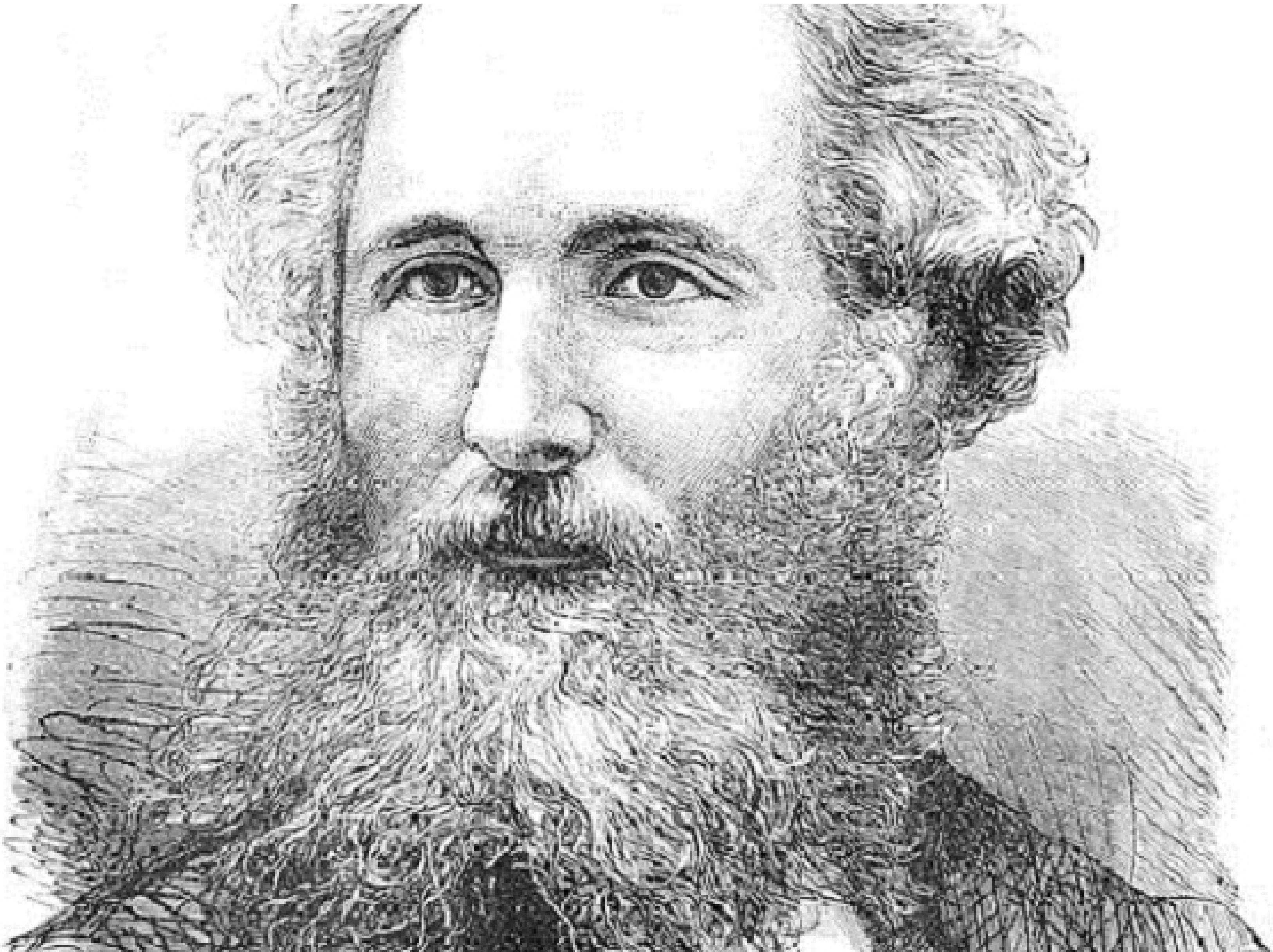
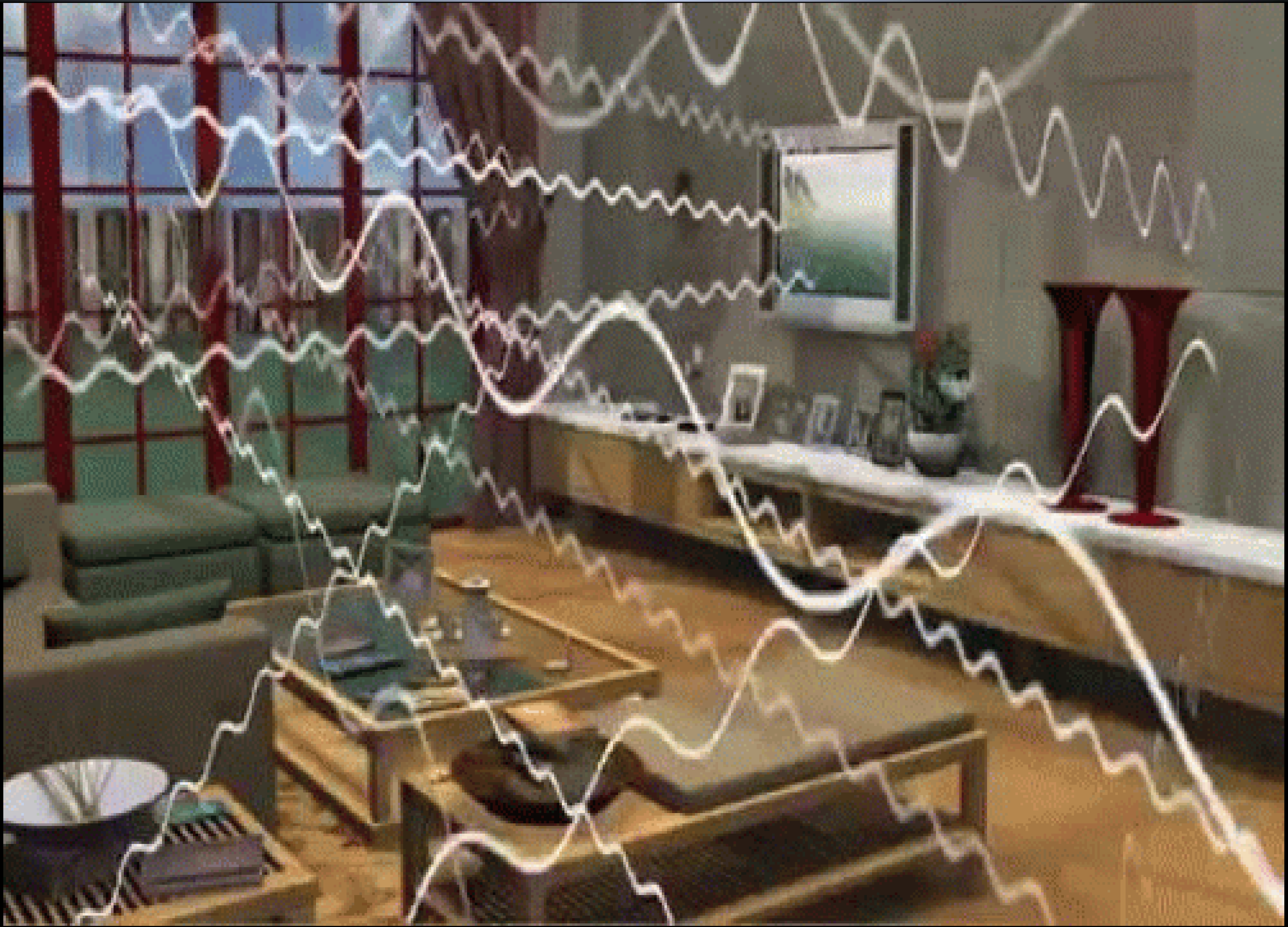
第十章 麦克斯韦电磁理论



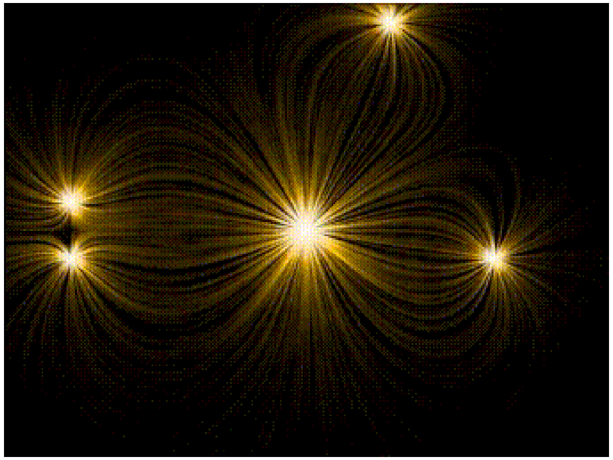
§ 10.1 麦克斯韦方程组



一、电磁现象的实验规律总结

0a. 实物粒子的动力学方程（Newton 方程）

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$



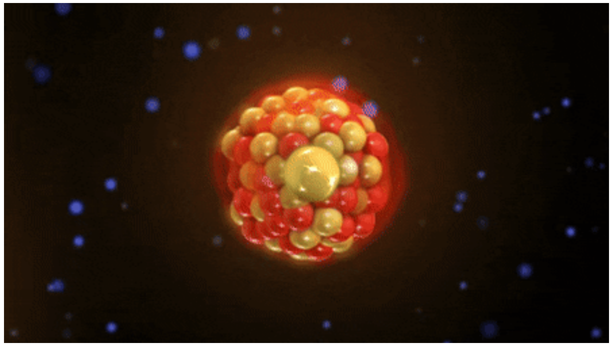
0b. 洛伦兹力公式

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$$

【注】通常也将此式视为电场与磁场的定义！

0c. 电荷守恒定律

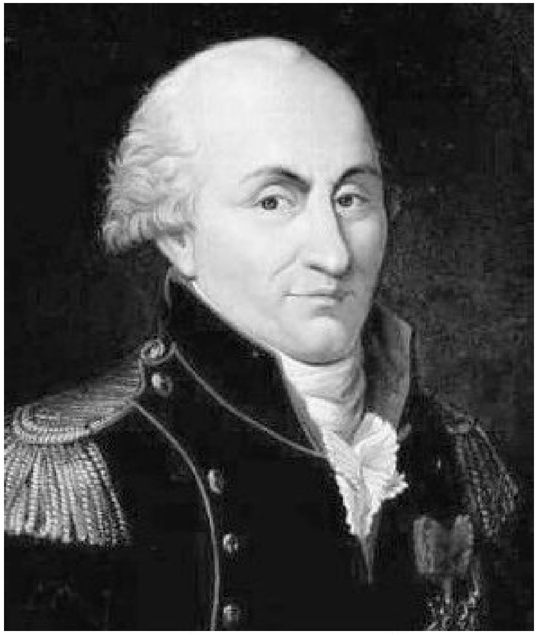
$$-\frac{dQ_{内}}{dt}=\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} \quad or \quad \nabla\cdot\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$



1. 静电学的实验规律是库仑定律与叠加原理

$$\vec{F}_{12}=\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

【注】条件：$\partial\rho/\partial t=0$。

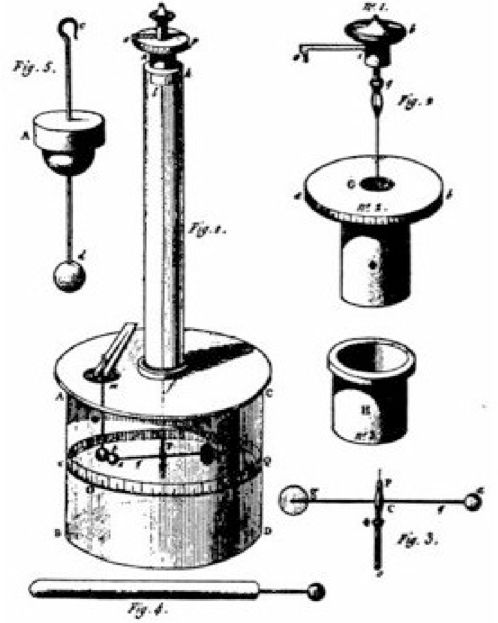


- 静电场的高斯定理：

$$\oiint_S \vec{E}_{势}\cdot d\vec{S}=\frac{Q_{内}}{\varepsilon_0} \quad \text{or} \quad \nabla\cdot\vec{E}_{势}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- 静电场的环路定理：

$$\oint_C \vec{E}_{势}\cdot d\vec{l}=0 \quad \text{or} \quad \nabla\times\vec{E}_{势}=0$$



2. 静磁学的实验规律是安培定律与叠加原理

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \left(I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12} \right)}{r_{12}^3}$$

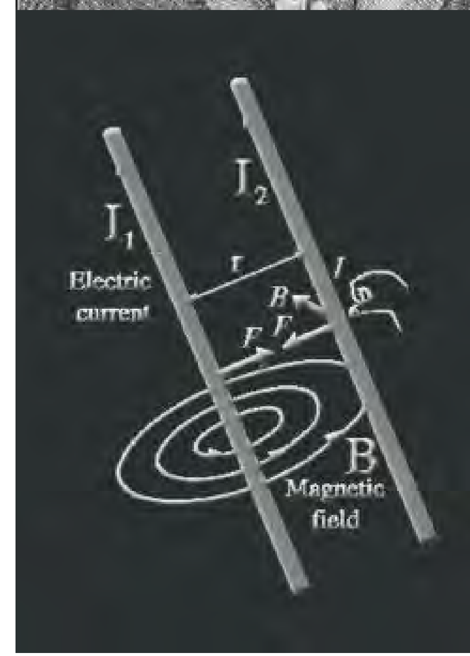
【注】条件：$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$。

- 静磁场的高斯定理：

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{or} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

- 静磁场的（安培）环路定理：

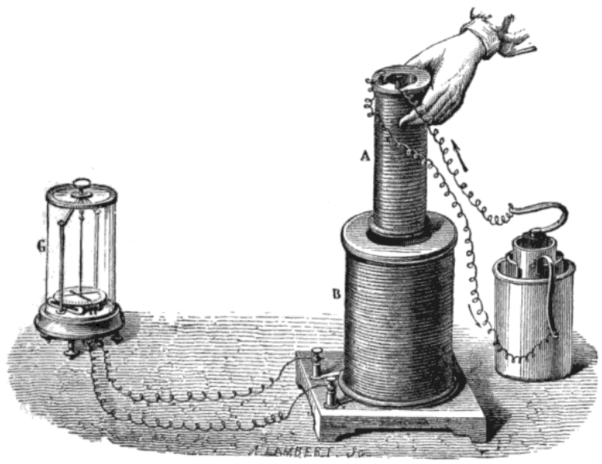
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{内} \quad \text{or} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

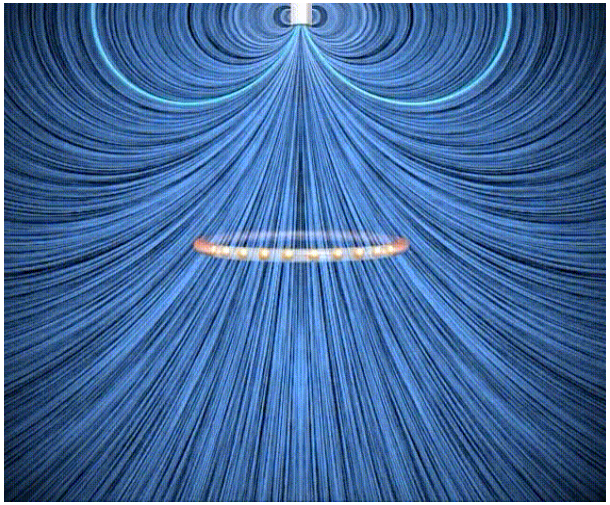


3. 法拉第电磁感应定律

$$\oint_C \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{or} \quad \nabla \times \vec{E}_{旋} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

物理本质：随时间变化的磁场会激发涡旋电场。





二、实验规律的推广

1. 电场的环路定理

一般情况下，空间的总电场是静电场与涡旋电场的叠加：

$$\vec{E} \triangleq \vec{E}_{势} + \vec{E}_{旋}$$

$$\oint_C \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{and} \quad \oint_C \vec{E}_{势} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{or} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

这就是**电场的环路定理**。

2. 电场的高斯定理

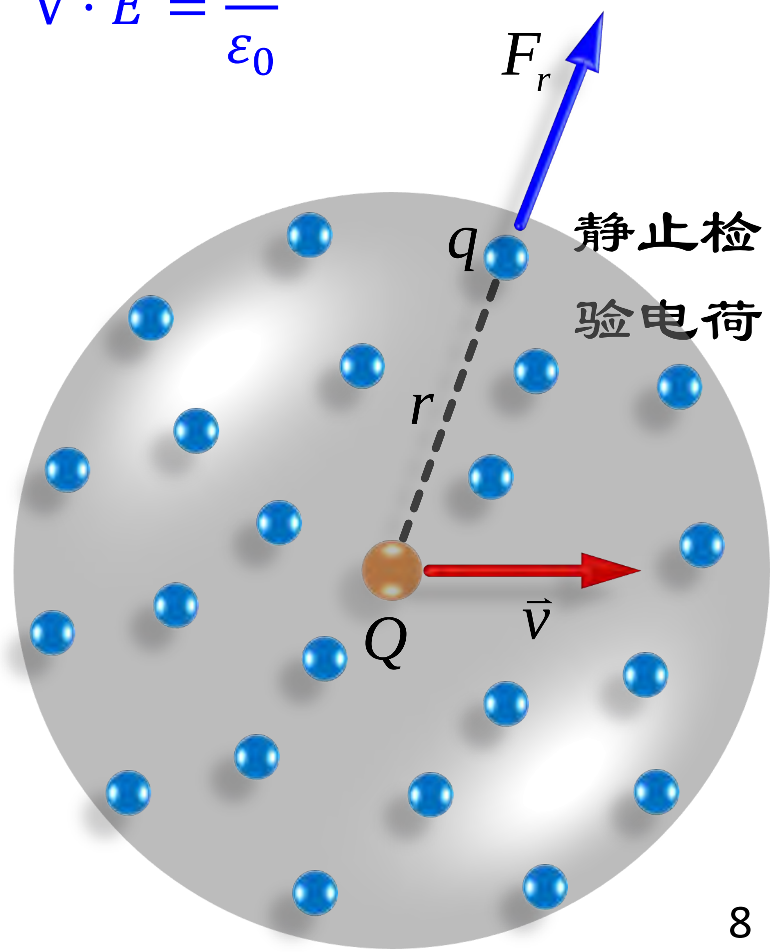
麦克斯韦假设总电场满足与静电场相同的高斯定理：

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q_{内}}{\varepsilon_0} \quad \text{or} \quad \nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

这就是**电场的高斯定理**。

【注】高斯定理提供了一种测量电荷电量的自然方法：

$$Q\triangleq\frac{1}{q}\varepsilon_0\oiint_S F_r dS=\varepsilon_0\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

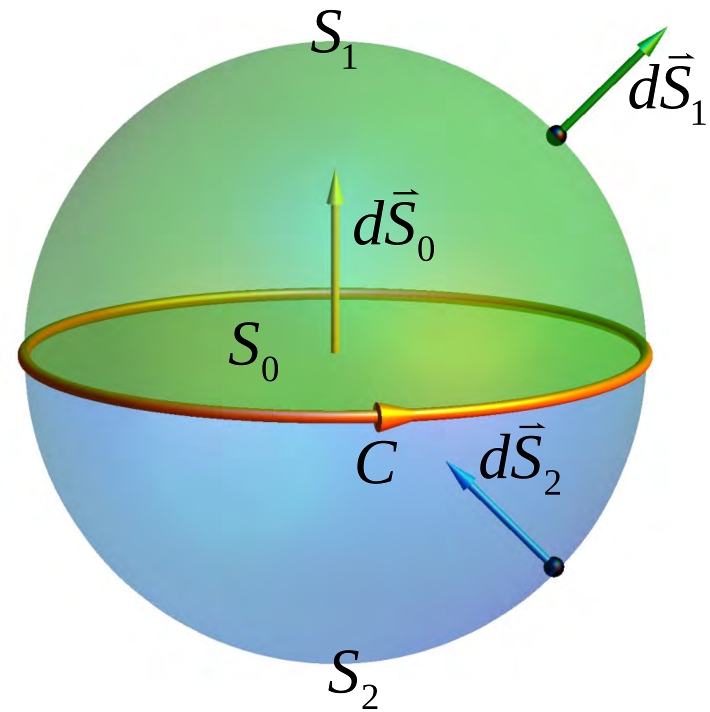


3. 磁场的高斯定理

- 静磁场：

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

通过以给定闭曲线 C 为边界的任一曲面的磁通量均相同。



- 由法拉第定律：

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint_{S_1}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=-\iint_{S_2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow\quad 0=\oiint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\iiint_V\nabla\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,dV=\iiint_V\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{B})\,dV$$

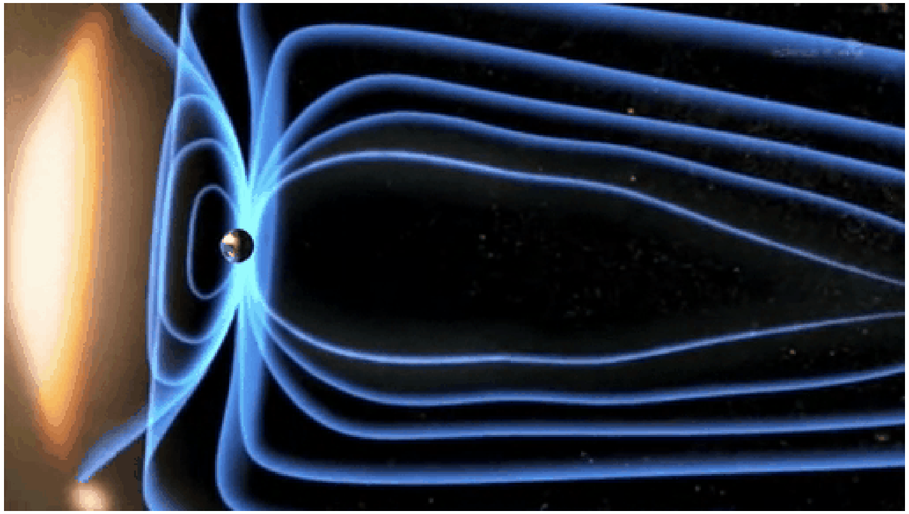
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{B} = const.$$

若初始时刻磁场的散度为零，即

$$\left(\nabla \cdot \vec{B}\right)_{t=0} = 0$$

则以后任一时刻磁场散度具有零。即对于任意磁场，均有

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

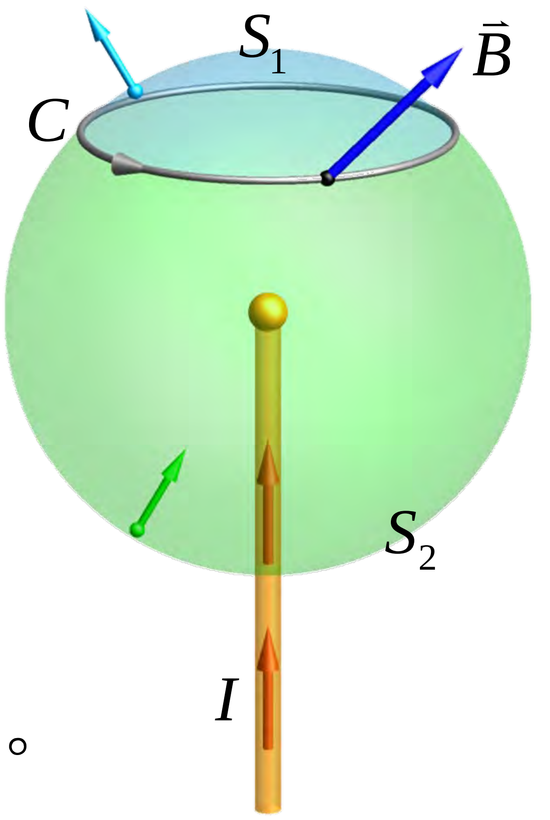


这就是**磁场的高斯定理**。

4. 磁场的环路定理

- 静磁场的安培环路定理：

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{内} = \mu_0 \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} \quad \text{or} \quad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$



【注1】无论电流是否稳恒，任一特定时刻 $\boldsymbol{B}$ 沿着给定闭曲线 C 的环量都是确定的。

【注2】对于稳恒电流，穿过以闭曲线 C 为边界的任一曲面的电流强度都是相同的，该方程是自洽的。

【注3】对于非稳恒电流，穿过以闭曲线 C 为边界的不同曲面的电流强度一般是不同的。

安培环路定理不可能普遍成立！

必须修改方程 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$

- 尝试在方程右边加一矢量：$\vec{X}=\mu_0\vec{j}_D$ $\Longrightarrow$ $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\vec{j}_D\right)$

（1）由于左边散度恒为零，故 $\boldsymbol{j}_D$ 须满足

$$\nabla\cdot\vec{j}+\nabla\cdot\vec{j}_D=0 \Longrightarrow \nabla\cdot\vec{j}_D=-\nabla\cdot\vec{j}=\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

（2）由电场的高斯定理：

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)=\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \nabla\cdot\vec{j}_D=\nabla\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{E}\right)$$

只需令 $\boldsymbol{j}_D=\varepsilon_0\partial_t\boldsymbol{E}$ 即可使得修改后的方程与连续性方程相自洽！

磁场的环路定理

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_D) = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

or

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

称为**安培–麦克斯韦定理**。

- **位移电流密度：** $\vec{j}_D \triangleq \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
- **位移电流强度：** $I_D \triangleq \iint_S \vec{j}_D \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$
- **全电流密度：** $\vec{j}_t \triangleq \vec{j} + \vec{j}_D \Longrightarrow \nabla \cdot (\vec{j}_0 + \vec{j}_D) \equiv 0$

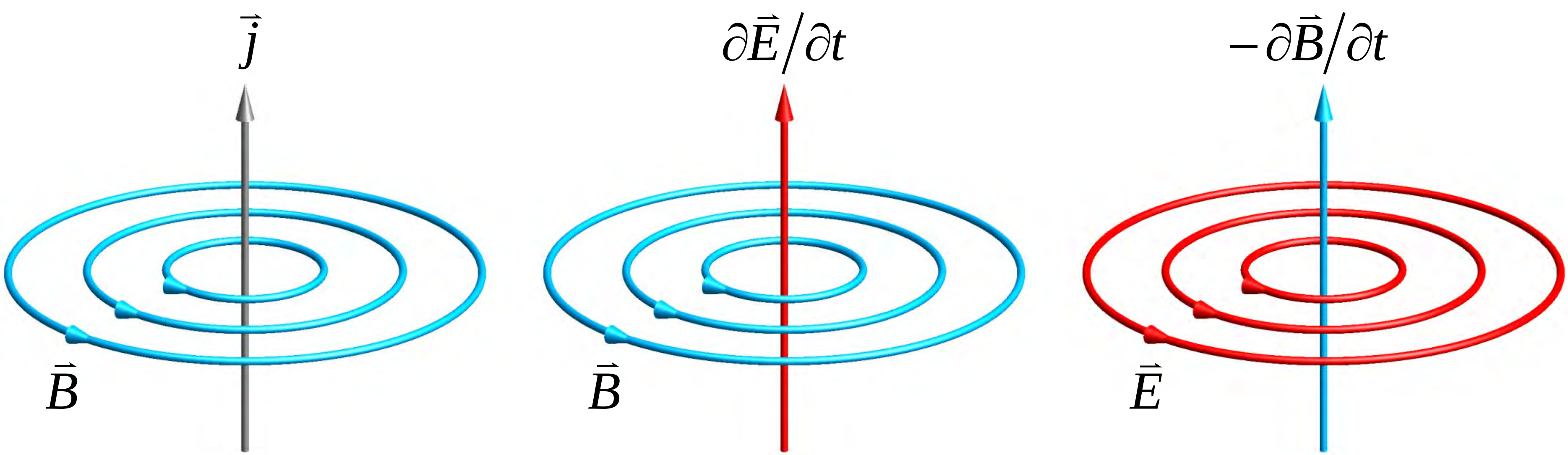
位移电流

位移电流不是真正的电流：不描述电荷的流动，

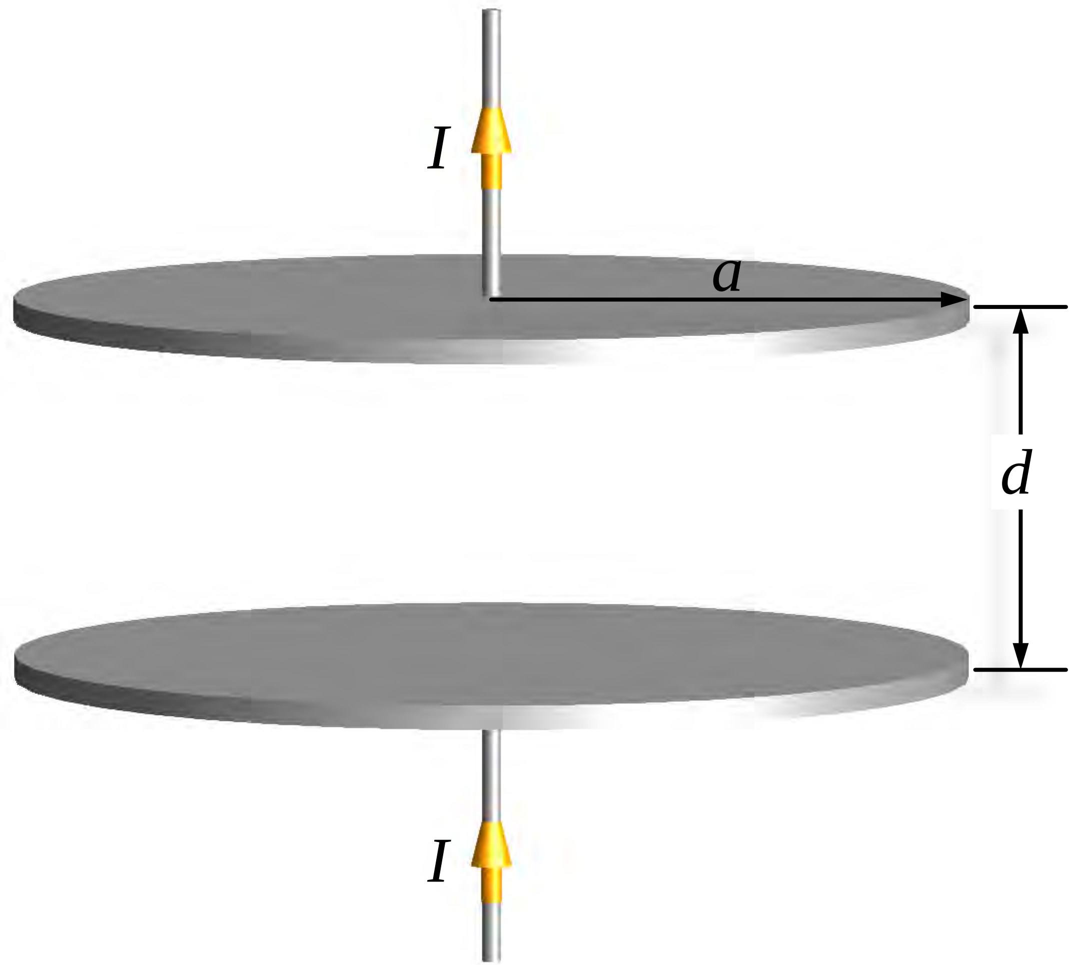
但是，它表现得像真正的电流一样：以同样的方式产生磁场。

位移电流的物理本质是：随时间变化的电场可以激发磁场；

正如随时间变化的磁场可以激发电场。

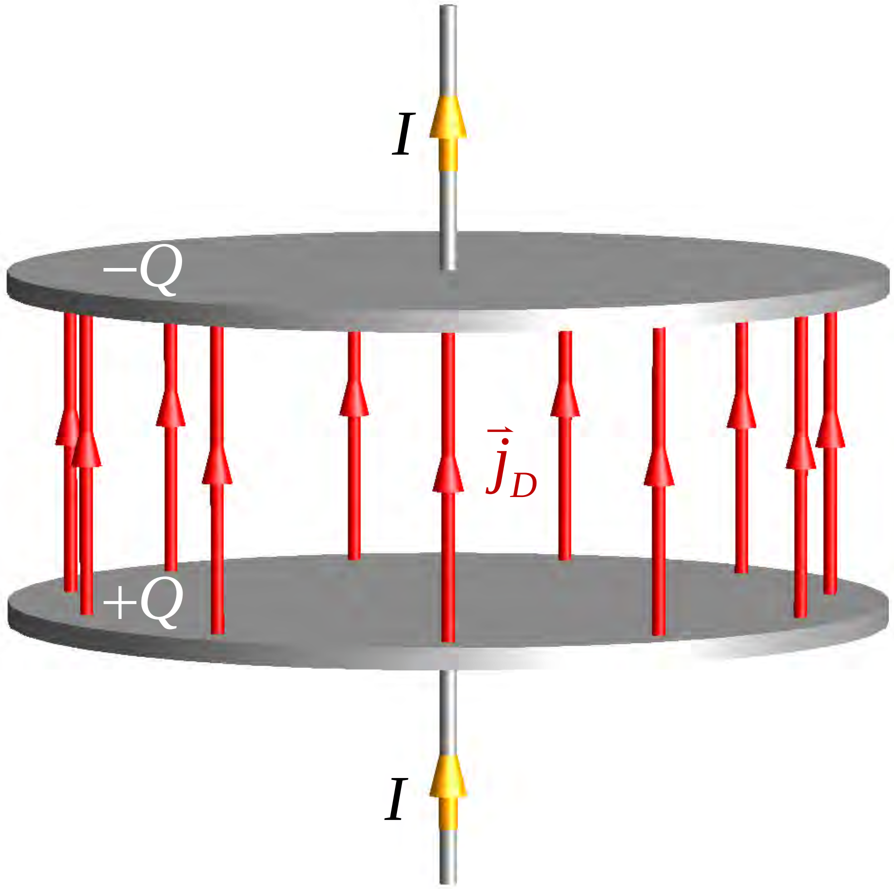


【例】 研究平行板电容器在充放电过程中，磁场与传导电流、位移电流的关系。设极板半径为 a，极板间距为 $d << a$，并设电荷随时间缓慢变化。



【解】忽略边缘时，电容器外部电场为零，从而外部位移电流密度也为零。而在电容器内部，当电容器带电量等于 $Q(t)$ 时，电场为

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 a^2}$$

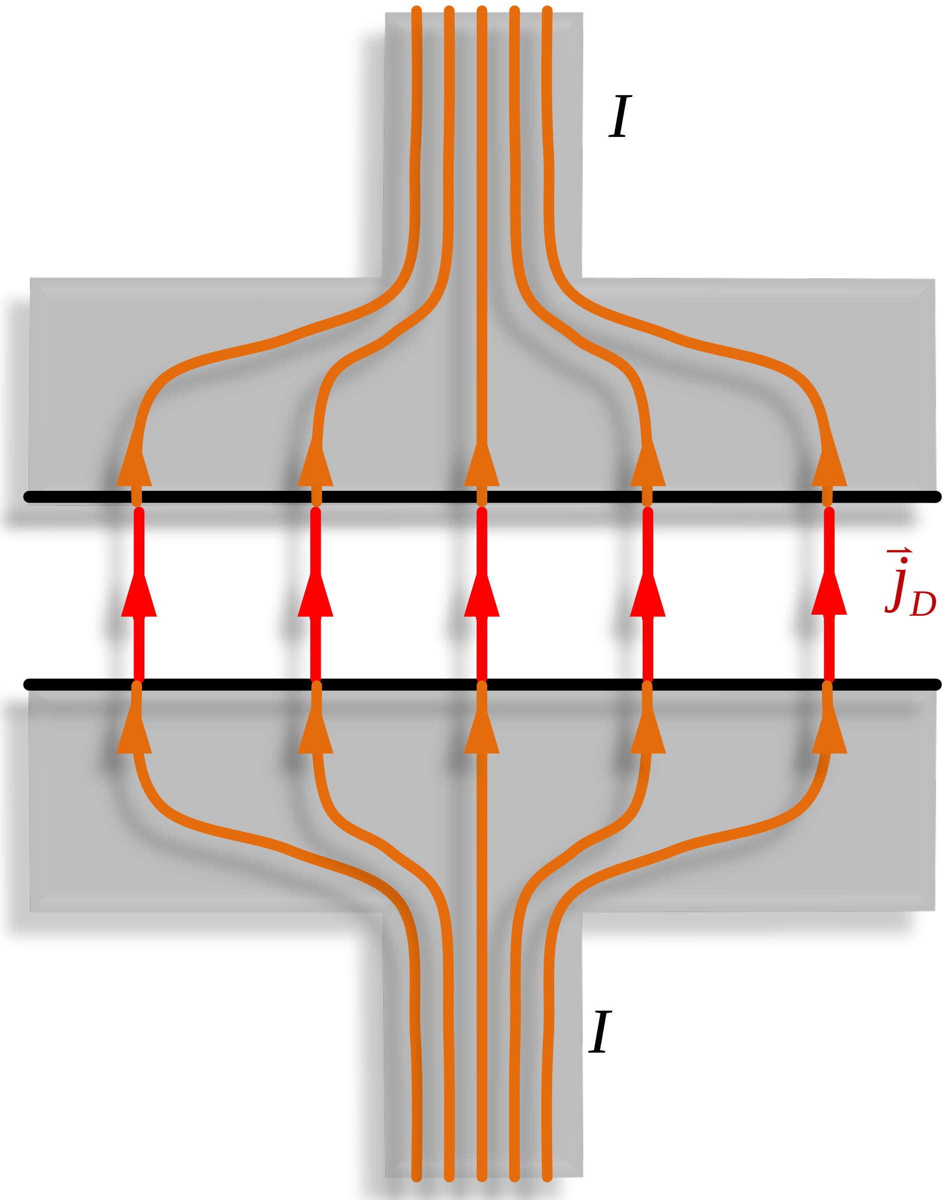


位移电流密度为

$$j_D = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\pi a^2}\frac{dQ}{dt} = \frac{I}{\pi a^2}$$

位移电流强度为

$$I_D = \pi a^2 j_D = I$$



位移电流的本质是：

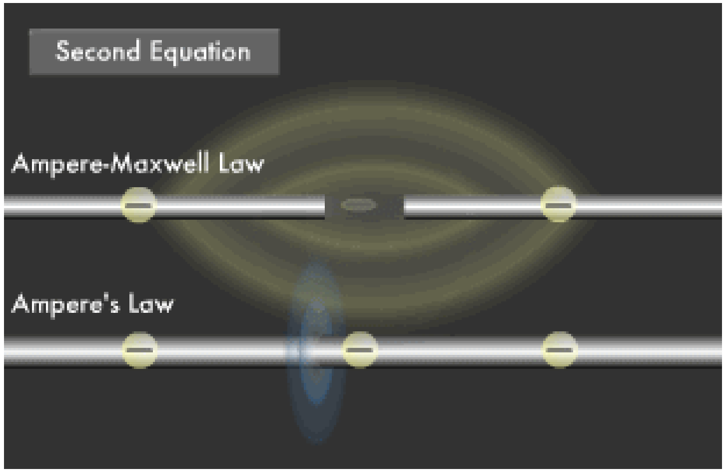
随时间变化的电场

会激发磁场。

全电流连续：

传导电流中断之处，

由位移电流接上。

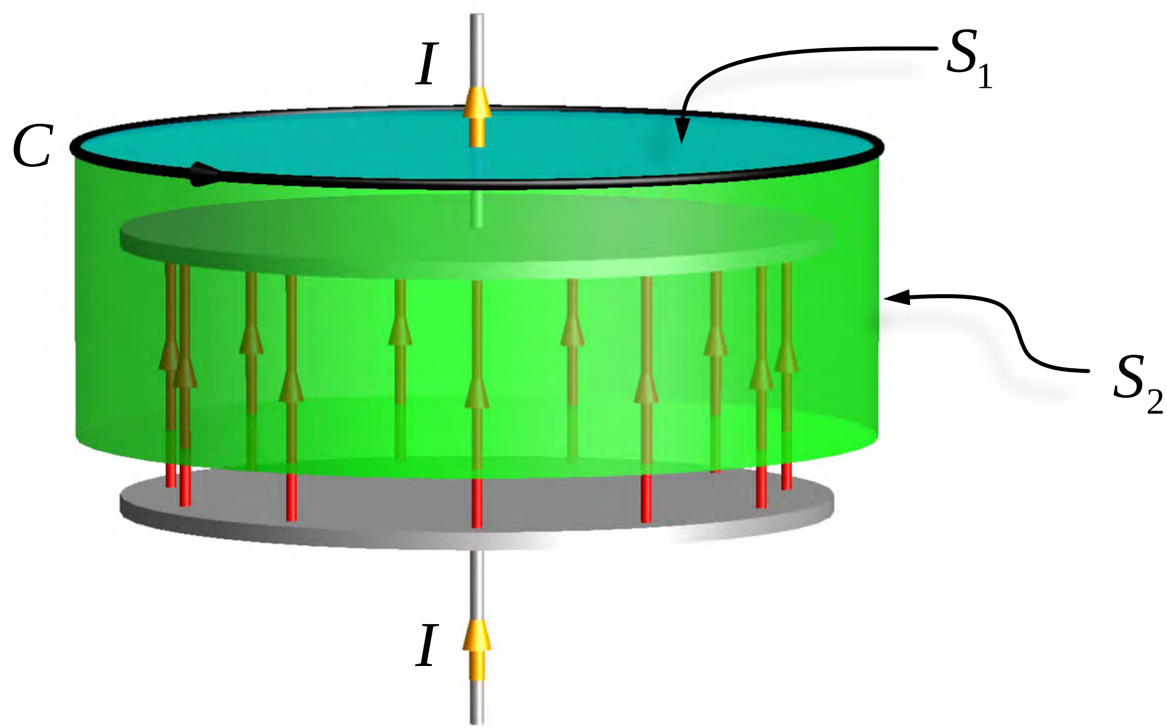


由对称性知

$$\vec{B} = B(s,z)\hat{\phi}$$

由安培–麦克斯韦（AM）定理得到

$$2\pi s B = \mu_0\left(I_{内} + I_{D内}\right) \Longrightarrow B = \frac{\mu_0\left(I_{内} + I_{D内}\right)}{2\pi s}$$



分四个区域考察:

（1）区域 1: $I_{内}=0,\ I_{D内}=\dfrac{s^2}{a^2}I$

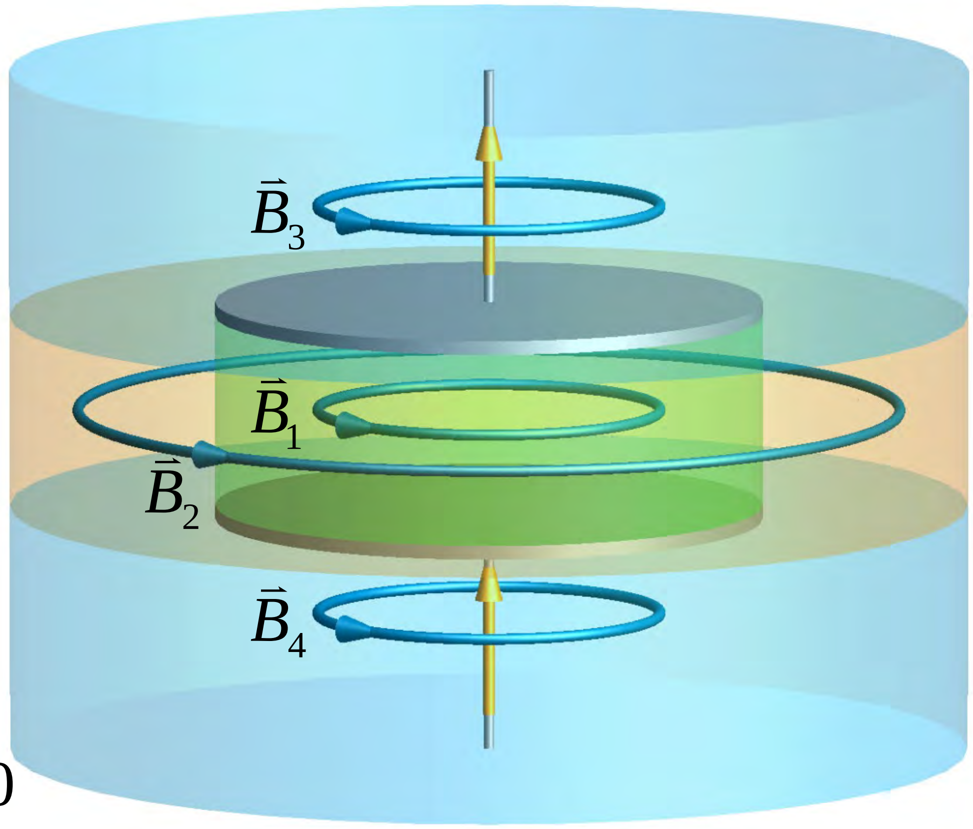
$$\Rightarrow \boxed{B_1=\frac{\mu_0 Is}{2\pi a^2}}$$

（2）区域 2: $I_{内}=0,\ I_{D内}=I$

$$\Rightarrow \boxed{B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi s}}$$

（3）区域 3、4: $I_{内}=I,\ I_{D内}=0$

$$\Rightarrow \boxed{B_{3,4}=\frac{\mu_0 I}{2\pi s}}$$



WAIT!

在似稳条件下，

难道磁场不是应该按照BSL定律产生吗

为什么会出现位移电流对磁场的贡献

实际上，

在似稳条件下，

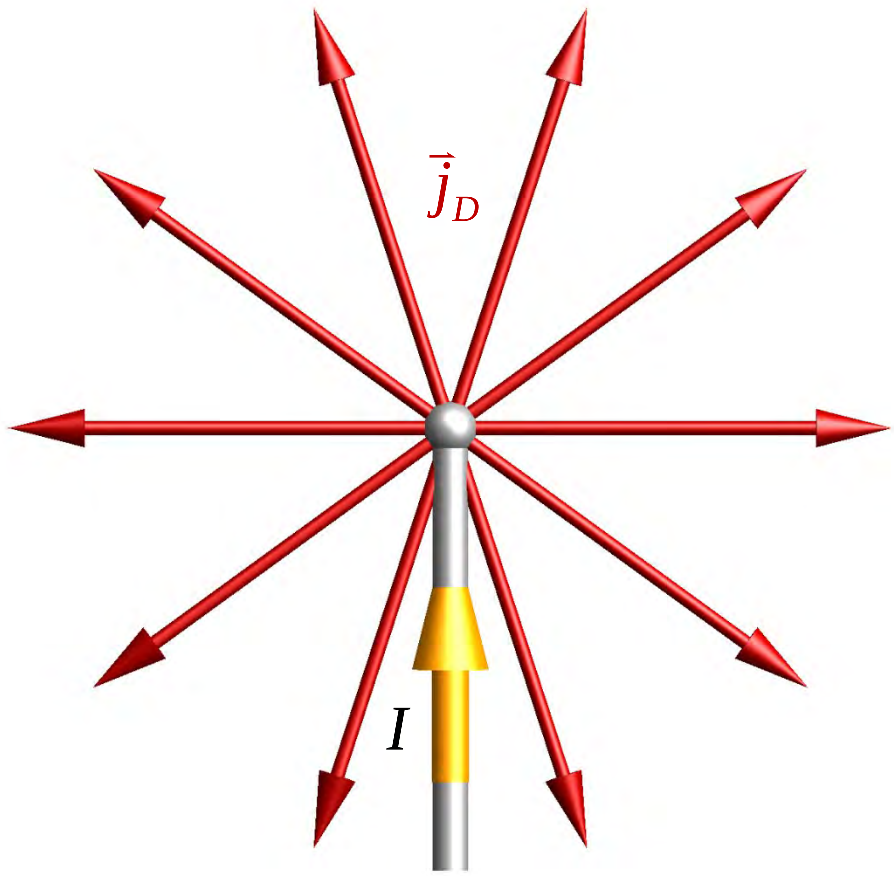
电容器内外的的磁场都是由传导电流产生的

只不过这样计算比较方便

请看下例 ……

【例】半无限长导线通有低频交流电 $I(t)$，试求空间各点的 $\boldsymbol{B}$。

【解】由高斯定理可得端点处（设为原点）的电荷 $Q(t)$ 激发的电场为：



$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

位移电流密度为

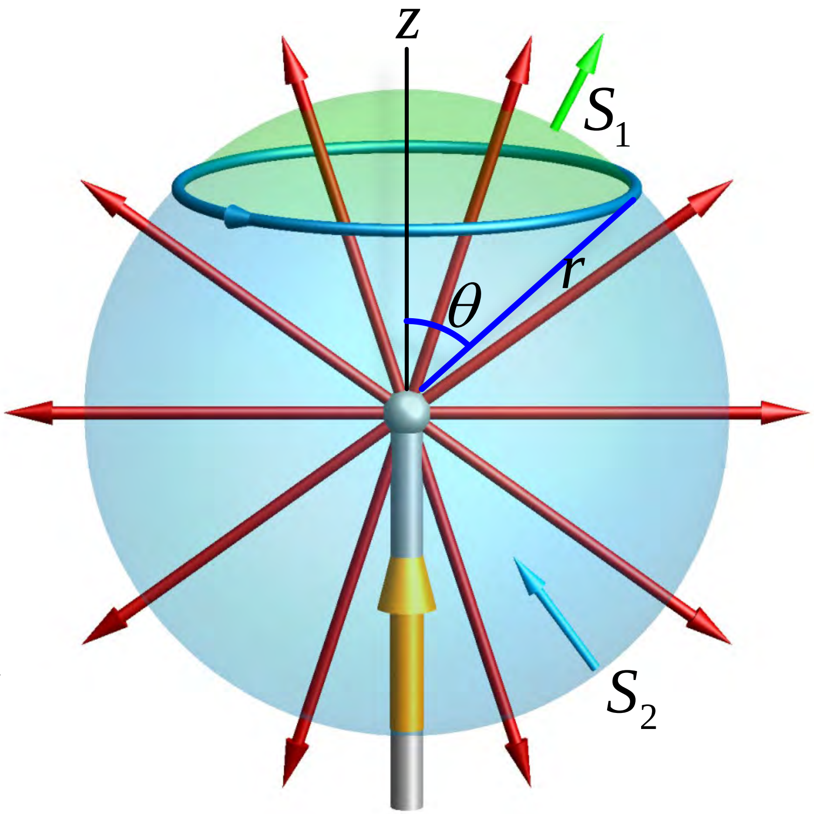
$$\vec{j}_D=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dQ}{dt}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{j}_D=\frac{I}{4\pi r^2}\hat{r}$$

由对称性知 $\vec{B}=B(r,z)\hat{\phi}$

由安培–麦克斯韦（AM）定理得到

$$B=\frac{\mu_0\left(I_{内}+I_{D内}\right)}{2\pi r\sin\theta}$$



（1）若以 C 为边界的曲面选为 S_1

$$I_{内}=0,\quad I_{D内}=j_D S_1=\frac{1-\cos\theta}{2}I$$

（2）若以 C 为边界的曲面选为 S_2

$$I_{内}=I,\quad I_{D内}=-j_D S_2=-\frac{1+\cos\theta}{2}I$$

$$S_1=2\pi r^2\left(1-\cos\theta\right)$$

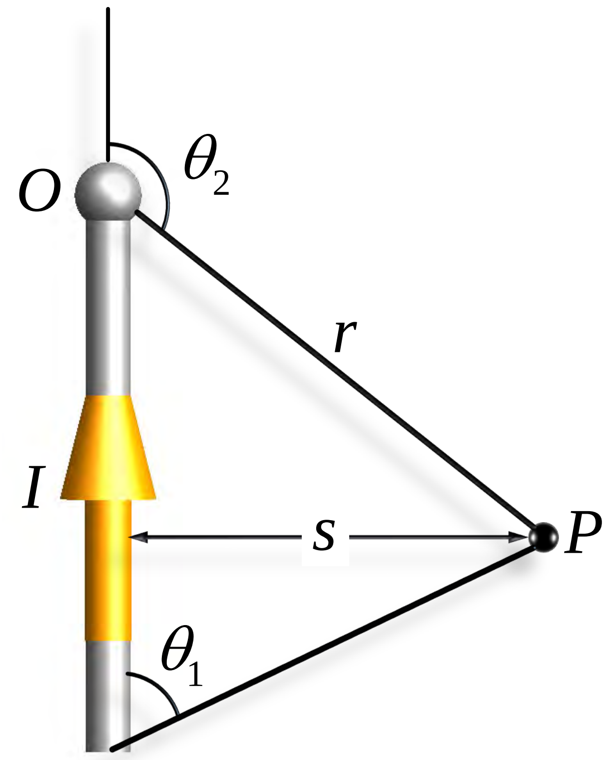
$$S_2=2\pi r^2\left(1+\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\phi}}$$

下面计算传导电流激发的磁场

由于有限长载流直导线产生的磁场为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)\hat{\phi}$$



对于所讨论的半无限长导线， $\theta_1 = 0$，令 $\theta_2 = \theta$。取上端点为原点，则

$$s = r\sin\theta$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\phi}}$$

【注1】在传导电流不连续的情况下，安培环路定律应用完整的安培–麦克斯韦定律代替

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}_D \right)$$

【注2】在似稳条件下， BSL 定律仍然成立，即

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}',t) \times \hat{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}^2} dV'$$

【注3】在似稳条件下，位移电流不激发磁场。

在BSL定律中无需加上位移电流项，

即使加上，其积分的贡献也为零。

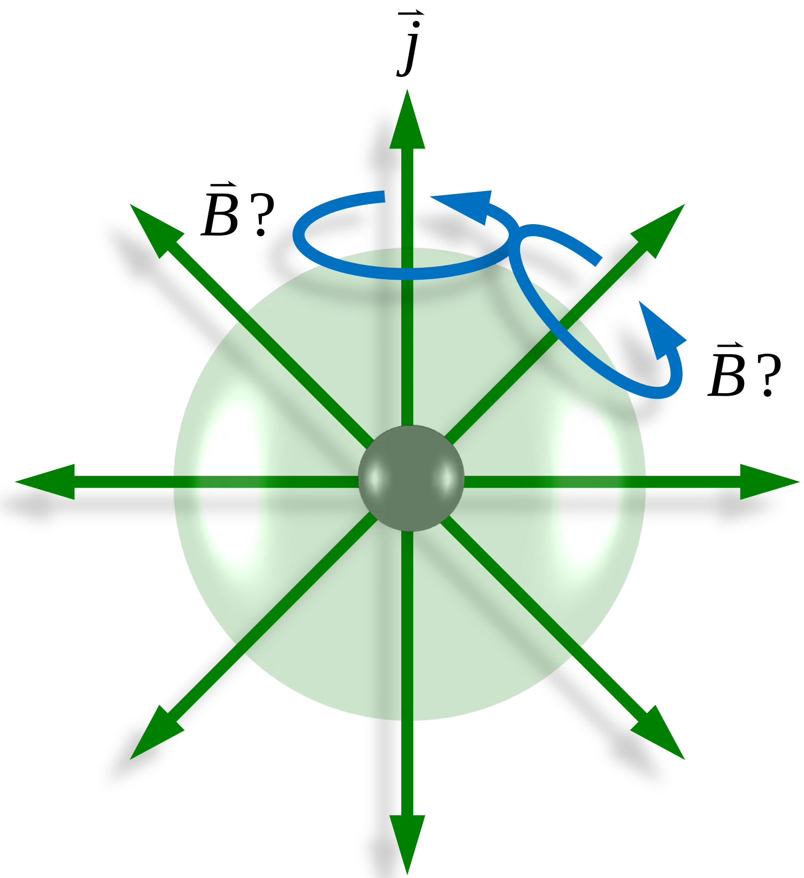
【例】研究空间中有球对称径向电流分布时的磁场 **B**。

【解】设半径为 r 的球内的总电量为 $Q(r,t)$ 。

由连续性方程

$$-\frac{\partial Q}{\partial t}=4\pi r^2 j(r,t)$$

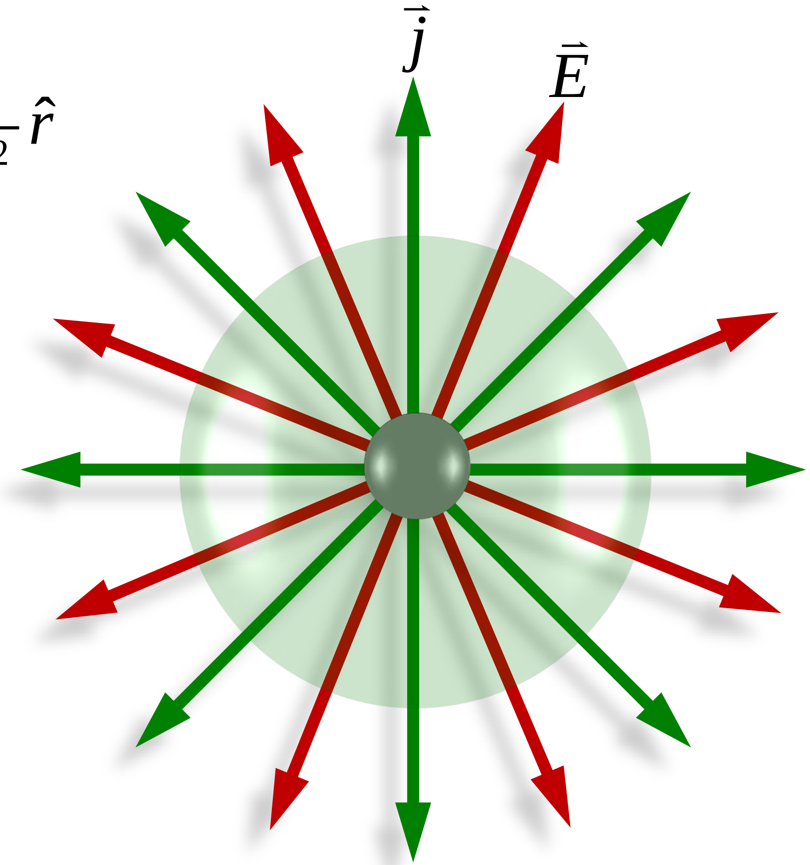
$$\Rightarrow \vec{j}=-\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial Q}{\partial t}\hat{r}$$



下面计算位移电流。

由高斯定理得到

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



位移电流密度为

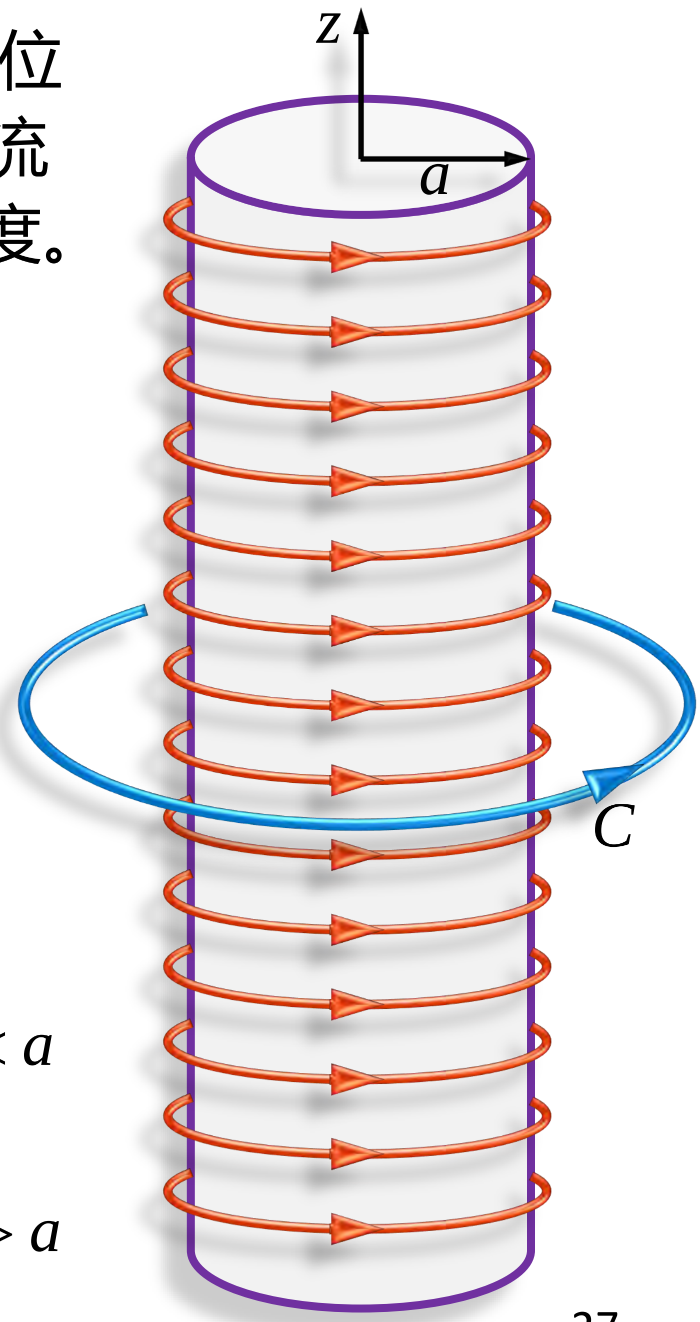
$$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial Q}{\partial t}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{j} + \vec{j}_D = 0$$

由于全电流处处为零，因此，B 的旋度处处为零；

又由于 B 的散度处处为零，　因而空间中不存在磁场。

【例】半径 a 的一无限长直螺线管，单位长度的匝数为n，若导线中载有交流电流 $I = I_0 \sin\omega t$，试求管内外的位移电流密度。



【解】磁场集中在螺线管内部，为

$$\vec{B} = \left(\mu_0 n I_0 \sin\omega t\right)\hat{z}$$

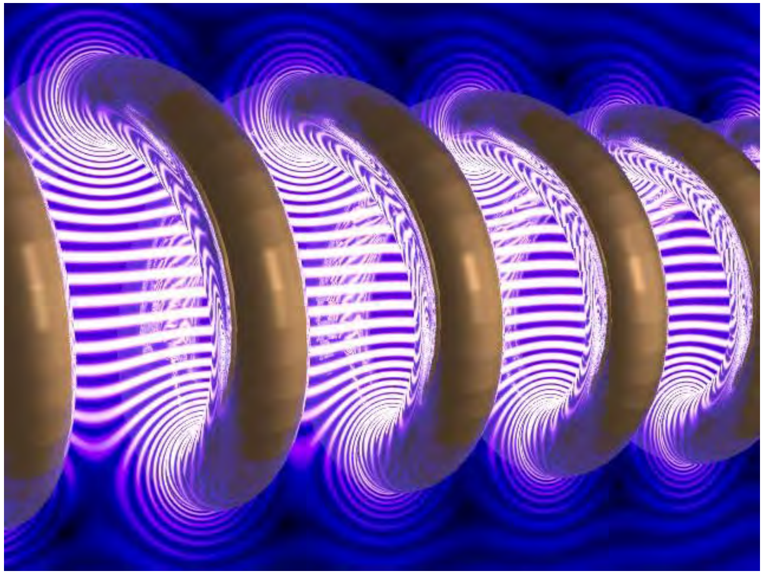
由对称性：

$$\vec{E} = E\left(s,t\right)\hat{\phi}$$

由法拉第定律得到

$$E\cdot 2\pi s = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \begin{cases} -\dfrac{dB}{dt}\cdot\pi s^2, & s<a \\ -\dfrac{dB}{dt}\cdot\pi a^2, & s>a \end{cases}$$

因此电场为



$$\vec{E}=\begin{cases}-\dfrac{s}{2}\dfrac{dB}{dt}\hat{\phi}, & s<a\\ -\dfrac{a^2}{2s}\dfrac{dB}{dt}\hat{\phi}, & s>a\end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{j}_D=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\begin{cases}-\dfrac{\varepsilon_0 s}{2}\dfrac{d^2B}{dt^2}\hat{\phi}=-\dfrac{\varepsilon_0 s}{2}\omega^2B\hat{\phi}, & s<a\\ -\dfrac{\varepsilon_0 a^2}{2s}\dfrac{d^2B}{dt^2}\hat{\phi}=-\dfrac{\varepsilon_0 a^2}{2s}\omega^2B\hat{\phi}, & s>a\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j}_D=\begin{cases}\hat{\phi}\dfrac{s}{2}\omega^2\varepsilon_0\mu_0 nI_0\sin\omega t, & s<a\\ \hat{\phi}\dfrac{a^2}{2s}\omega^2\varepsilon_0\mu_0 nI_0\sin\omega t, & s>a\end{cases}}$$

三、完备的麦克斯韦方程组

积分形式

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{内}}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{内} + \mu_0\varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

微分形式

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

四、物质中电磁场规律的总结与推广

1. 实验规律的总结

- 物质中电场的规律：

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0,\quad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\quad \text{where } \vec{D}\triangleq\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

- 物质中磁场的规律：

$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\quad \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0\quad \text{where } \vec{H}\triangleq\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$$

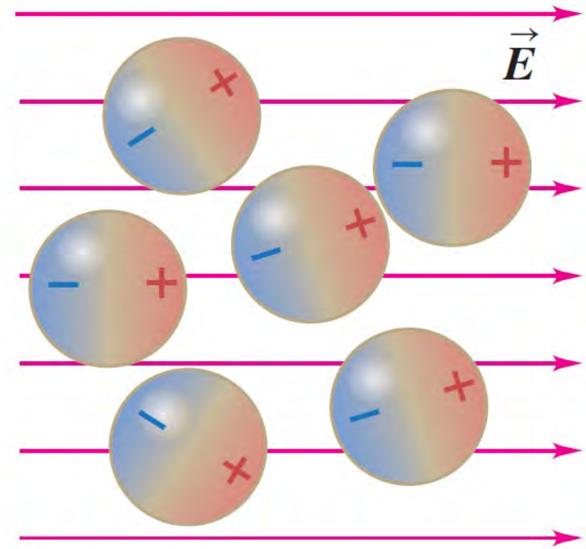
- 电磁性能方程：

$$\vec{D}=\vec{D}\left\{\vec{E},\vec{B}\right\},\quad \vec{H}=\vec{H}\left\{\vec{E},\vec{B}\right\}$$

安培环路定理不可能普遍成立！

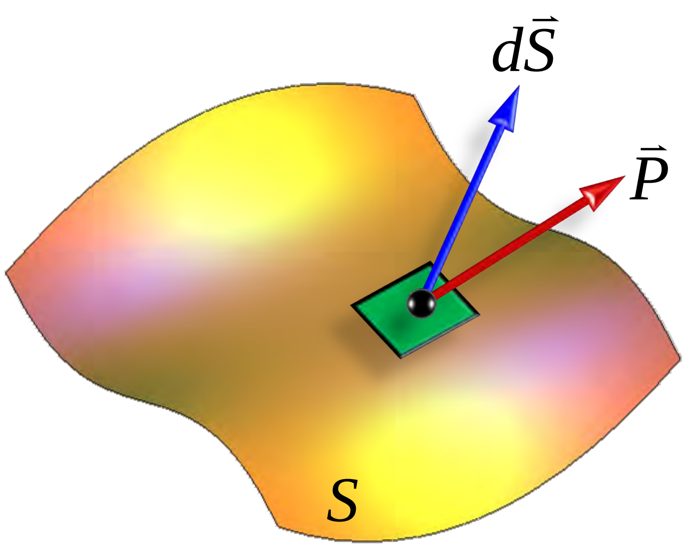
- 介质极化状态的定量描述：**电极化强度**

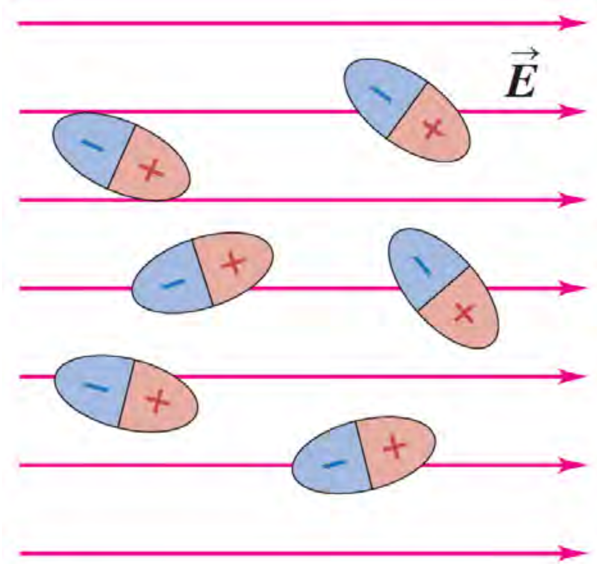
$$\vec{P} \triangleq \frac{\sum \vec{p}_{分子}}{\Delta V}$$



***t* 时刻穿过 *S* 的极化电荷的电量为：**

$$Q'(t) = \iint_S nq\vec{l} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{P}(\vec{r},t) \cdot d\vec{S}$$

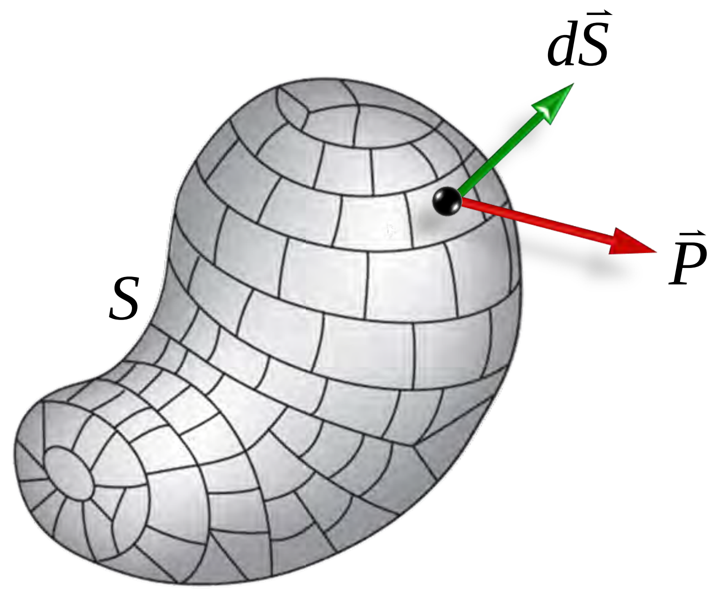




（1）闭曲面 S 内的极化电荷电量为

$$Q' = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

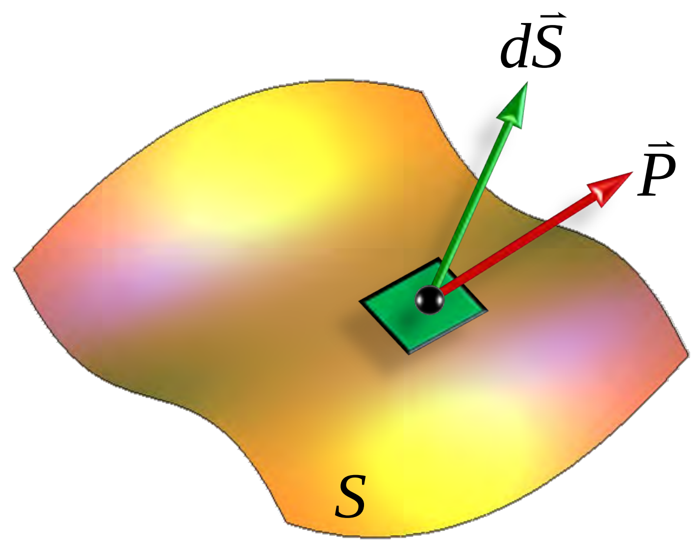
$$\Rightarrow \rho' = -\nabla \cdot \vec{P}$$



（2）穿过曲面 S 的极化电流强度为

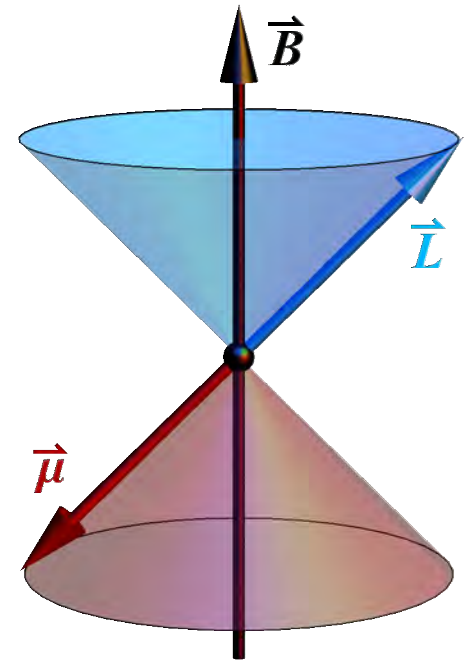
$$I_P = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$



- 介质磁化状态的定量描述：**磁化强度**

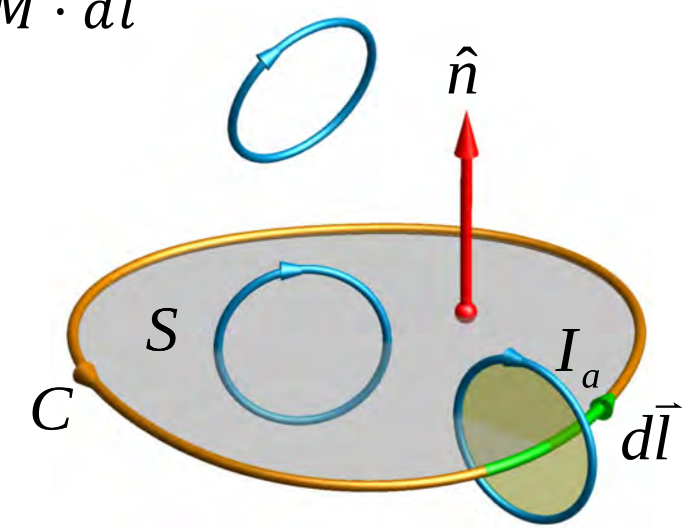
$$\vec{M} \triangleq \frac{\sum \vec{m}_{分子}}{\Delta V}$$

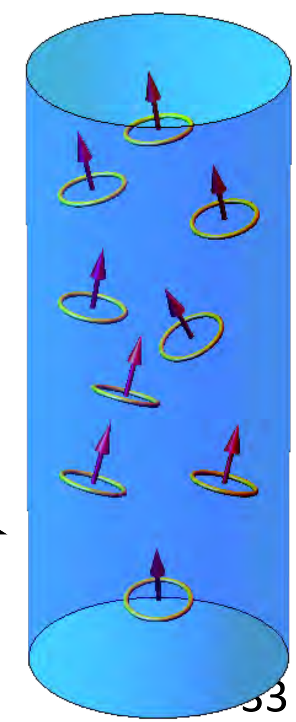


穿过曲面 S 的磁化电流强度为：

$$I_M = \iint_S \vec{j}_M \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{j}_M = \nabla \times \vec{M}$$





2. 安培环路定理 $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0$ 的修正

- 尝试在方程右边加一矢量：$\vec{Y}=\vec{j}_D$ ⟹ $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\vec{j}_D$

（1）由于左边散度恒为零，故 $\boldsymbol{j}_D$ 须满足

$$\nabla\cdot\vec{j}_0+\nabla\cdot\vec{j}_D=0 \Longrightarrow \nabla\cdot\vec{j}_D=-\nabla\cdot\vec{j}_0=\frac{\partial\rho_0}{\partial t}$$

（2）由电场的高斯定理：

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)=\frac{\partial\rho_0}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \nabla\cdot\vec{j}_D=\nabla\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

只需令 $\boldsymbol{j}_D=\partial_t\boldsymbol{D}$ 即可使得修改后的方程与连续性方程相自洽！

物质中磁场的环路定理

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = I + I_D = \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$or \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \vec{j}_D = \mu_0 \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

称为介质中的**安培–麦克斯韦定理**。

- **位移电流密度：** $\vec{j}_D \triangleq \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

【注】第一项不是真正的电流；第二项实为极化电流。

- **全电流密度：** $\vec{j}_t \triangleq \vec{j}_0 + \vec{j}_D$ $\Longrightarrow$ $\nabla \cdot (\vec{j}_0 + \vec{j}_D) \equiv 0$

3. 另一个角度看待物质中的麦克斯韦方程组

真空中的麦克斯韦方程组在物质中仍然成立，但是……

- 物质中的电磁场系指**宏观电磁场**：
  即微观（真实电磁场）的平均值。

- 空间中不仅有自由电荷（ρ_0）和传导电流（$\boldsymbol{j}_0$），
  在物质中还会出现束缚电荷（亦即极化电荷：$\rho' = \rho_P$）
  和束缚电流（$\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}_P + \boldsymbol{j}_M$：含极化电流 $\boldsymbol{j}_P$ 和磁化电流 $\boldsymbol{j}_M$）

$$\rho' = -\nabla \cdot \vec{P}, \quad \vec{j}' = \vec{j}_M + \vec{j}_P = \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{j}' = \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{M} \right) + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{P} \right) = -\frac{\partial \rho'}{\partial t}$$

【注】没有电离和复合，自由电荷与束缚电荷各自守恒。

（1）磁场的高斯定理仍然成立

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

（2）法拉第电磁感应定律仍然成立

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

（3）电场的高斯定理仍然成立

$$\underline{\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}} = \rho \quad = \rho_0 + \rho_P = \rho_0 - \underline{\nabla \cdot \vec{P}}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \quad where\ \vec{D} \triangleq \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

（4）安培–麦克斯韦定理仍然成立

$$\underline{\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}} = \vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$= \vec{j}_0 + \vec{j}_M + \vec{j}_P + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$= \vec{j}_0 + \underline{\nabla\times\vec{M}} + \underline{\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \vec{j}_D = \vec{j}_0 + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad \text{where } \vec{H} \triangleq \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

4. 物质中完备的麦克斯韦方程组

积分形式

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{0内}$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\partial S} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{0内} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

微分形式

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

边值关系

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma_0$$

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0$$

$$\hat{n}\times\left(\vec{E}_2 - E_1\right) = 0$$

$$\hat{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{K}_0$$

5. 电磁性能方程

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j}_0 = \sigma \vec{E}$$

设介质内部有频率为 ω 的电磁场

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},\omega)\cos\omega t, \ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r},\omega)\cos\omega t$$

介质内的束缚电荷会受到周期性变化的洛伦兹力作用，故

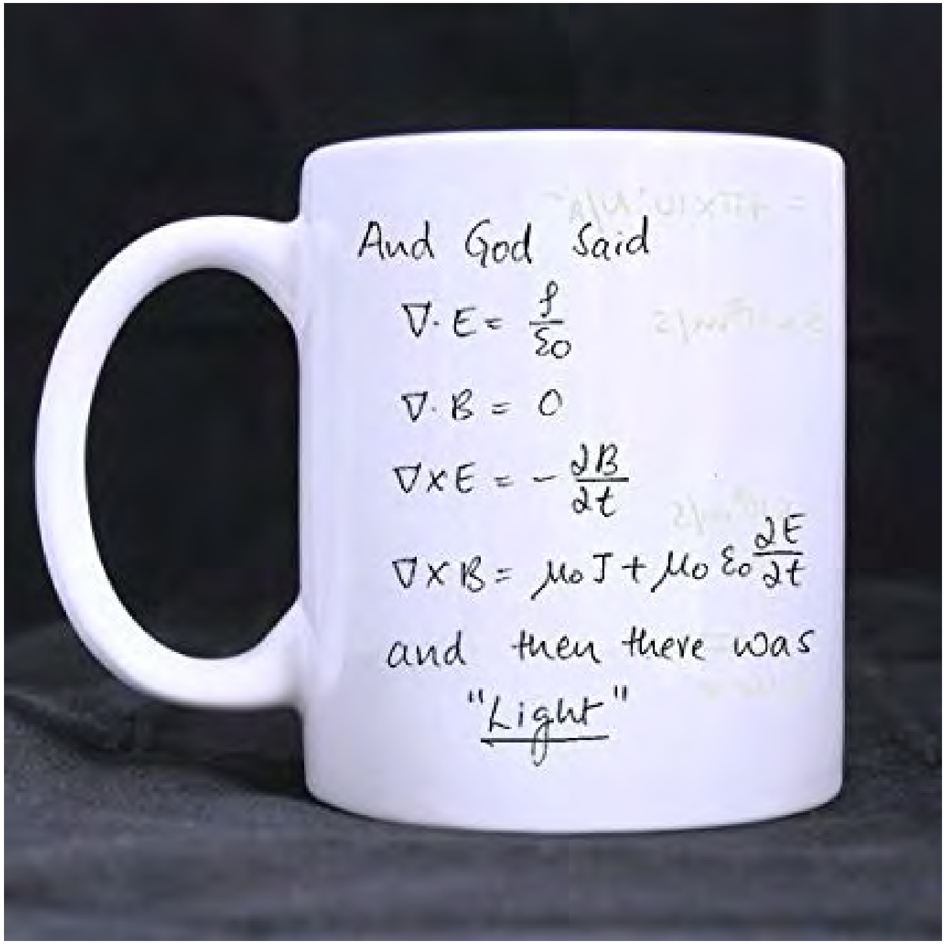
$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\left[\vec{E}(\vec{r},\omega) + \vec{v}\times\vec{B}(\vec{r},\omega)\right]\cos\omega t$$

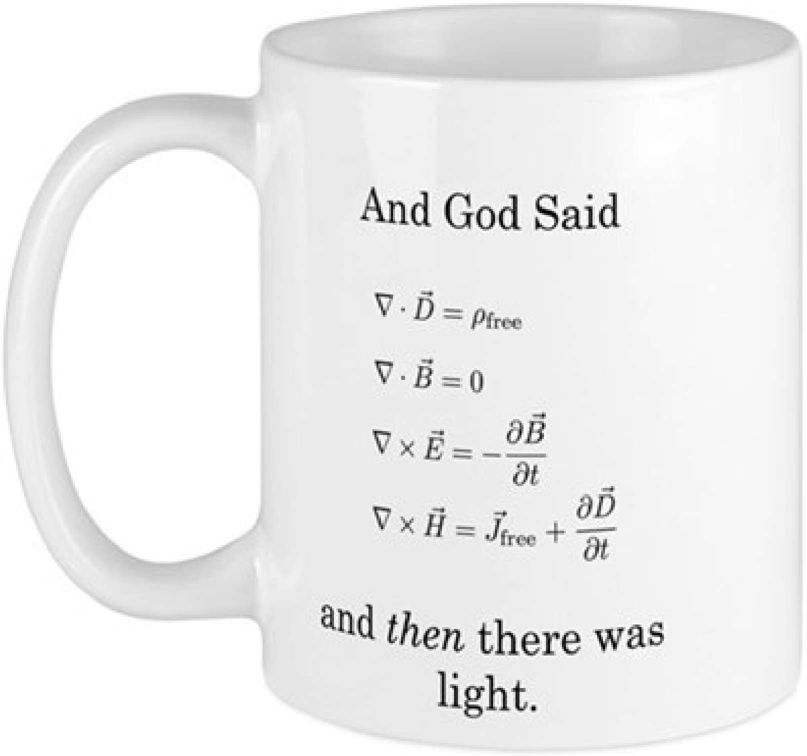
因此，束缚电荷亦将以相同的角频率 ω 做简谐振动。

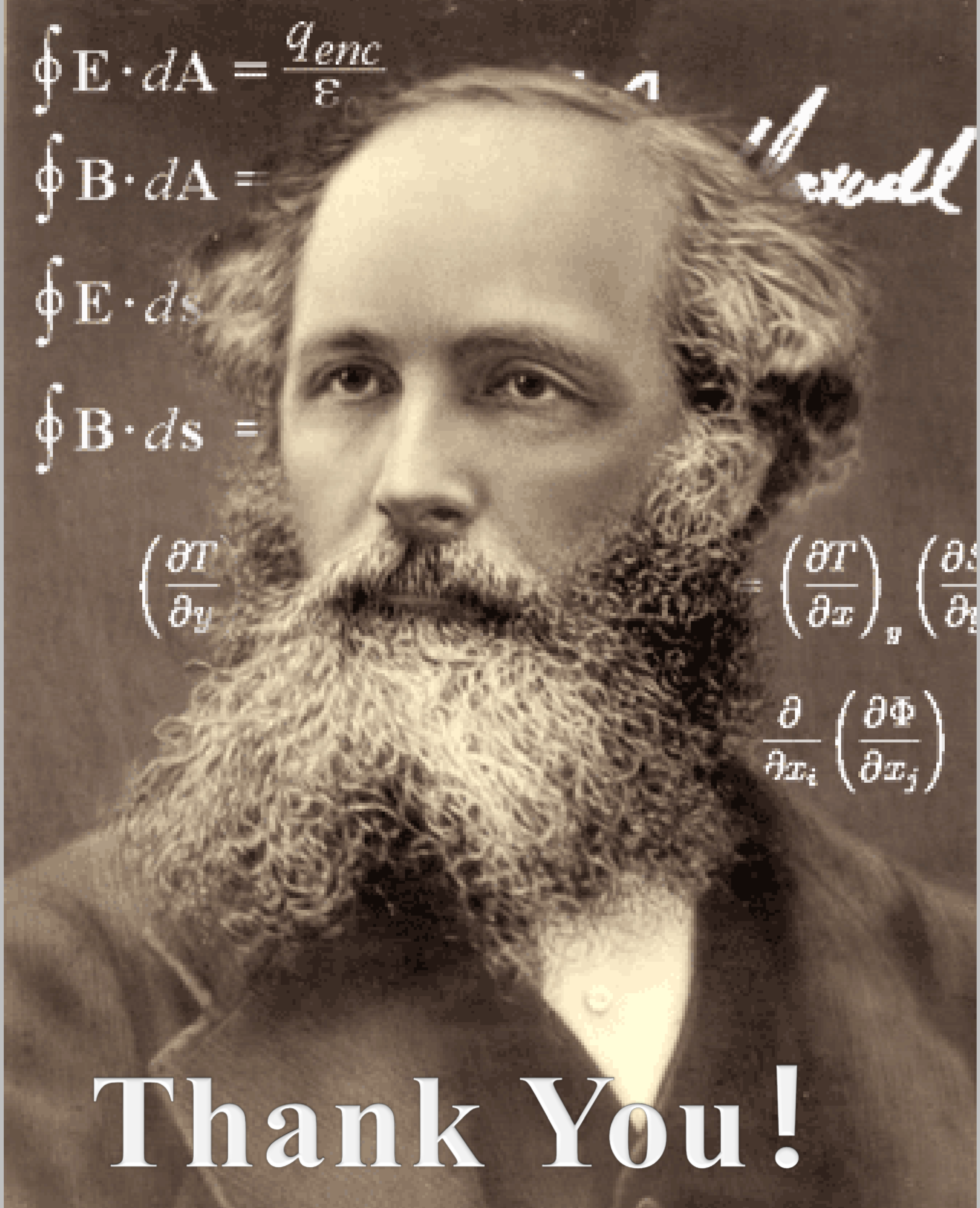
介质的极化率、磁化率通常都依赖于电磁场的频率，即有

$$\vec{D}(\vec{r},\omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega), \ \vec{B}(\vec{r},\omega) = \mu(\omega)\vec{H}(\vec{r},\omega)$$

And God Said ……


And God Said
$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\nabla \cdot B = 0$
$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$
$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$
and then there was
"Light"


And God Said
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\text{free}}$
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{free}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
and *then* there was
light.


$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon}$
Thank You!