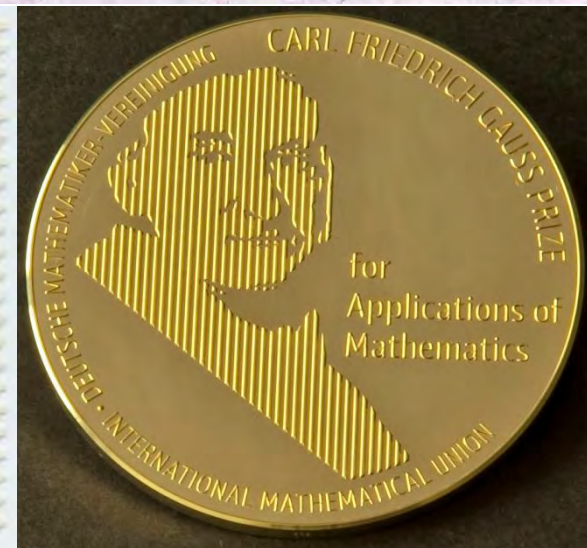


§1-5 高斯定理



C. F. Gauss.
*Thou nature art my goddess, to thy laws
My services are bound.*



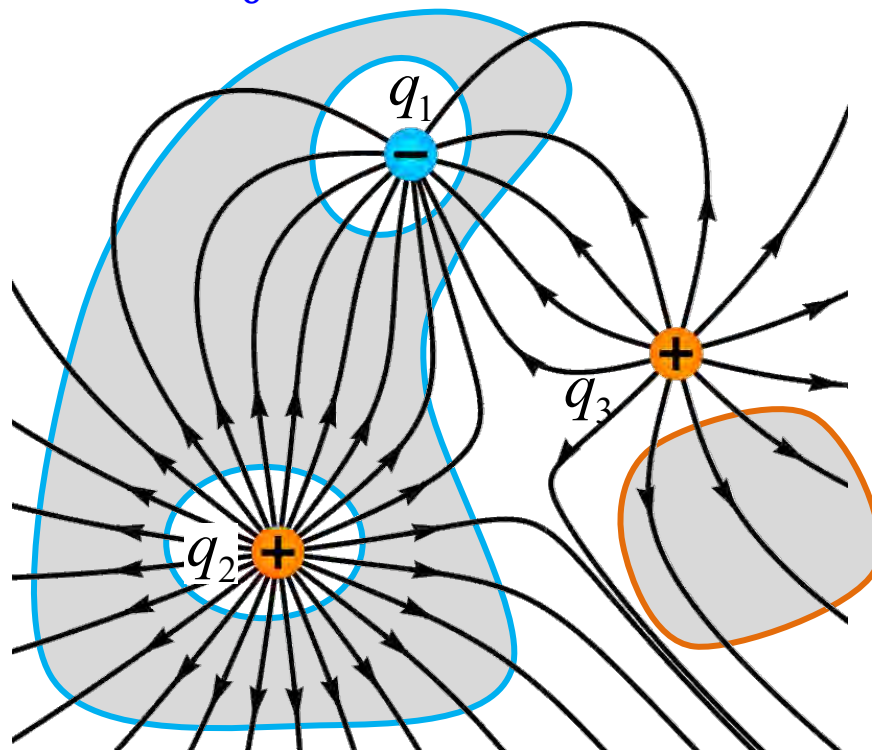
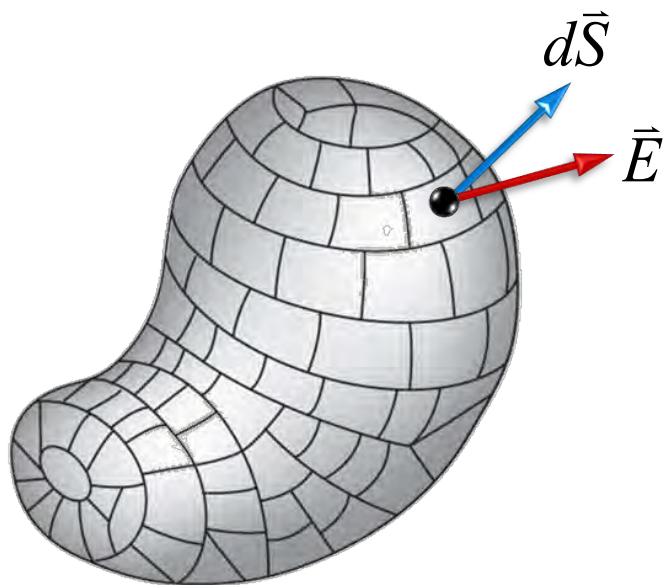
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

- Gauss是德国数学家，也是物理学家，高斯是近代数学奠基者之一，在历史上影响之大，可以和阿基米德、牛顿并列，有“数学王子”之称。
- 高斯的数学研究几乎遍及所有领域，在数论、代数学、非欧几何、复变函数和微分几何等方面都做出了开创性的贡献。由于高斯在数学、天文学、大地测量学和物理学中的杰出研究成果，他被选为许多科学院和学术团体的成员。
“数学之王”的称号是对他一生恰如其分的赞颂。
- 1839年，Gauss发表重要论文《关于与距离的平方成反比的吸引力或排斥力的普遍定理》，严格证明了Poisson方程，并给出静电学Gauss定理。

一、高斯定理

穿过闭曲面 S 的电场通量 $= \frac{S \text{ 内包含的总电量}}{\text{真空介电常数 } \varepsilon_0}$

$$\Phi_E \triangleq \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{内}}}{\varepsilon_0}$$



1. 高斯定理的证明

● 一个点电荷

位于原点 O 处的点电荷 Q 激发的电场为：

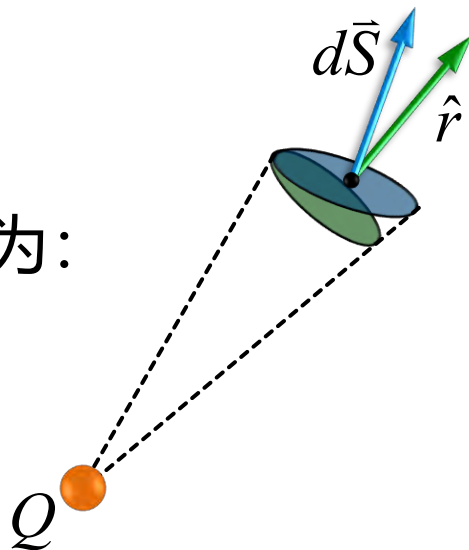
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

穿过闭曲面 S 的通量为

$$\Phi_E \triangleq \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

其中 Ω 为闭曲面 S 相对于 O 点所张立体角，因此

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi, & O \text{ 在 } S \text{ 内} \\ 0, & O \text{ 在 } S \text{ 外} \end{cases} \longrightarrow \Phi_E = \begin{cases} Q/\epsilon_0, & Q \text{ 在 } S \text{ 内} \\ 0, & Q \text{ 在 } S \text{ 外} \end{cases}$$



● 点电荷系统

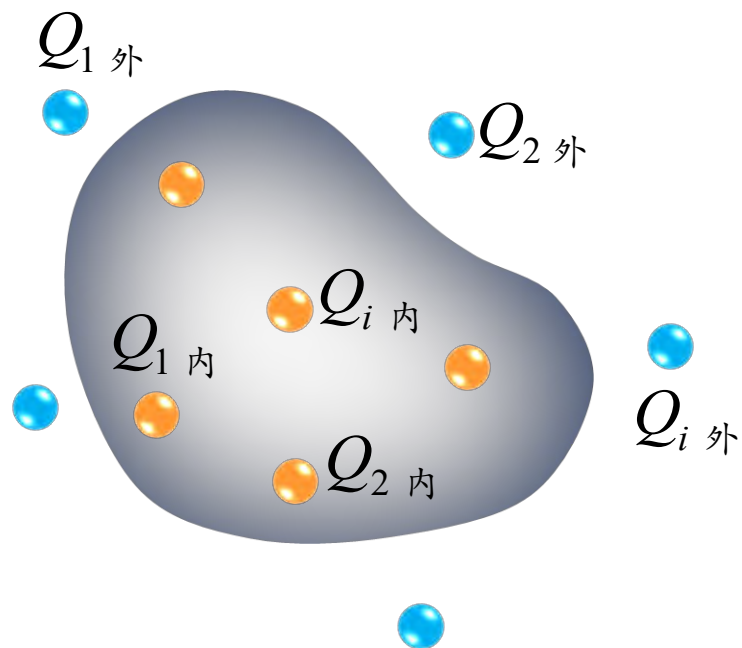
若空间中有若干点电荷，由叠加原理，总电场

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \longrightarrow \Phi_E \triangleq \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_i \oiint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S}$$

点电荷 Q_i 激发的电场 E_i 对电通量的贡献只决定于该点电荷是在闭曲面的**内部** (Q_i / ϵ_0) 还是**外部** (0)。这一结论就是静电场的高斯 (Gauss) 定理：

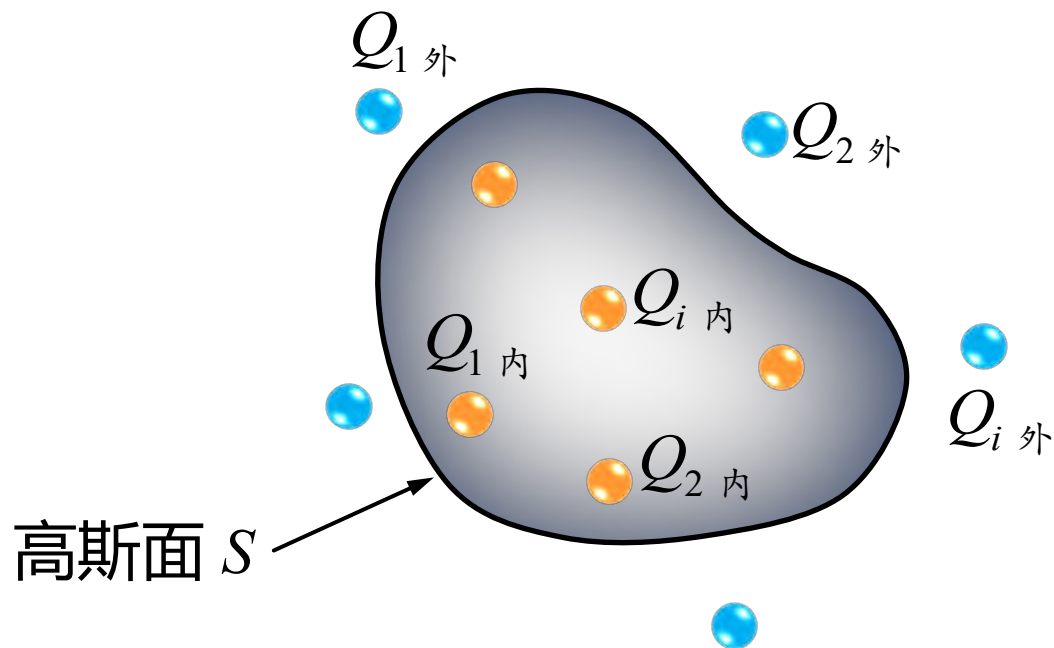
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_{i, \text{内}} = \frac{Q_{\text{内}}}{\epsilon_0}$$

显然，对于连续分布的电荷，高斯定理也成立。



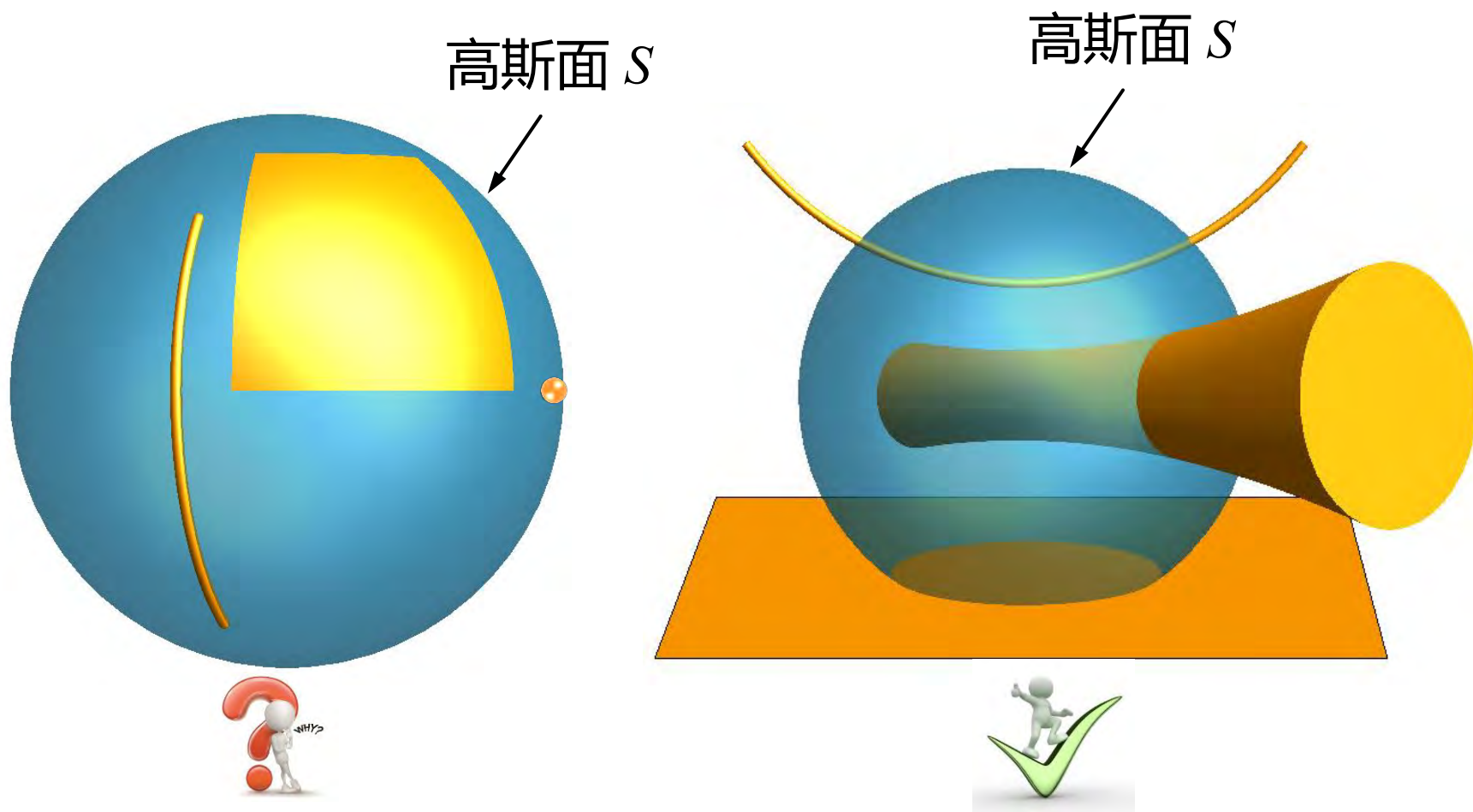
2. 高斯定理中的电场

- 用以计算电场通量的闭曲面称为**高斯面**。
- 用以计算电场通量的电场指的是**总电场**（高斯面内、外的电荷共同激发），而只有高斯面内的电荷激发的电场才对电通量有贡献，高斯面外的电荷激发的电场对电通量的贡献为零。



3. 高斯定理中的电量

- 高斯面上的电荷？



高斯面上不能有有限电荷的分布！

4. 高斯定理与库仑定律的关系

- 高斯定理是库仑定律的推论。

高斯定理主要反映了库仑定律的平方反比律，如果库仑定律不服从平方反比律，我们就不可能得到高斯定理。如果

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^{2+\delta}}$$

则通过半径为 r 的球面 S 的电通量为

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^{2+\delta}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^{2+\delta}} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{1}{r^\delta}$$

从而 $\Phi=\Phi(r)$ 。高斯定理不成立！

【注】 证明高斯定理的正确性是证明库仑定律中平方反比律的一种间接方法。直接用扭秤法证明平方反比律的精度是非常低的，通过高斯定理证明平方反比律可获得非常高的精度。

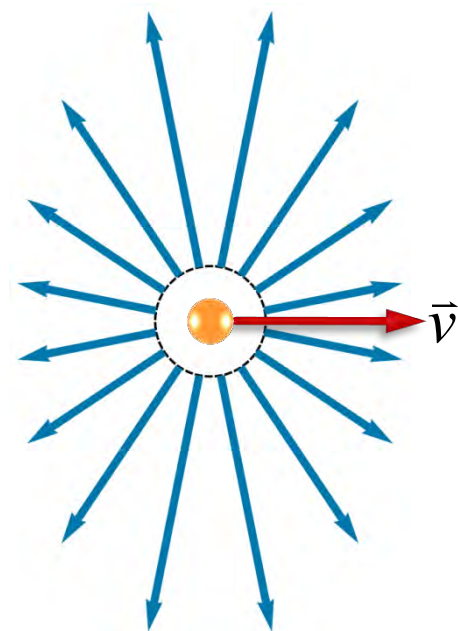
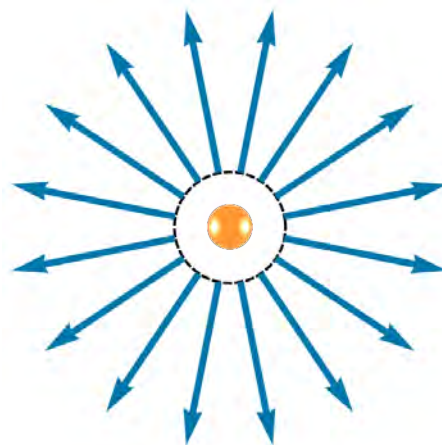
- **高斯定理比库仑定律更普适。**

高斯定理是静电场的一条重要基本定理。

高斯定理是库仑定律为基础导出的，但其使用范围远远超出静电场。库仑定律决定静电场具有平方反比律、径向性和球对称性。

实验表明，即便是随时间变换的电场仍然满足高斯定理。譬如匀速运动点电荷，由于运动方向的特殊性破坏了球对称性，其激发的电场为

$$\vec{E} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

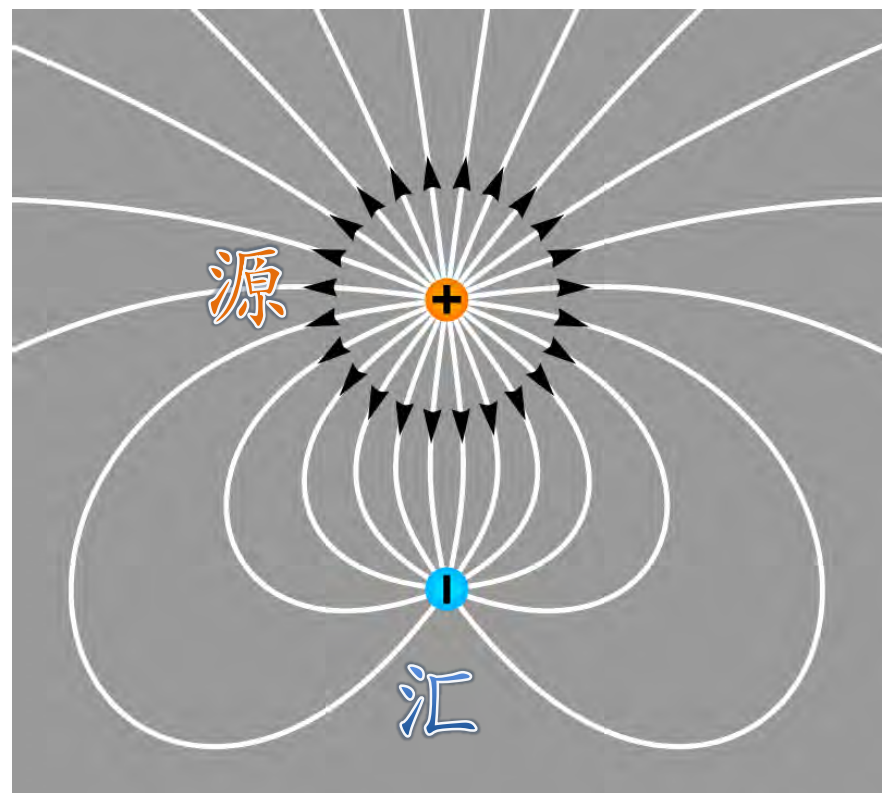


5. 高斯定理的物理含义

高斯定理表明：静电场是有源场。

- 正电荷是静电场的源，负电荷是静电场的汇。
- 对于点电荷系统，电荷发出或接收的电场线数目（代数和）与其电量成正比。

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$$



6. 高斯定理的微分形式

由于 $Q = \iiint_V \rho dV$ 以及 (数学高斯定理)

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV$$

因此，高斯定理可以写为

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

此式对于任意 V 皆成立，故高斯定理可以写成微分形式：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

表明电场线不会在没有电荷的地方产生或消失。

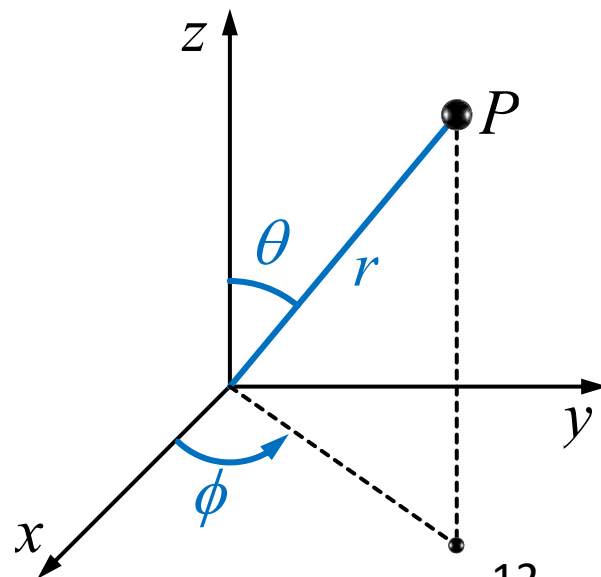
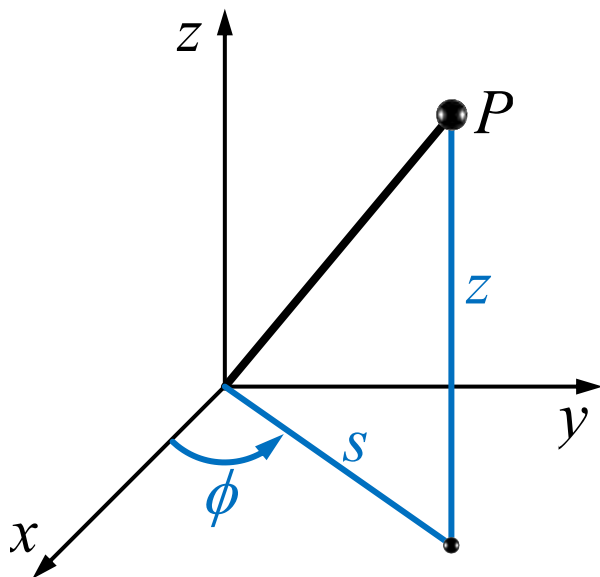
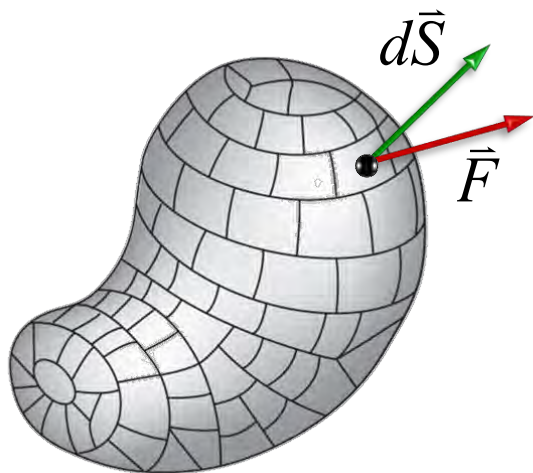
● **散度**的定义:

$$\nabla \cdot \vec{F} \triangleq \lim_{V \rightarrow 0} \left[\frac{1}{V} \oiint_{S=\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} \right]$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z \quad (\text{直角坐标系})$$

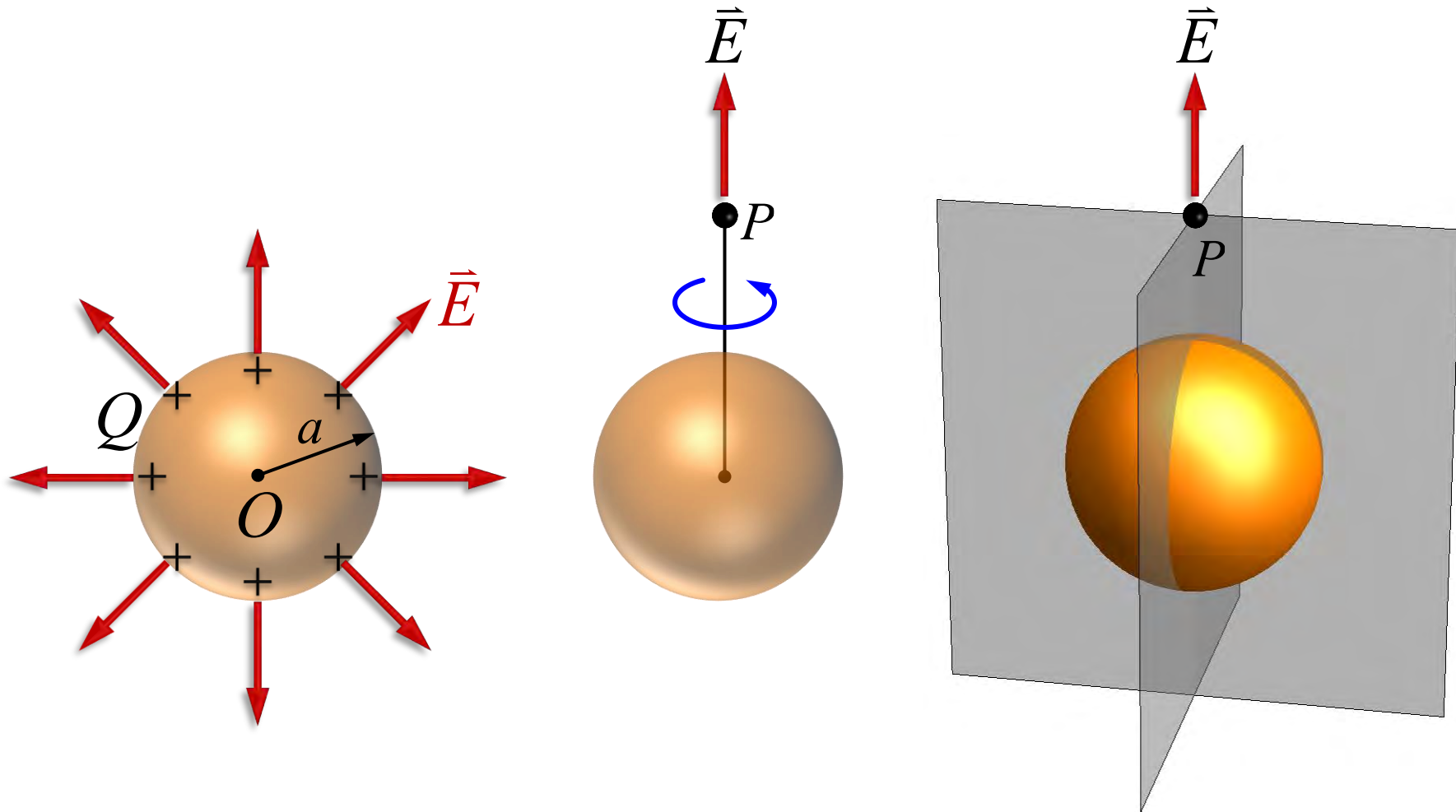
$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{s} \partial_s (s F_s) + \frac{1}{s} \partial_\phi F_\phi + \partial_z F_z \quad (\text{柱坐标系})$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi F_\phi \quad (\text{球坐标系})$$



二、高斯定理应用举例

【例】求电量为 Q 、半径为 a 的均匀带电球面产生的电场。



【解】 由对称性知，无论球内还是球外，电场的方向必定沿着径向（以球心为原点），大小则只与径向距离有关。即

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

选择半径为 r 的同心球面作为高斯面，有

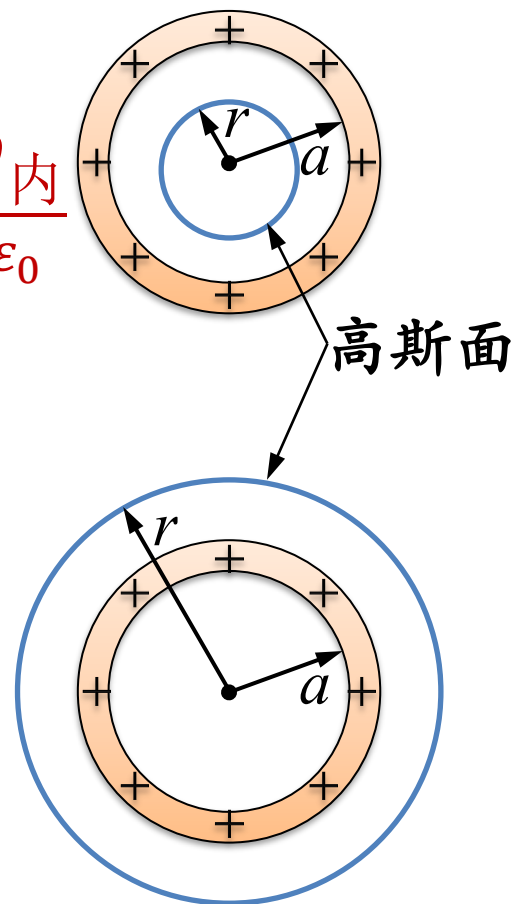
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E dS = E \oiint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{内}}}{\epsilon_0}$$

如果 $r < a$ ，那么

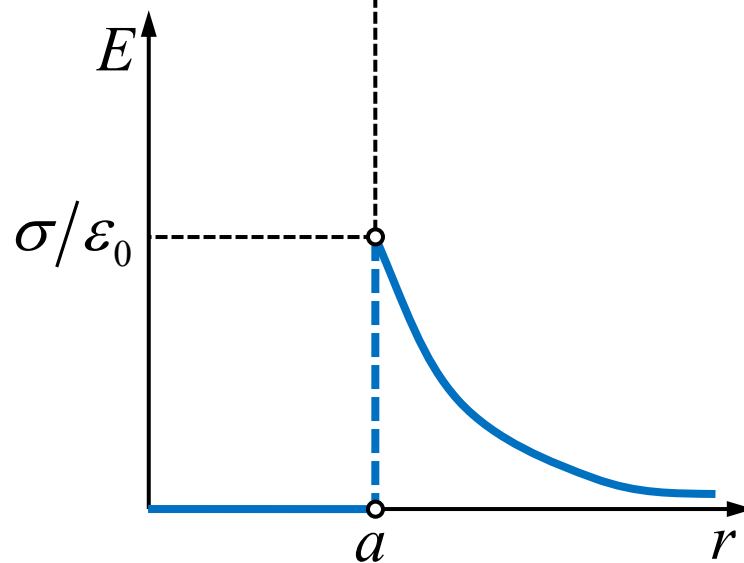
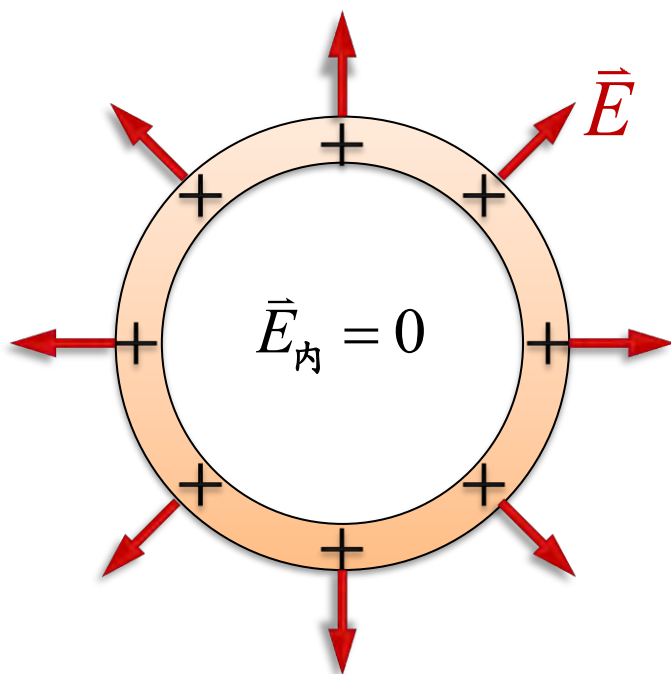
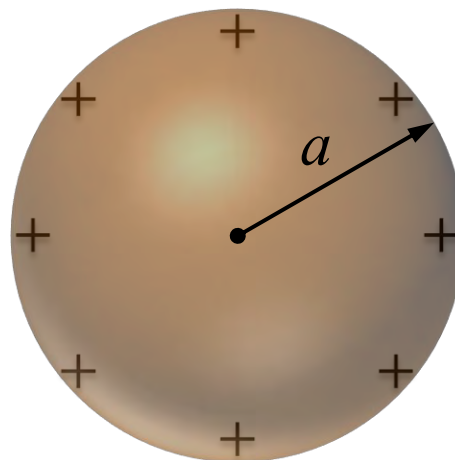
$$Q_{\text{内}} = 0 \longrightarrow E = 0$$

如果 $r > a$ ，那么

$$Q_{\text{内}} = Q \longrightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{a^2}{r^2} \hat{r}, & r > a \\ 0, & r < a \end{cases}$$



【例】 求电量为 Q 、半径为 a 的均匀带电球体产生的电场。

【解】 由对称性知 $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$

选择半径为 r 的同心球面作为高斯面

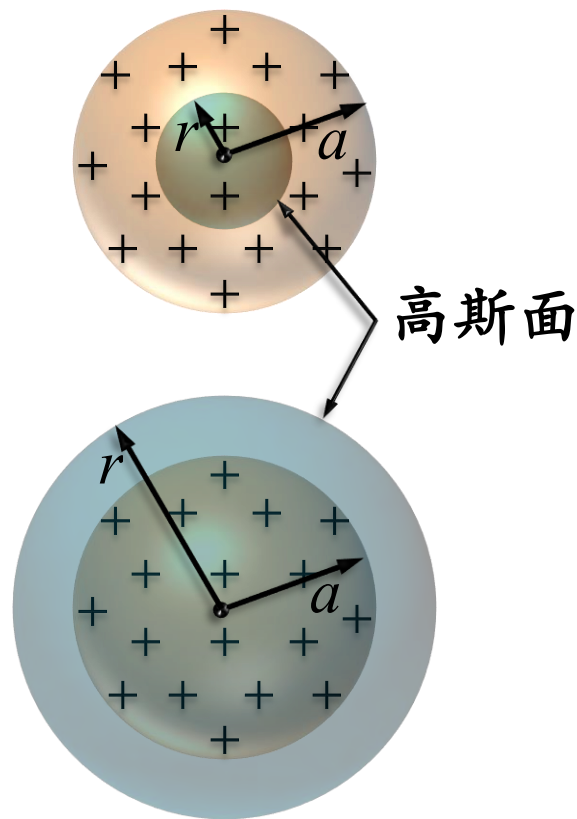
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oiint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{内}}}{\epsilon_0}$$

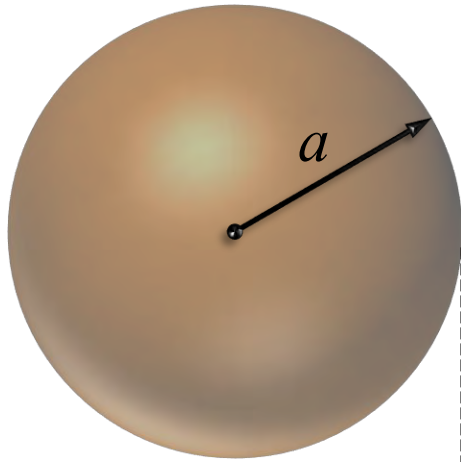
如果 $r < a$, 那么

$$Q_{\text{内}} = \frac{r^3}{a^3} Q \longrightarrow E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

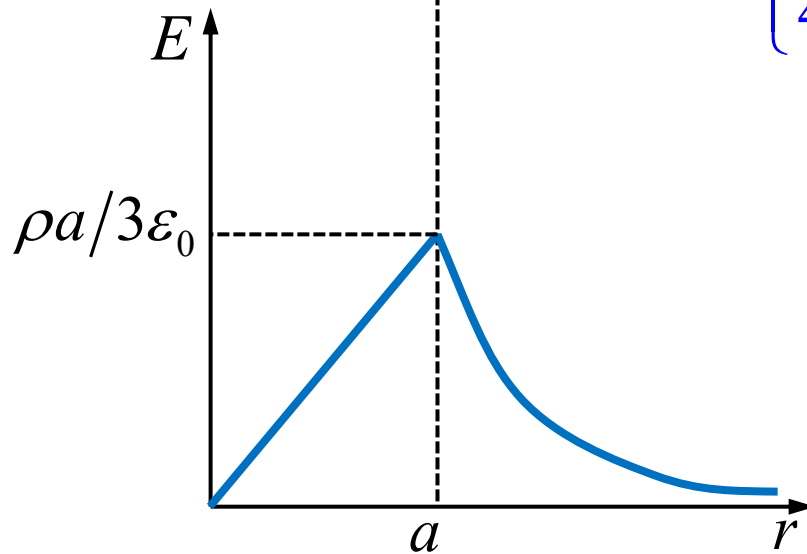
如果 $r > a$, 那么

$$Q_{\text{内}} = Q \longrightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$





$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} & = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^3} \vec{r}, & r \geq a \\ \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 a^3} & = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}, & r \leq a \end{cases}$$



【例】 求无限大均匀带电平面产生的电场。面电荷密度为 σ 。

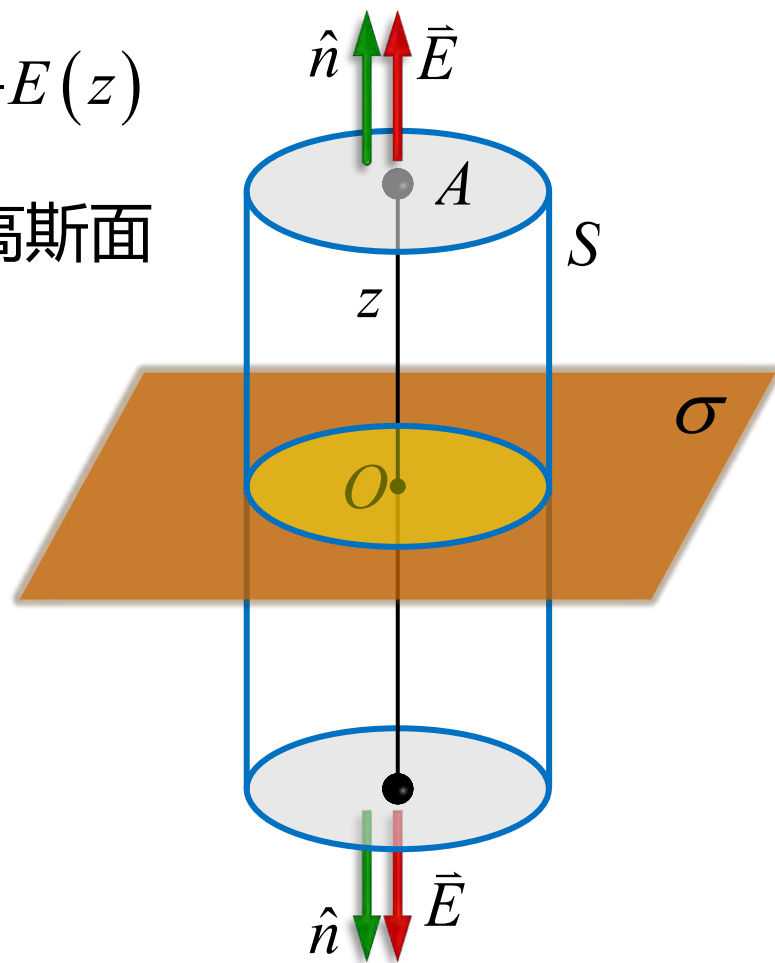
【解】 由对称性知

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{z} \quad \text{且} \quad E(-z) = -E(z)$$

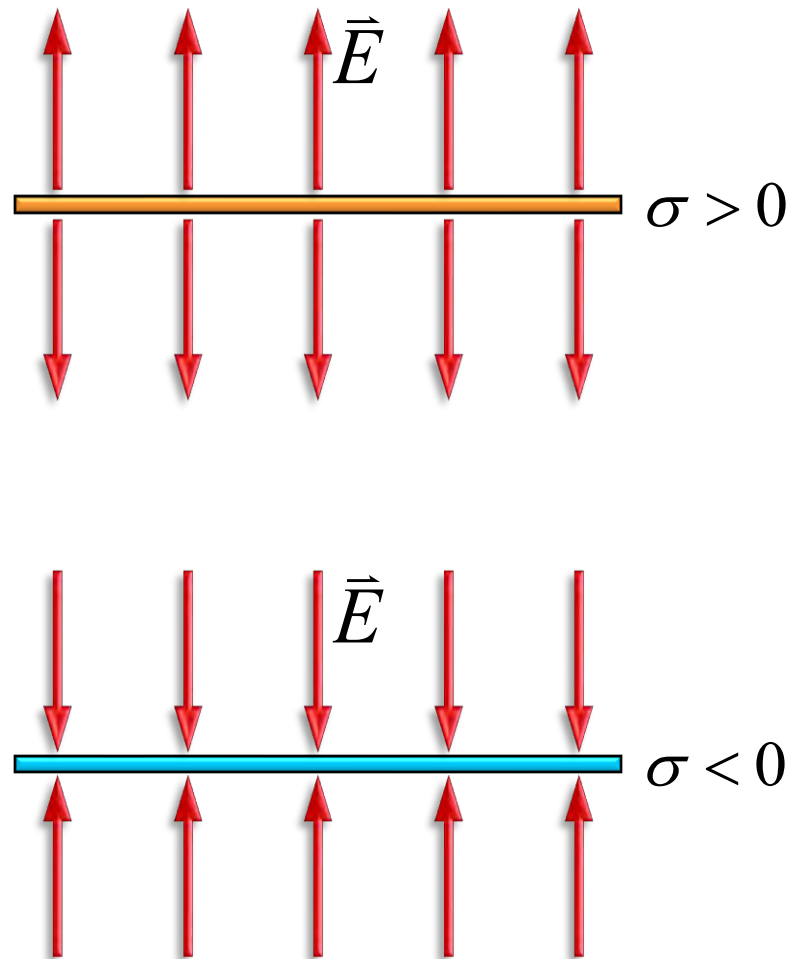
选择底面积 A 、高 $2z$ 的柱面作为高斯面

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_{\text{上}} + \Phi_{\text{下}} + \Phi_{\text{侧}} \\ &= E(z) \cdot A + E(-z) \cdot (-A) + 0 \\ &= 2E(z) \cdot A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

$$\longrightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



$$\vec{E} = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & z < 0 \end{cases}$$



【例】求无限大均匀带电细棒产生的电场。线电荷密度为 λ 。

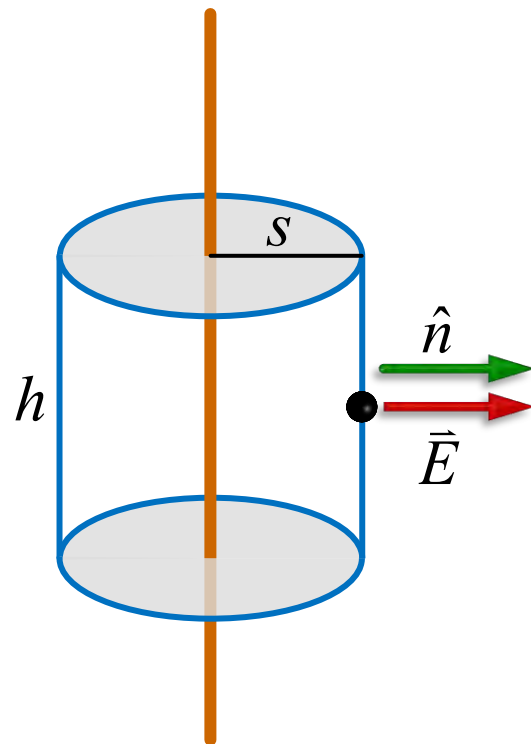
【解】由对称性知 $\vec{E}(\vec{r}) = E(s)\hat{s}$

选择半径为 s 、高为 h 的以细棒为对称轴的圆柱面作为高斯面

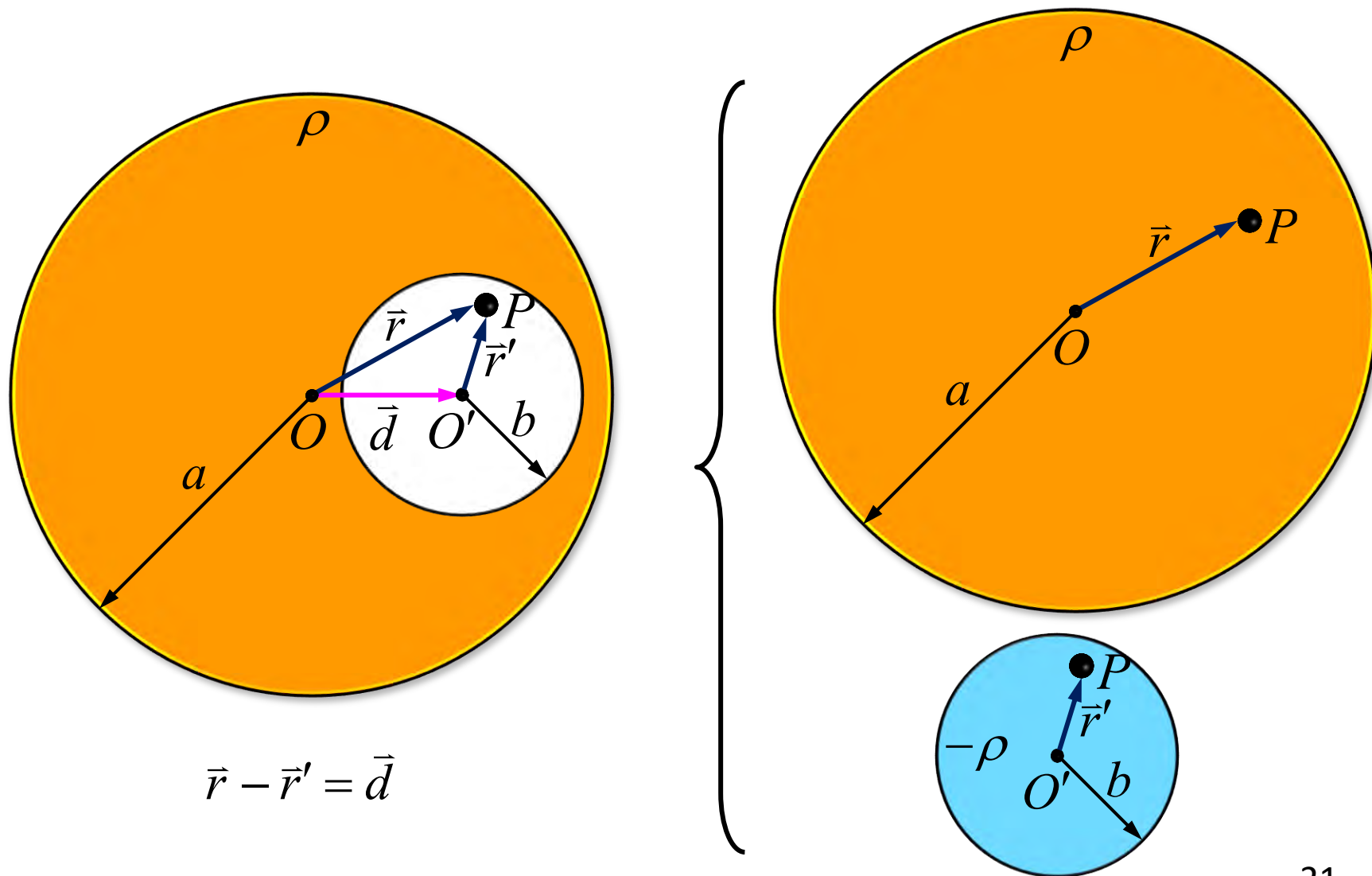
$$\Phi = \Phi_{\text{侧}} = E \cdot 2\pi sh = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\longrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}$$

$$\longrightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s}$$



【例】 求均匀带电球体中所挖出的球形空腔中的电场强度。
球体电荷密度为 ρ ，球体球心到空腔中心的距离为 d 。



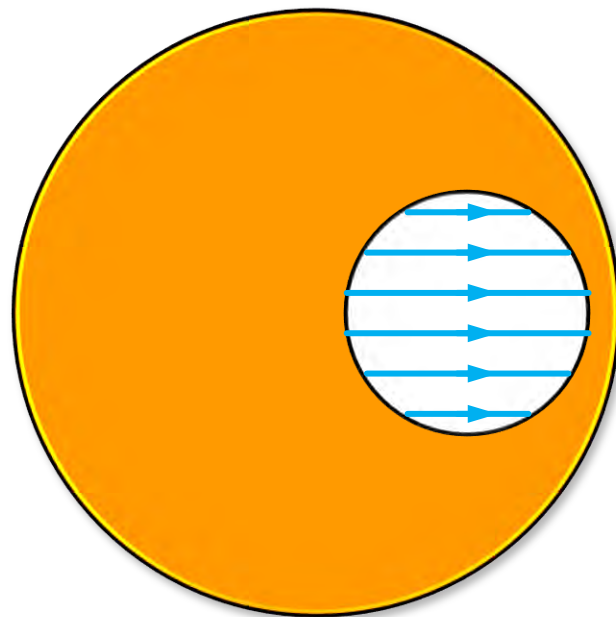
【解】 将空腔看作是同时填满 $+\rho$ 和 $-\rho$ 的电荷，腔内任一点的电场强度就由一个实心大球 ($+\rho$) 和一个实心小球 ($-\rho$) 的叠加而成。由于

$$\begin{cases} E_+ \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \frac{4}{3}\pi r^3 & \longrightarrow \vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r} \\ E_- \cdot 4\pi r'^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot (-\rho) \frac{4}{3}\pi r'^3 & \longrightarrow \vec{E}_- = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}' \end{cases}$$

所以

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\rho \vec{d}}{3\varepsilon_0}$$

空腔内电场是均匀的。



【例】 试求产生如下电场的电荷分布（其中 K 为常数）：

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{K}{3\varepsilon_0} \vec{r}, & r < a \\ \frac{K}{3\varepsilon_0} \frac{a^3}{r^3} \vec{r}, & r > a \end{cases}$$

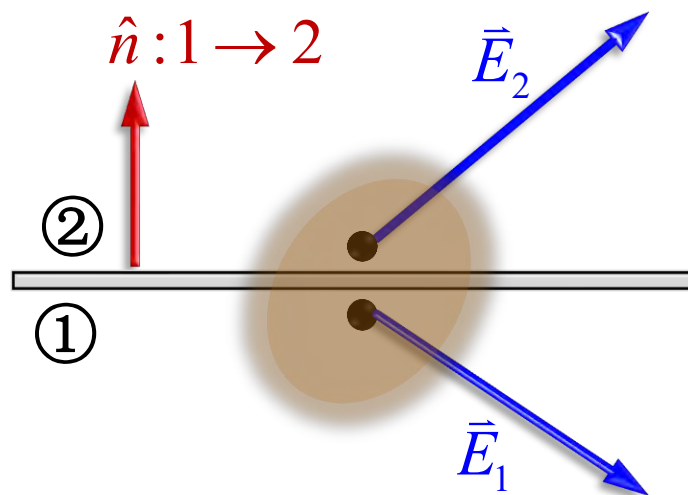
【解】 选择以原点为球心、半径为 r 的球面作为高斯面，由高斯定理，高斯面内的电量为

$$Q(r) = \varepsilon_0 \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 \longrightarrow Q(r) = \begin{cases} \frac{4\pi r^3}{3} K, & r < a \\ \frac{4\pi a^3}{3} K, & r > a \end{cases}$$

因此，激发该电场的是电荷密度为 K 、半径为 a 的均匀带电球体。

三、法向边值关系

设某曲面上有面电荷分布，试确定该曲面两侧无限靠近的两点处电场强度的**法向分量之间的关系**。所考察区域**可能有体电荷分布，但没有奇异电荷（点电荷、线电荷）**。



高斯面：横跨曲面的扁平盒子 ($h \ll a \rightarrow 0$)

穿过高斯面的电通量为

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_{\text{上}} + \Phi_{\text{下}} + \Phi_{\text{侧}} \approx \vec{E}_2 \cdot (a^2 \hat{n}) + \vec{E}_1 \cdot (-a^2 \hat{n}) + \underline{(Eah)}$$

高阶小量

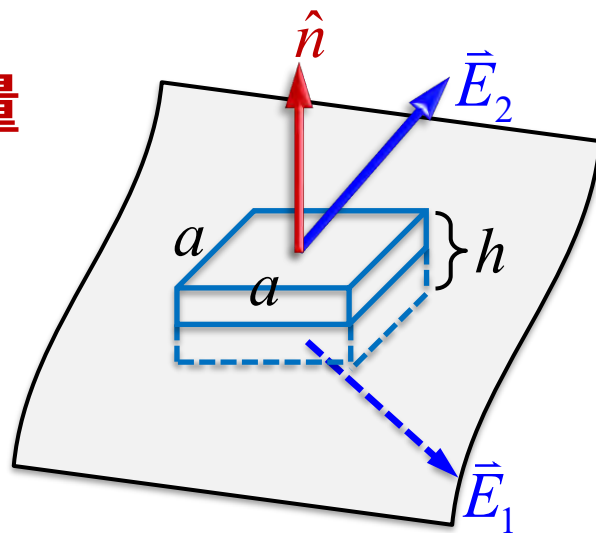
高斯面内包含的电量为

$$Q_{\text{内}} \approx \sigma a^2 + \underline{(\rho a^2 h)}$$

高阶小量

由高斯定理得到

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

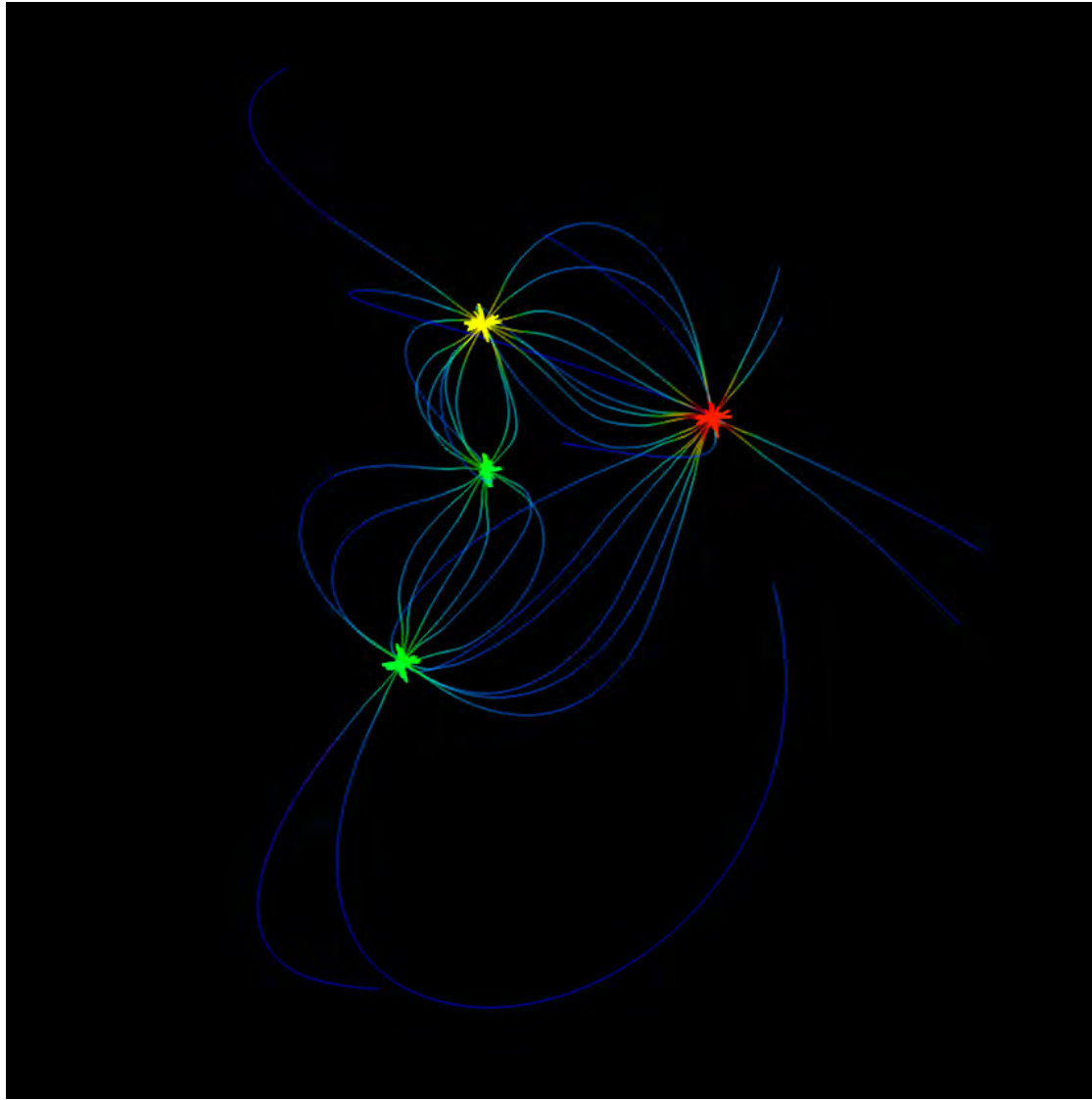


面电荷两侧电场的法向分量不连续!

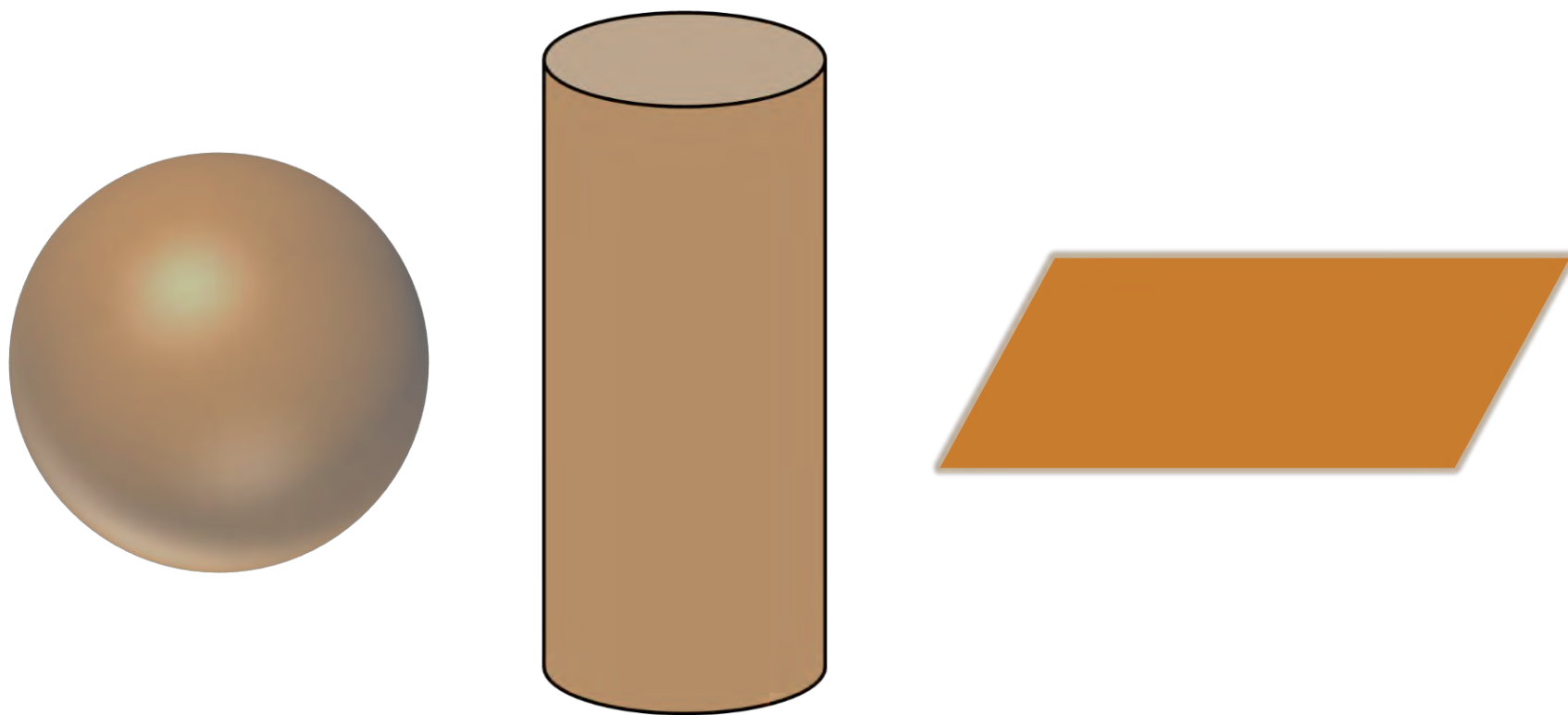
【注】 高斯定理无法给出面电荷两侧电场切向分量的关系。

问题

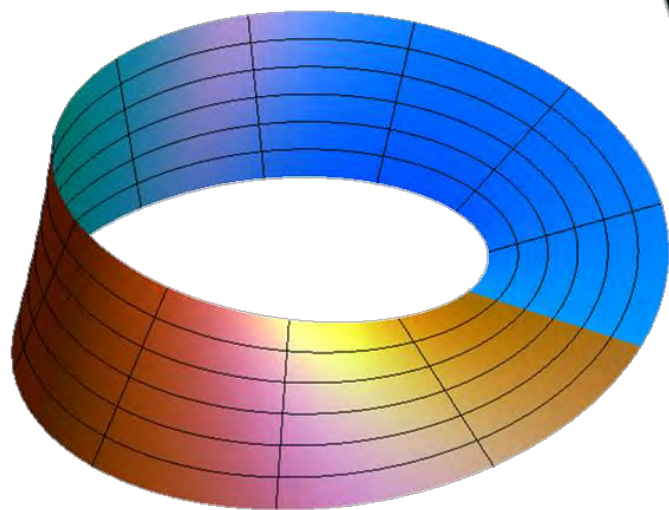
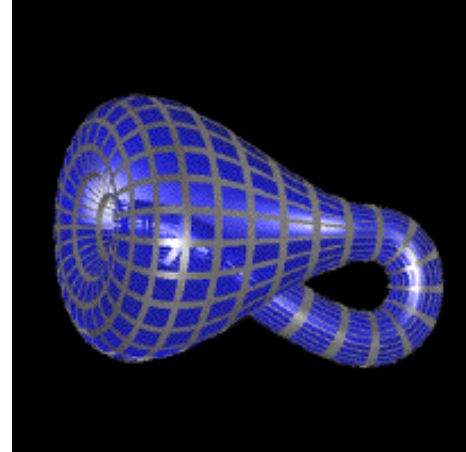
- 电场线方程以及复杂电荷体系的电场线计算与绘图。



- 研究在电力与距离3次方反比情况下的各种对称性电荷分布的电场强度。



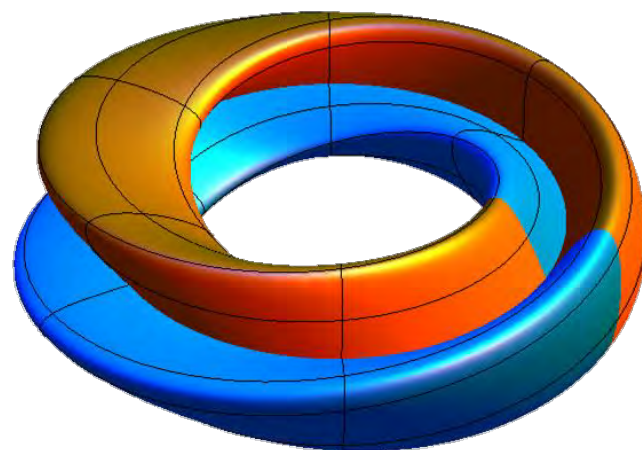
- 讨论穿过一些非定向曲面的电通量。



莫比乌斯带



克莱因瓶



8字形克莱因瓶

§1-6 环路定理



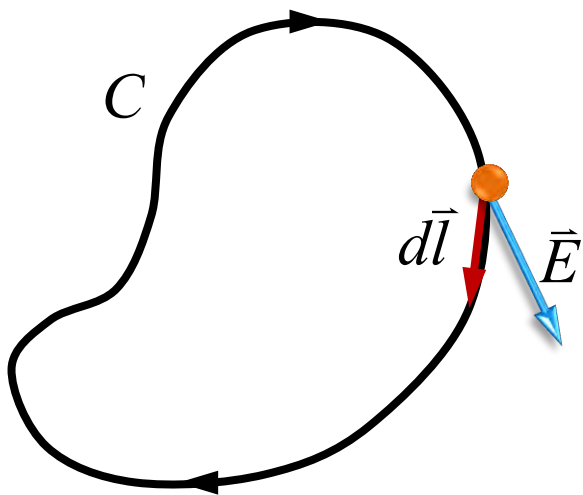
一、静电场的环量

静电场沿着闭合曲线 C 的**环量**定义为：

$$\Gamma \triangleq \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

反映静电场是否有旋。

- 线元 dl 的方向由回路 C 的绕行方向决定
- 物理上，等于**移动单位正电荷静电力做的功**。
- 数学上，该积分称为**线积分**。

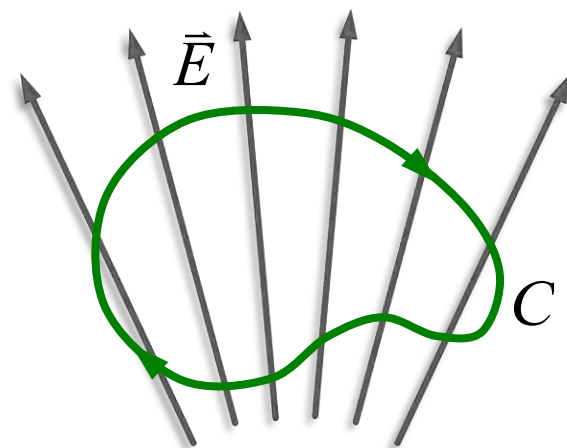


二、静电场的环路定理

静电场的**环路定理**：

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

静电场是无旋场。



- 静电力做功由起点和终点决定，与路径无关；
或 静电力沿任何闭合曲线做功为零。
- 静电场的无旋性来源于**库仑力是有心力**的特性，
而不是平方反比律。

【注】 有心力：方向沿着以力心为原点的径向，
大小只与径向距离有关。

- 静电场的电场线不可能是闭合曲线。

(反证法) 如果某条电场线 C 闭合, 则沿着该闭曲线

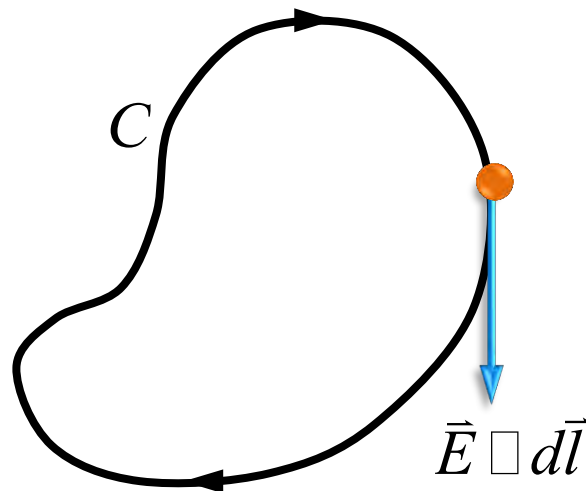
$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl$$

→

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$$



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



故静电场的电场线
不可能是闭合曲线。

三、环路定理的微分形式

由数学斯托克斯定理

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0$$

此式对于任意 S 皆成立，故环路定理可以写成微分形式：

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

在直角坐标系下，该方程表示为

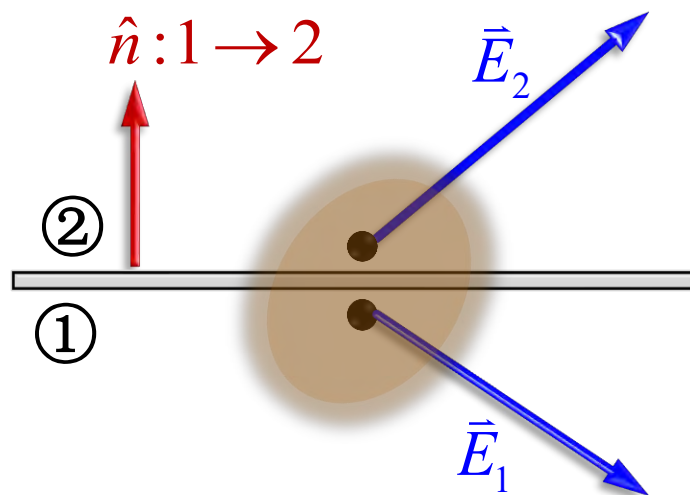
$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$



思考：如果 xy 平面上电场的 x 分量为 $E_x = ky$ ，关于其它分量，你能说些什么？

四、切向边值关系

设某曲面上有面电荷分布，试确定该曲面两侧无限靠近的两点处电场强度的**切向分量之间的关系**。所考察区域**可能有体电荷分布，但没有奇异电荷（点电荷、线电荷）**。



回路C：横跨曲面的扁平长方形 ($h \ll l \rightarrow 0$)

由环路定理得到：

$$0 = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \approx \vec{E}_2 \cdot (l\hat{\tau}) + \vec{E}_1 \cdot (-l\hat{\tau}) + \underline{(Eh)}$$

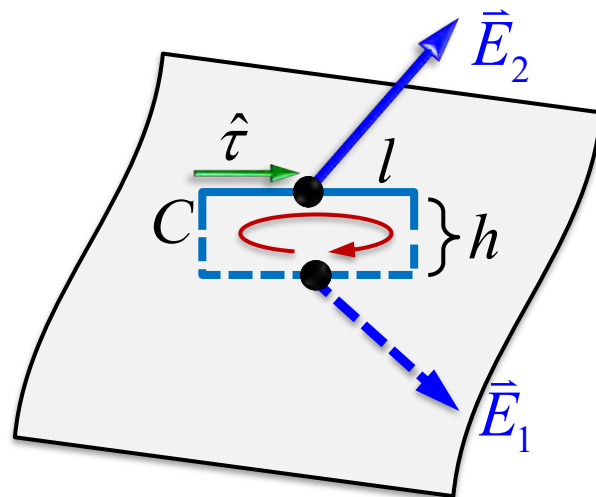
高阶小量

因此

$$\hat{\tau} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

即在与曲面相切的任一方向上，电场的投影连续。从而该关系也可写为

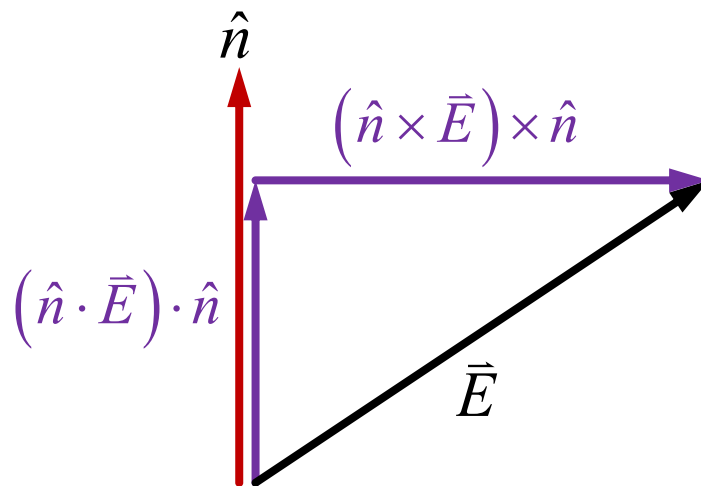
$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$



面电荷两侧电场的切向分量连续！

由于

$$\begin{cases} \vec{E}_2 = (\hat{n} \cdot \vec{E}_2) \cdot \hat{n} + (\hat{n} \times \vec{E}_2) \times \hat{n} \\ \vec{E}_1 = (\hat{n} \cdot \vec{E}_1) \cdot \hat{n} + (\hat{n} \times \vec{E}_1) \times \hat{n} \end{cases}$$

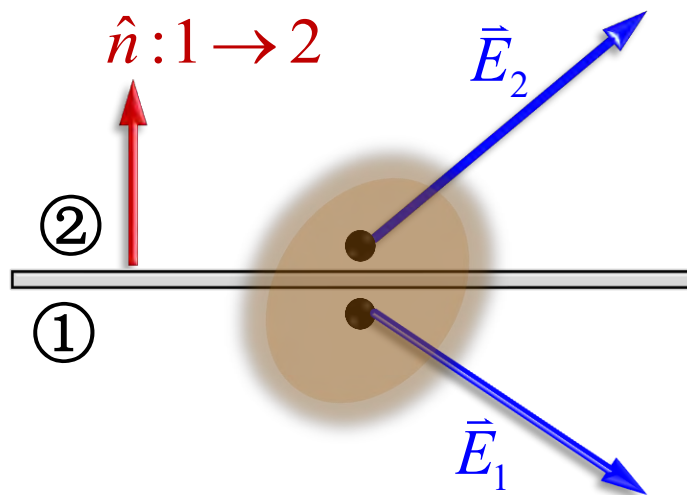


以及

$$\hat{n} \cdot \vec{E}_2 = \hat{n} \cdot \vec{E}_1 + \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \hat{n} \times \vec{E}_2 = \hat{n} \times \vec{E}_1$$

所以

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$





science @ NASA



Thank You!