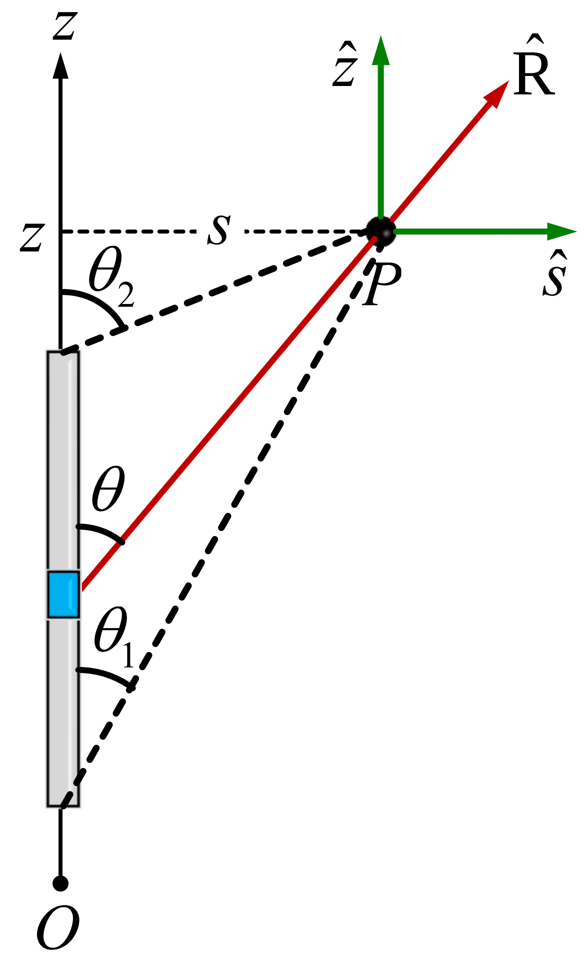
因此 $d\vec{E} = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 s}\hat{R}\,d\theta$

积分得到

$$\vec{E}=\int d\vec{E}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 s}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\hat{\mathrm{R}}\,d\theta$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 s}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\hat{z}\cos\theta+\hat{s}\sin\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 s}\left(\hat{z}\sin\theta-\hat{s}\cos\theta\right)\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$



$$\vec{E}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 s}\left[\hat{z}\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right)-\hat{s}\left(\cos\theta_2-\cos\theta_1\right)\right]=E_z\hat{z}+E_s\hat{s}$$

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 s}\left[\hat{z}\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right)-\hat{s}\left(\cos\theta_2-\cos\theta_1\right)\right]=E_z\hat{z}+E_s\hat{s}$$

- 大小

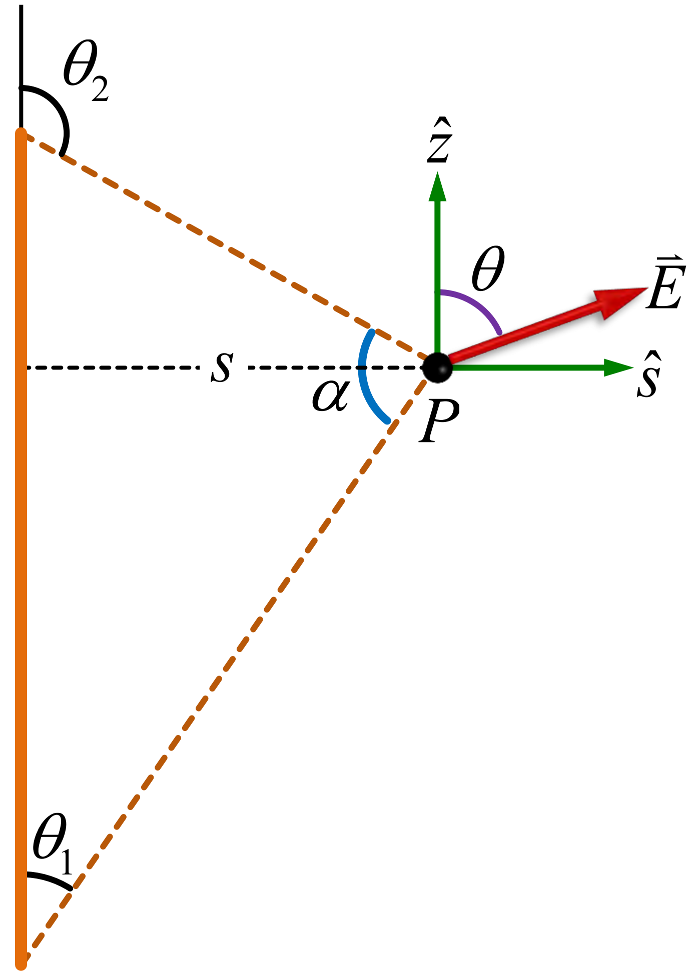
$$E=\sqrt{E_z^2+E_s^2}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 s}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 s}\sin\frac{\alpha}{2}$$

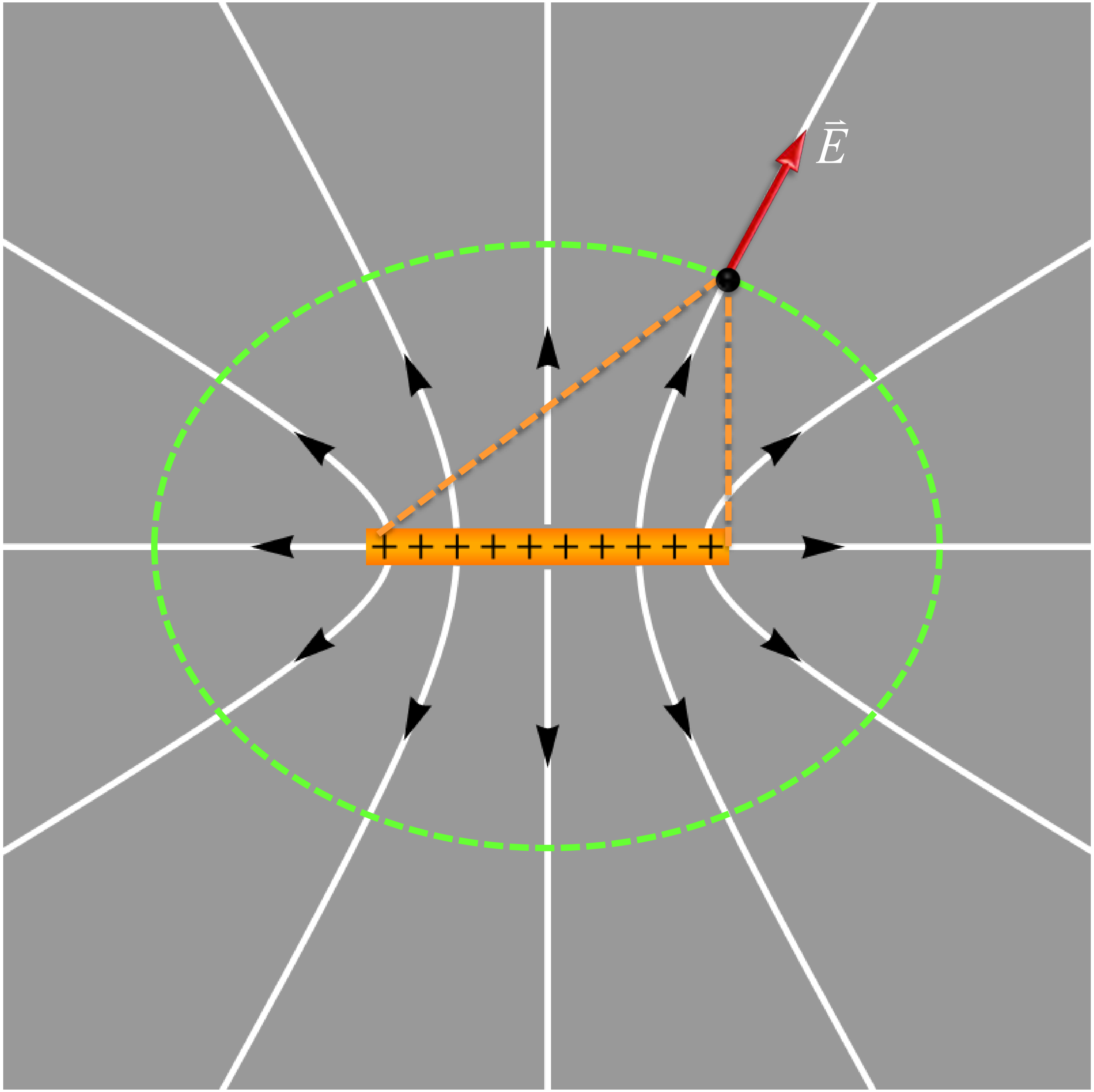
- 方向

$$\tan\theta=\frac{E_s}{E_z}=\tan\frac{\theta_2+\theta_1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \theta=\frac{\theta_2+\theta_1}{2}=\theta_1+\frac{\alpha}{2}$$



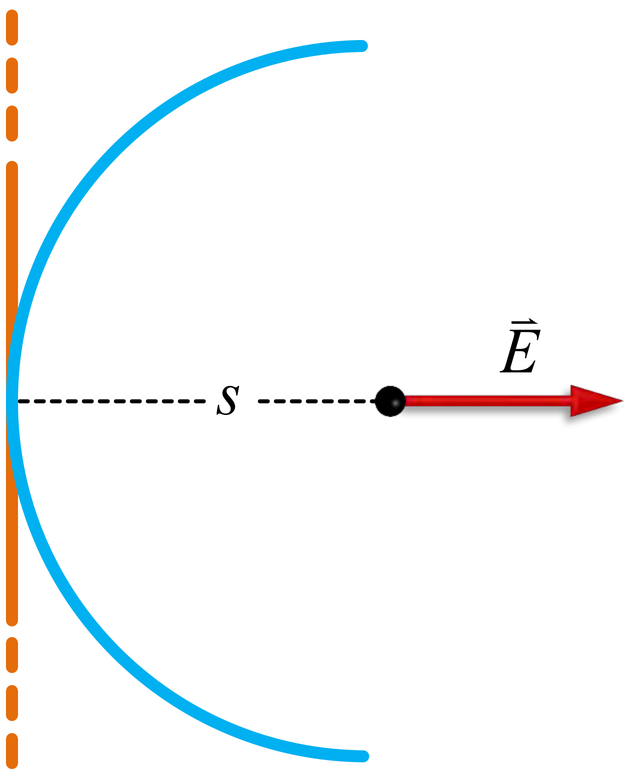
P点的电场沿着P点与两端点连线的角平分线方向

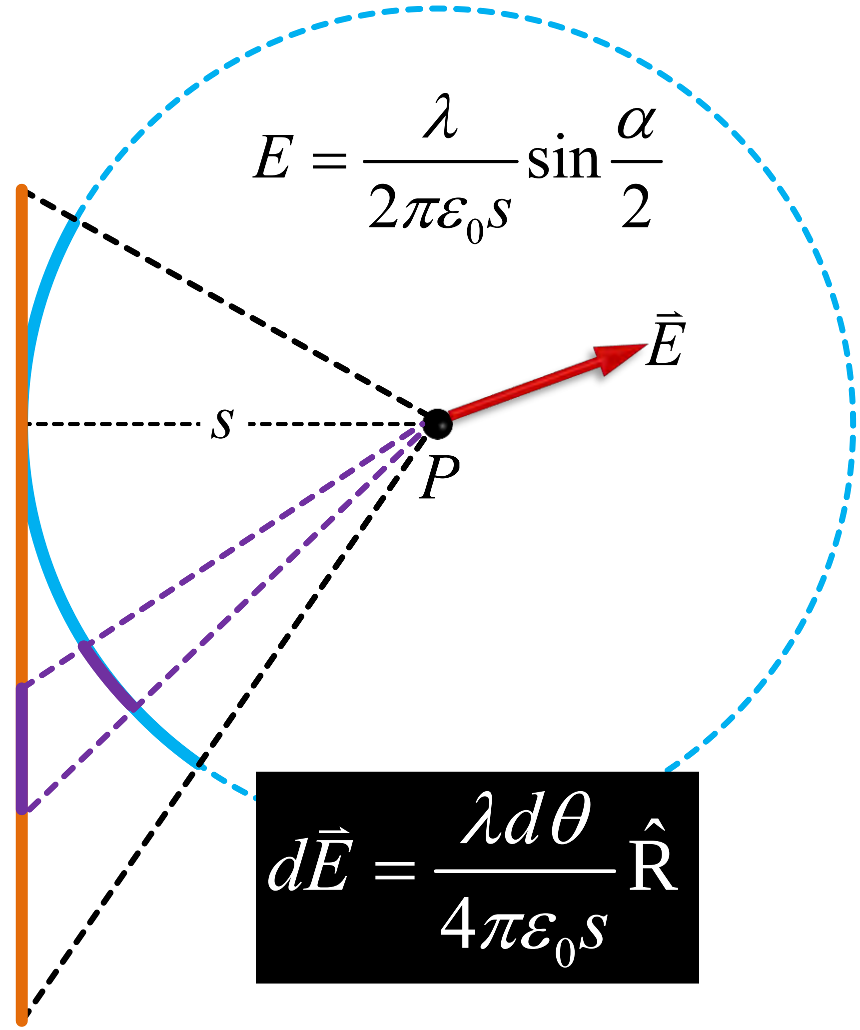

$\vec{E}$
+ + + + + + + + + +

特例：无限长均匀带电细棒

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 s}\hat{s}$$

圆弧与细棒的等价性（密度相同）





$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 s}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$d\vec{E} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 s}\hat{\mathrm{R}}$$

【例】均匀带电圆环轴线上的电场。

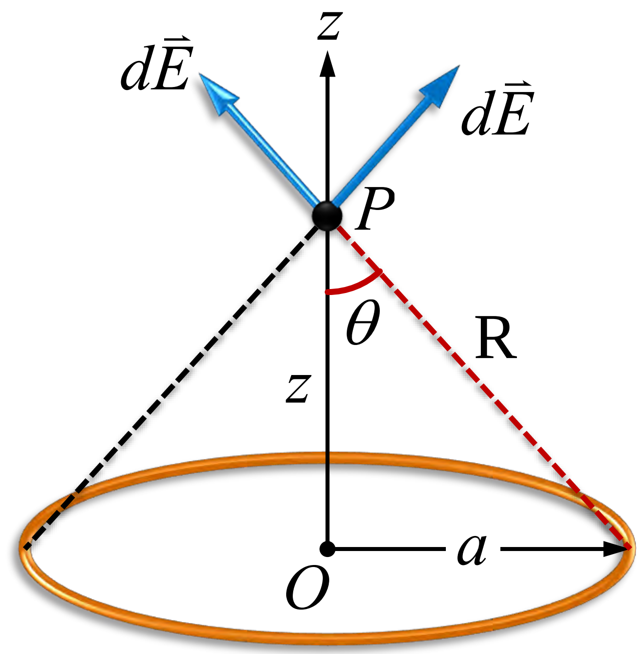
【解】

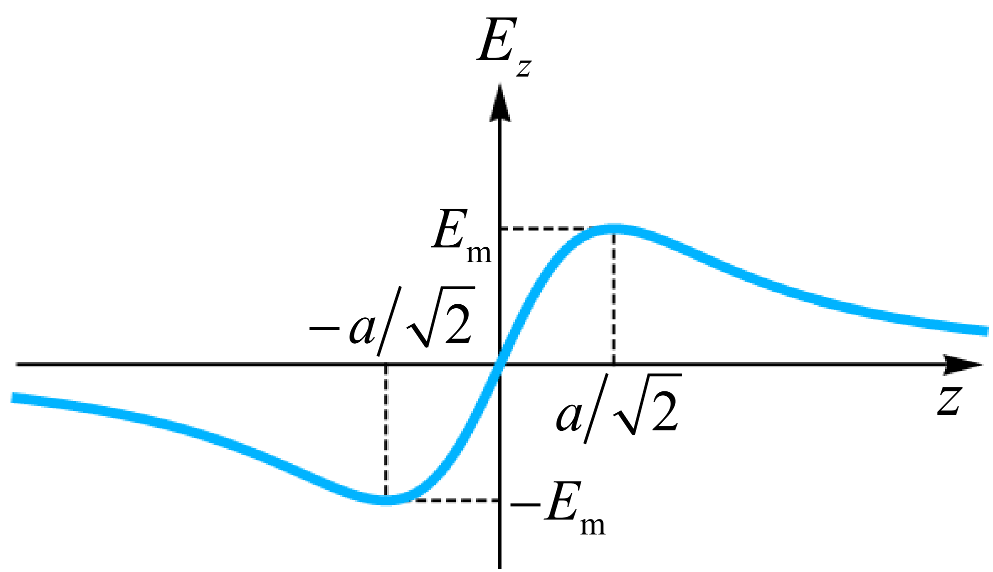
$$\vec{E} = E\hat{z} = \hat{z}\int \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}^2}\cos\theta$$

$$= \hat{z}\int \frac{\lambda z dl}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}^3}$$

$$= \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}^3}\hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{z}$$



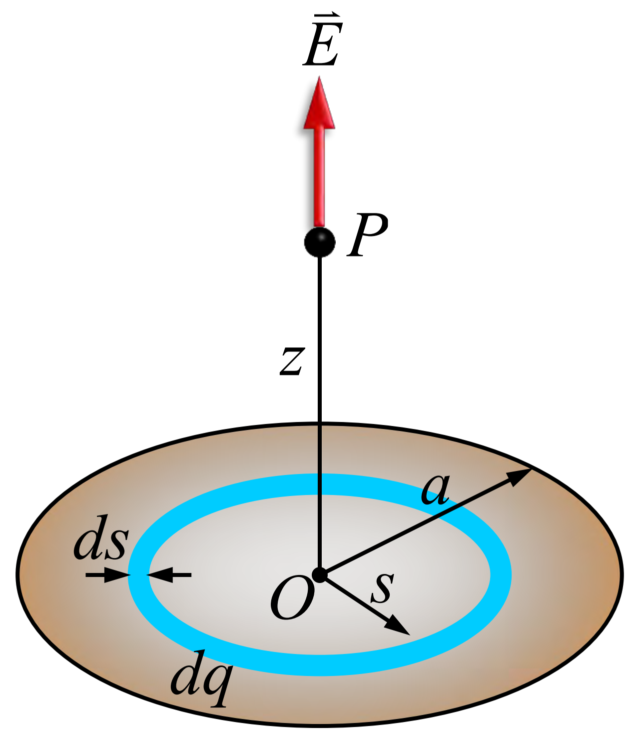


【例】均匀带电圆盘轴线上的电场。

【解】半径为 s 的环的电场

$$\vec{E}_{环} = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0\left(s^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{z}$$

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{\sigma z s ds}{2\varepsilon_0\left(s^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{z}$$

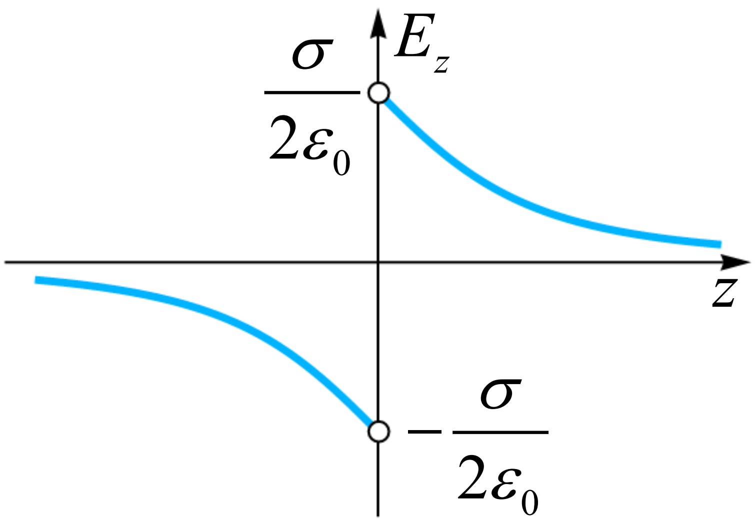


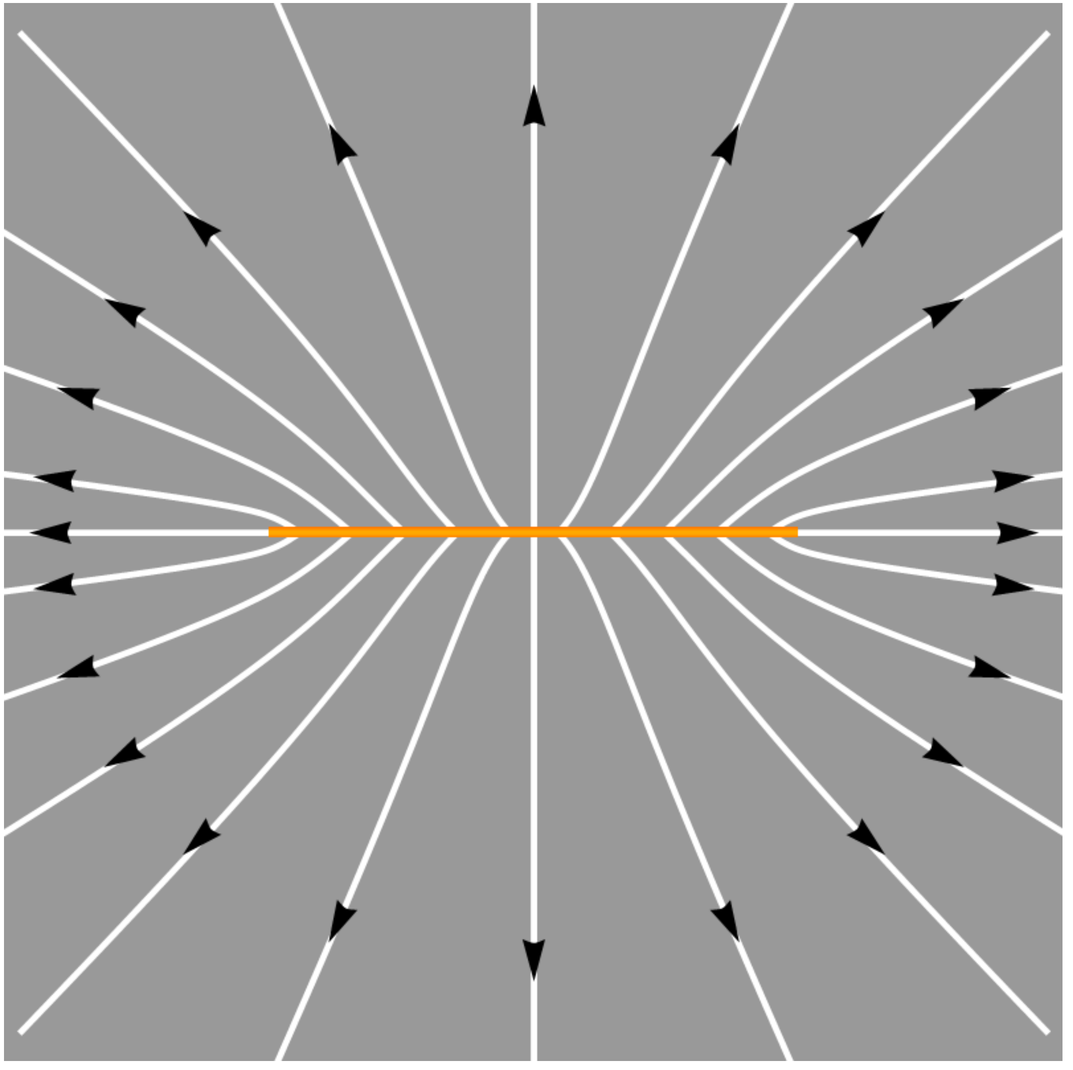
$$\boxed{dq = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi s ds}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \int_0^a d\vec{E} = \hat{z}\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_0^a \frac{s ds}{\left(s^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \hat{z}\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{s^2+z^2}}\right]_0^a = \hat{z}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

$$\vec{E} = \hat{z}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)$$

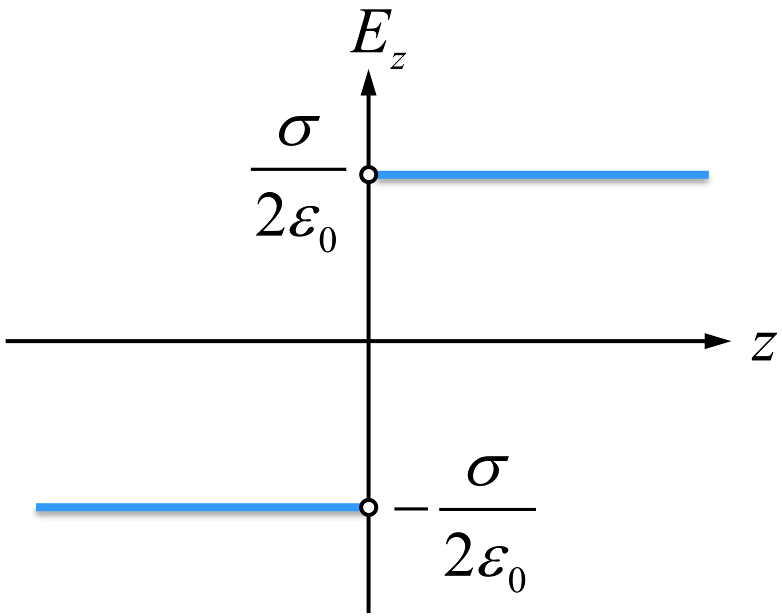


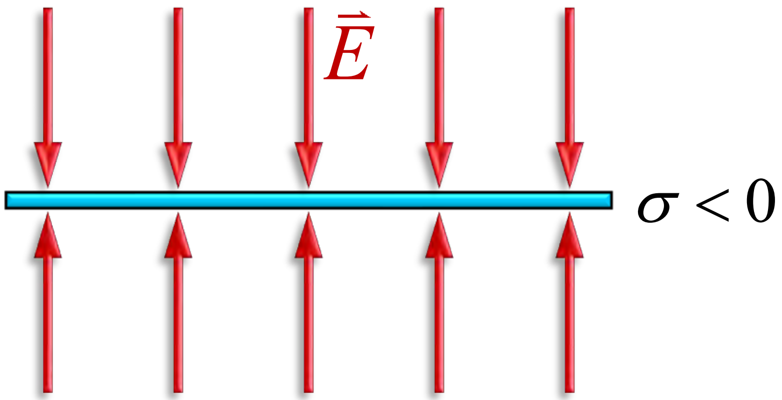


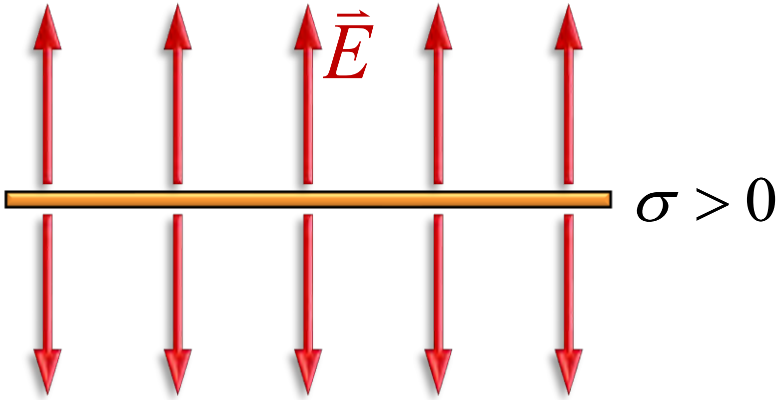
思考：$z = 0$ 处的电场?

特例：无限大均匀带电平面

$$\vec{E} = \hat{z}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|} = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}, & z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}, & z < 0 \end{cases}$$



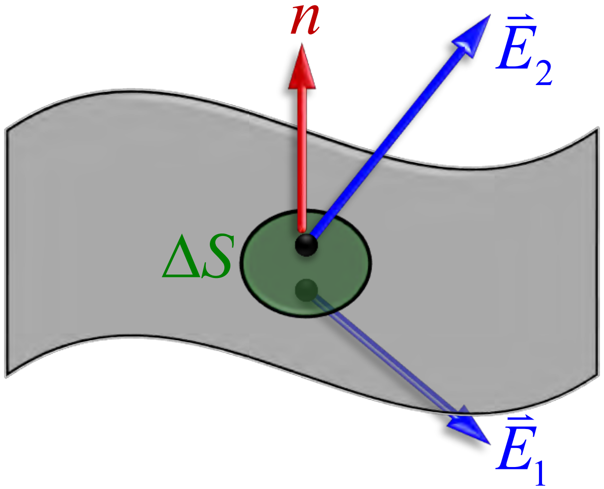




七、边值关系

边值关系：面电荷**两侧无限靠近**的两点处电场强度的关系。

- 空间任一点的电场等于电荷元 $\sigma\Delta S$ 产生的电场 E_S 以及其他电荷产生的电场 E' 之叠加：



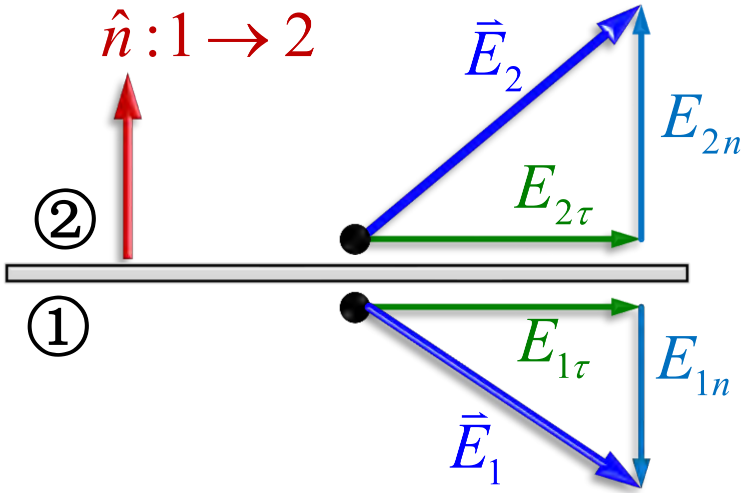
$$\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{E}'$$

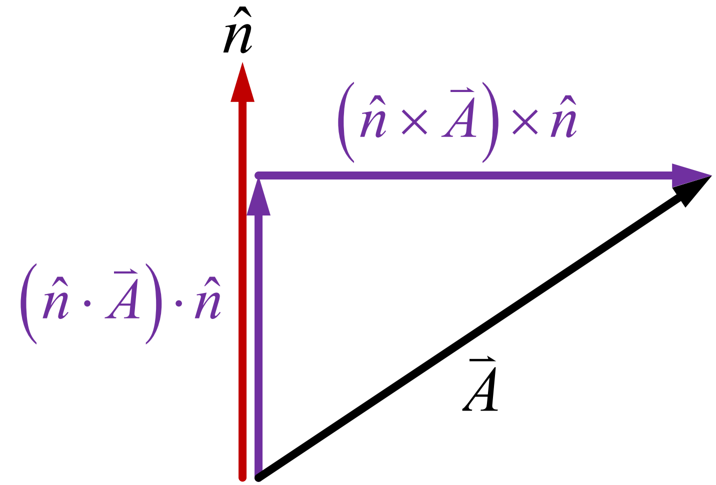
➢ $\sigma\Delta S$ 在面两侧产生的场不连续：

$$\vec{E}_{S1} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}, \quad \vec{E}_{S2} = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

➢ E' 在面的上下两侧连续： $\vec{E}_1' = \vec{E}_2' \triangleq \vec{E}_0'$

$$E_1 = E_{S1} + E_1' = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} + E_0', \quad E_2 = E_{S2} + E_1' = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} + E_0'$$





- 电场的边值关系： $\vec{E}_2-\vec{E}_1=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$

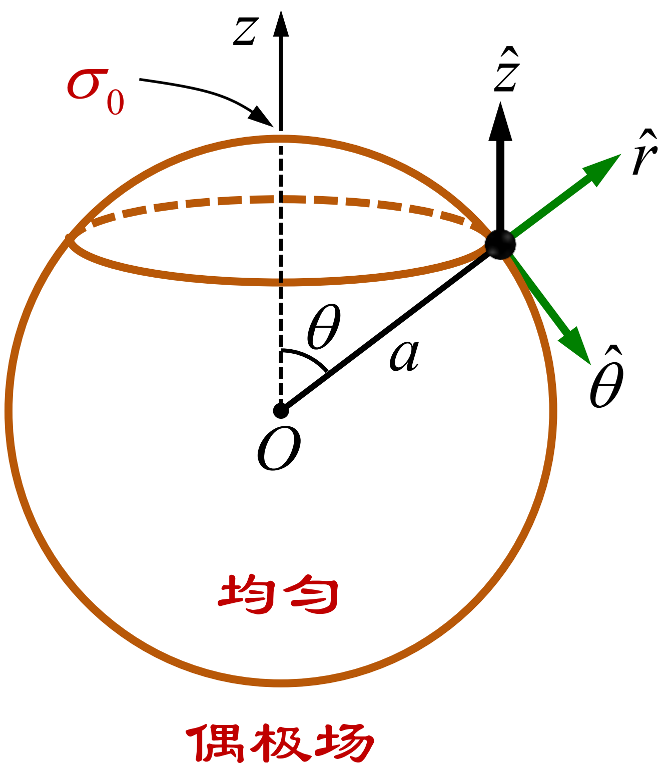
(1) 电场在面电荷两侧的法向分量不连续

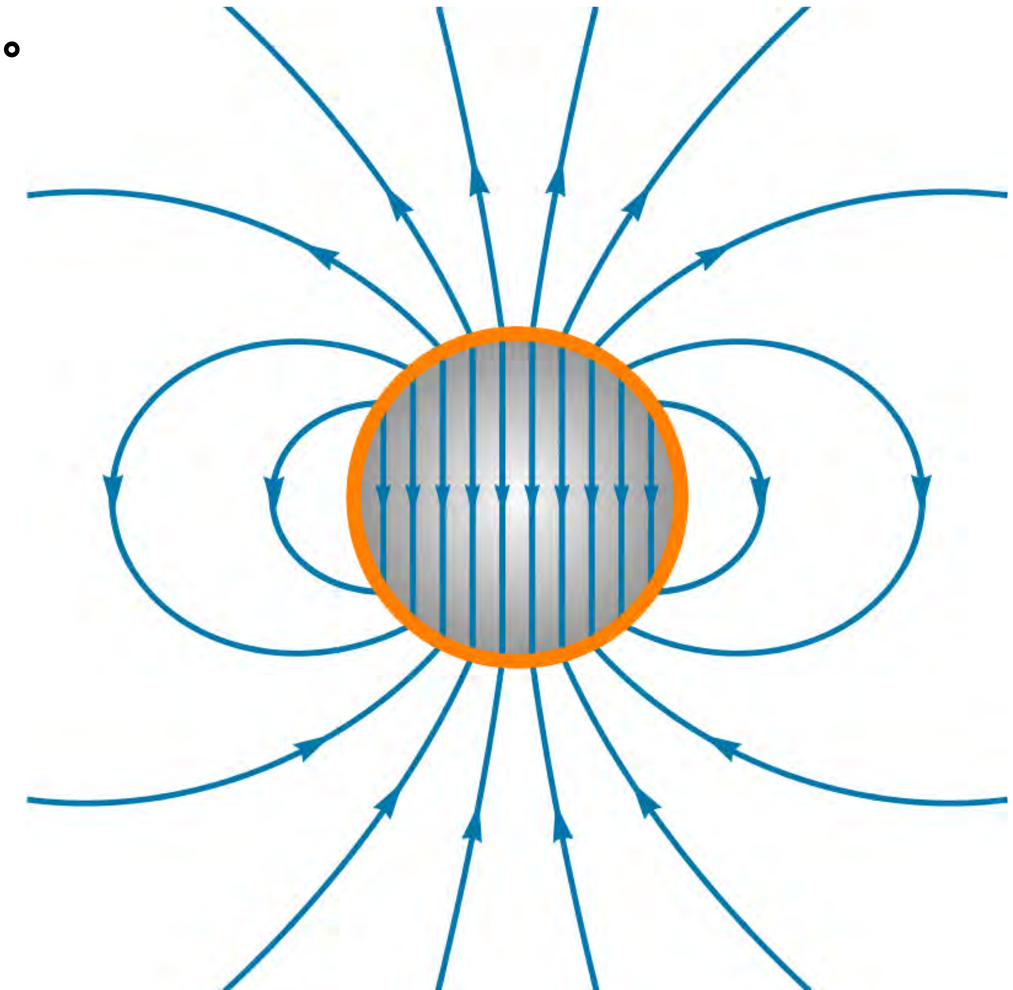
$$\hat{n}\cdot\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\quad\text{或}\quad E_{2n}-E_{1n}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

(2) 电场在面电荷两侧的切向分量连续

$$\hat{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0\quad\text{或}\quad E_{2\tau}=E_{1\tau}$$

【例】半径为 a 的球面上有面电荷分布，过球心的 z 轴是该电荷分布的对称轴，且极角 $\theta=0$ 处的面电荷密度为σ_0。已知该电荷分布在球内产生的电场是均匀的，在球外产生的电场与位于球心的理想电偶极子产生的电场相同。试确定球面上的电荷分布及其产生的电场。





【解】对称性→球内电场及电偶极矩均沿着 z 轴方向。设

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_1\hat{z} = E_1\left(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta\right), & r<a \\ \vec{E}_2 = \dfrac{3\left(\vec{p}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \dfrac{p\left[\hat{r}\left(2\cos\theta\right)+\hat{\theta}\sin\theta\right]}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, & r>a \end{cases}$$

切向边值关系： $\hat{\theta}\cdot\vec{E}_2 = \hat{\theta}\cdot\vec{E}_1$

$$\Longrightarrow \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\sin\theta = -E_1\sin\theta \Longrightarrow E_1 = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

法向边值关系： $\hat{r}\cdot\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = \sigma/\varepsilon_0$

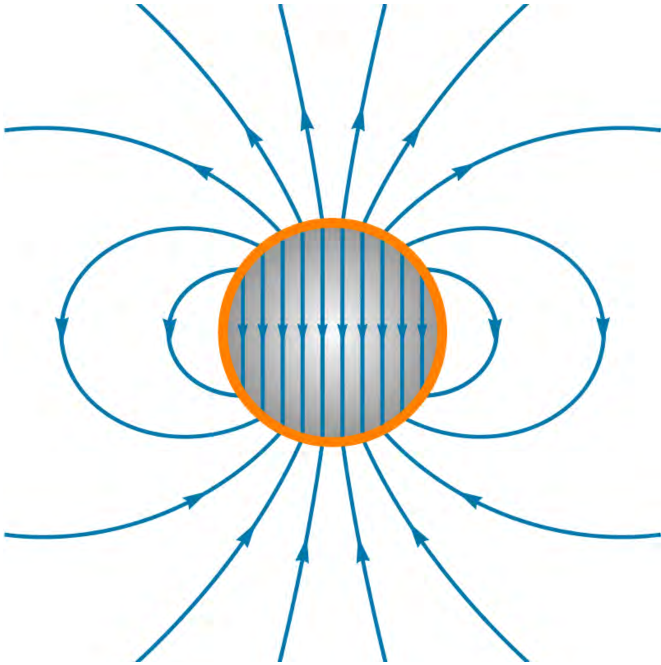
$$\Longrightarrow \left(\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 a^3} - E_1\right)\cos\theta = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \sigma = -3E_1\cos\theta$$

又由于在 $\theta = 0$ 处的面电荷密度为 σ_0，联立方程

$$E_1 = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}, \qquad \sigma = -3E_1\cos\theta$$

得到

$$E_1 = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}, \qquad p = \frac{4\pi R^3}{3}\sigma_0, \qquad \sigma = \sigma_0\cos\theta$$



- 球面上的面电荷密度：$\sigma = \sigma_0\cos\theta$
- 球内的电场：$\vec{E}_1 = -\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\hat{z}$
- 球外的电场：$\vec{E}_2 = \dfrac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r^3}\left[3(\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r}-\hat{z}\right]$

【方法二】电场的边值关系为

$$\vec{E}_2\left(r\to a^+\right)-\vec{E}_1\left(r\to a^-\right)=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left[3\left(\hat{z}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}-\hat{z}\right]-E_1\hat{z}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{r}$$

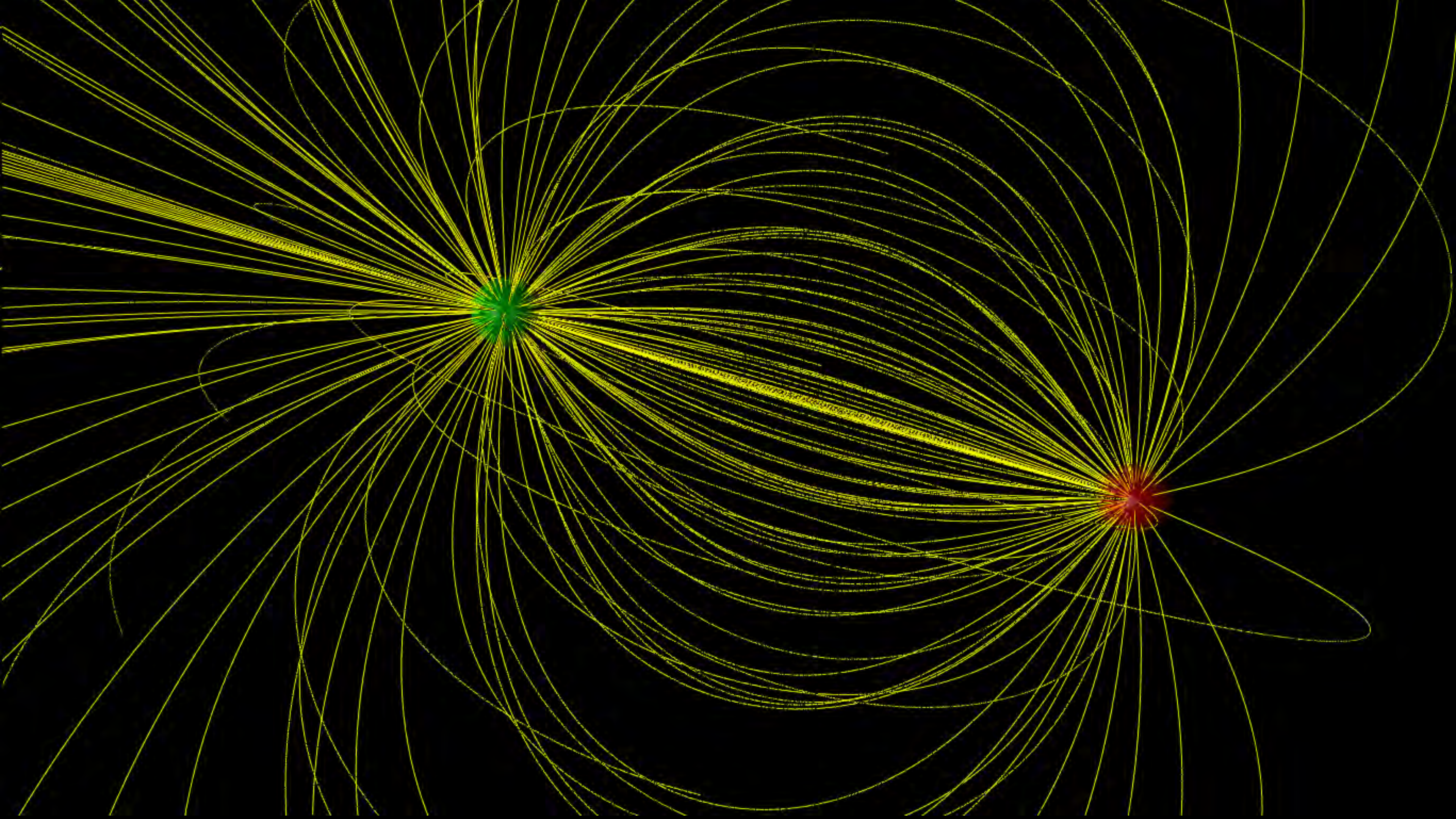
（1）左右两边同时叉乘 $\hat{r}$ ：

$$-\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}+E_1\right)\left(\hat{z}\times\hat{r}\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad E_1+\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}=0$$

（2）左右两边同时叉乘 $\hat{z}$ ：

$$\frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(\hat{z}\cdot\hat{r}\right)\left(\hat{r}\times\hat{z}\right)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\hat{r}\times\hat{z}\right) \quad\Longrightarrow\quad \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\cos\theta=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

由此也可得同样的结果。



Thank You!