

§2-4 电容与电容器

电容 (capacitance/capacity)

量度储电能力 (导体几何特性)

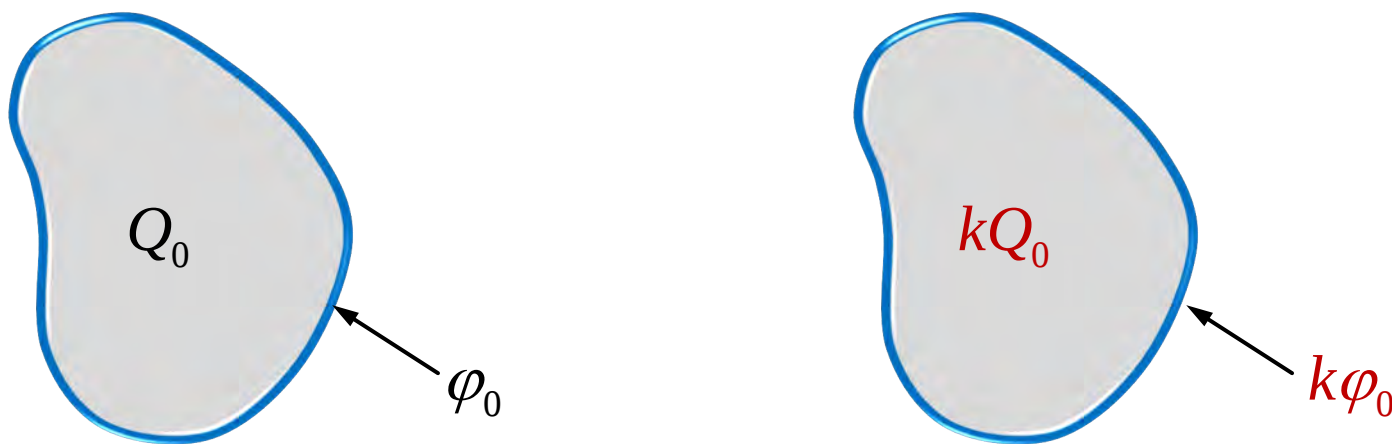
电容器 (capacitor)

元件 (储电、储能、频率效应等)



一、孤立导体的电容

问题： 设带电为 Q_0 的孤立导体达到静电平衡时电势为 φ_0 。
如果导体带电为 $Q = k Q_0$ 时，其电势 φ 多大？



- 全空间每一点的电势都变为原来 k 倍。
- 导体电势变为原来 k 倍，即有 $Q/\varphi = Q_0/\varphi_0$

孤立导体的带电量与其电势成正比！

- **孤立导体的电容**定义为其带电量与电势之比：

$$C \triangleq \frac{Q}{\varphi}$$

- C 取决于**导体的几何特性**（大小、形状）
- C 的大小反应了该导体在给定电势下**储电的能力**

数值上 $C =$ 导体电势为 1 V 时所储存的电量

- C 的单位：**法拉** ($1\text{ F} = 1\text{ C/V}$)

【注】 由于法拉这一单位太大，使用不方便，经常会采用其他较小的单位，如毫法拉（mF）、微法拉（ μF ）、皮法拉（pF）等：

$$1\text{ mF} = 10^{-3}\text{ F}, \quad 1\text{ }\mu\text{F} = 10^{-6}\text{ F}, \quad 1\text{ pF} = 10^{-12}\text{ F}$$

【例】孤立导体球的电容

【解】半径为 R 的孤立导体球，当带电量为 Q 时，电势为

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

故其电容为

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0 R$$

电容为 1 F 的孤立导体球，半径为

$$R \approx 9 \times 10^9 \text{ m} \sim 10^7 \text{ km}$$

地球的电容为

$$C = 7 \times 10^{-4} \text{ F} = 0.7 \text{ mF}$$

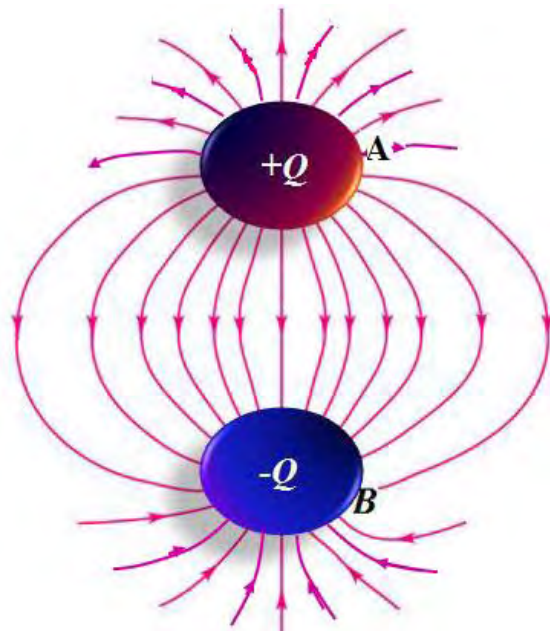


$$R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$$

二、电容器

1. 两导体间的电容

- 当带电导体周围存在其他导体或者其它带电体时，由于静电感应，这些导体上都会产生一定分布的感应电荷，而且这些感应电荷的分布将因其它带电体带电情况的改变而改变，从而改变所考察带电导体的电势。

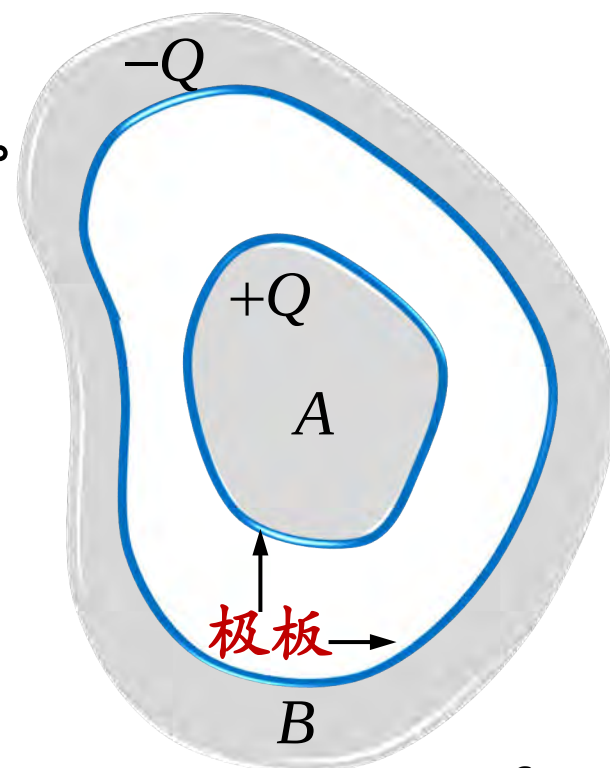
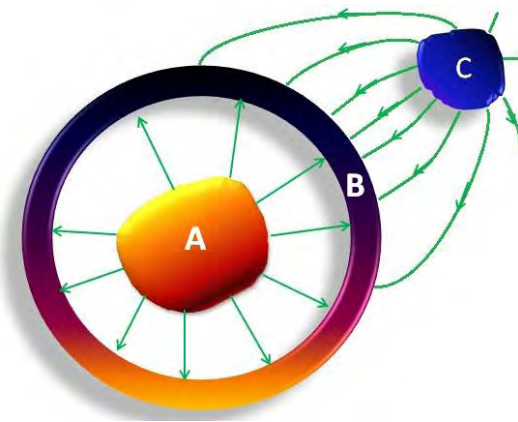


- 因此，非孤立导体的电势还与附近导体的位置、几何形状有关，这就不存在单一电容的概念，而是一个电容分布。改变周围的导体的位置，电容分布也随之改变。

2. 电容器

- 存在其它带电体或导体时，电量与电势差之间的正比关系将被破坏。可以采用**静电屏蔽**的方法，可保证两导体间的电势差与电量间的正比关系，电容器不受周围其他带电体或导体的影响。
- 两导体相对的面称为电容器的两个**极板**。两极板（而非两导体）带等量异号电荷
- 空腔内电场不受外界影响。

两极板之间的电势差
与其电量成正比！



● 电容器的电容定义为

$$C \triangleq \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{Q}{\varphi_A - \varphi_B}$$

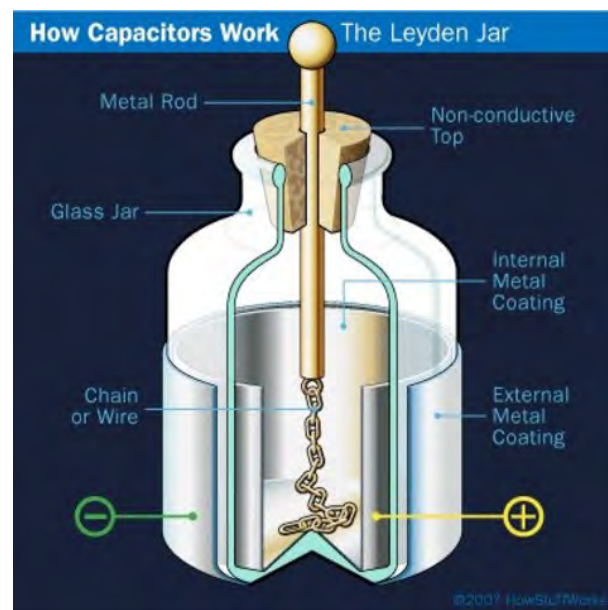
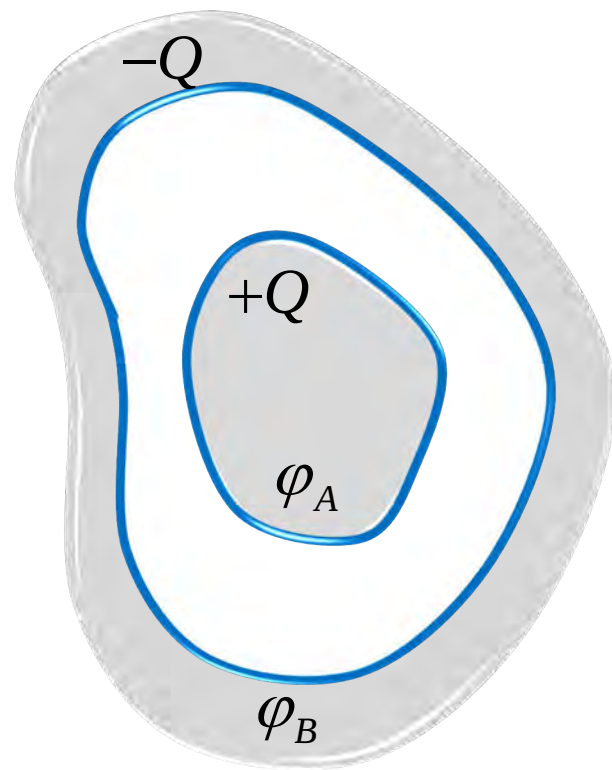
【注1】 电容数值取决于两极板的几何特性（大小、形状、相对位置）。

【注2】 电容大小反应了该导体在给定电势下储电的能力。如果外极板在 ∞ 处， C 即为孤立导体电容。

【注3】 电容器的电容也可如下：

$$C \triangleq \frac{\Delta Q_{A \rightarrow B}}{\varphi_A - \varphi_B}$$

$\Delta Q_{A \rightarrow B}$ = 用导线连接两导体后
由 A 转移到 B 的电量。



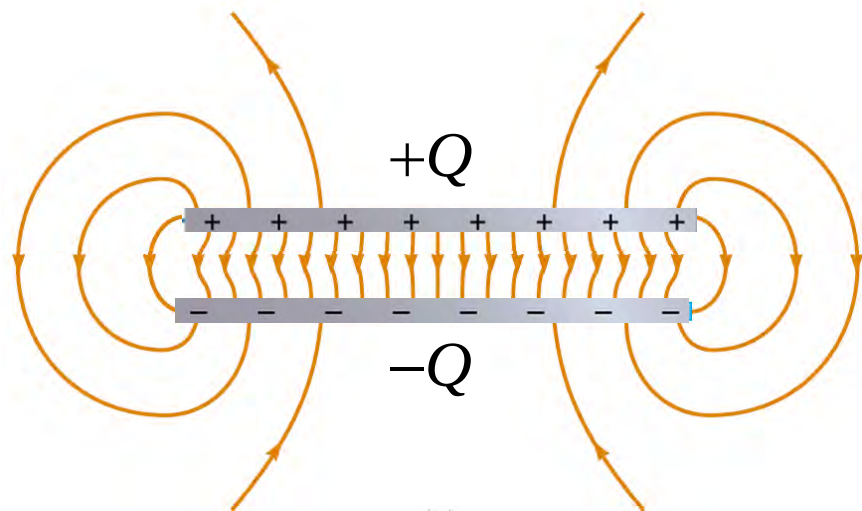
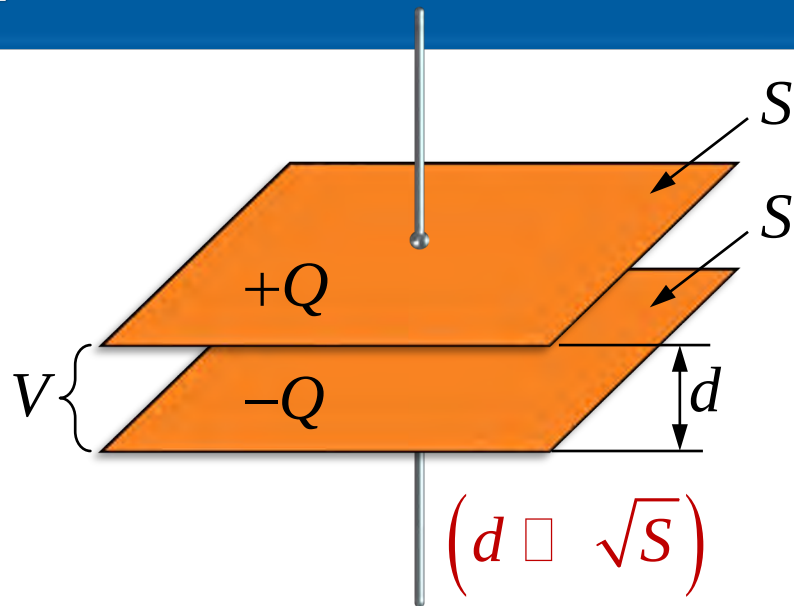
三、几种常见电容器

1. 平行板电容器

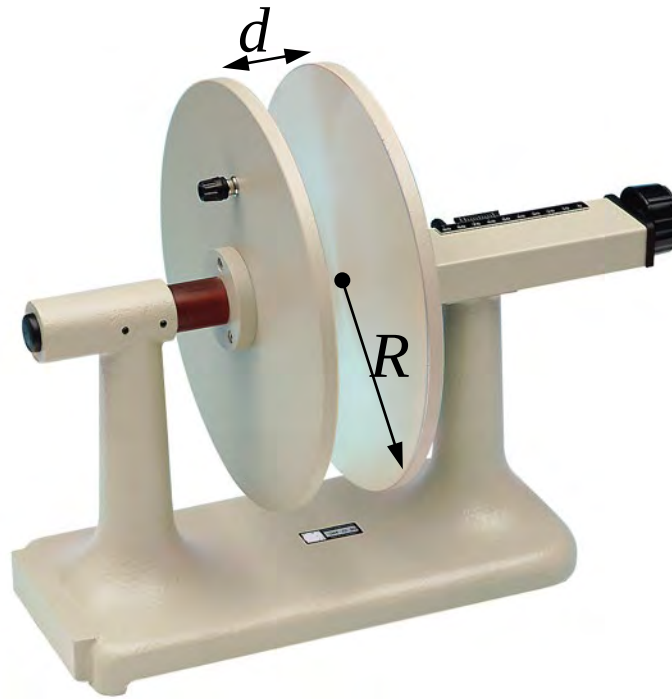
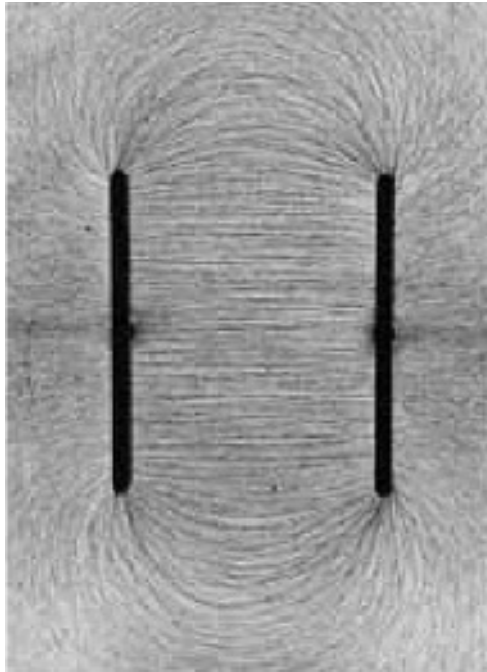
由两块平行放置的金属板组成的电容器。两极板均匀带电，带电量为 $\pm Q$ ，**忽略极板的边缘效应**，两板之间的电压为：

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

→ $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

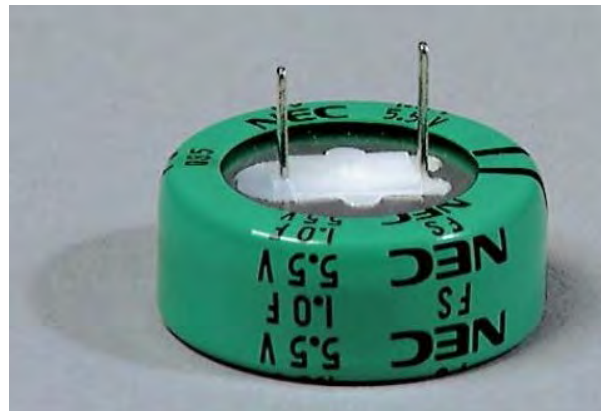
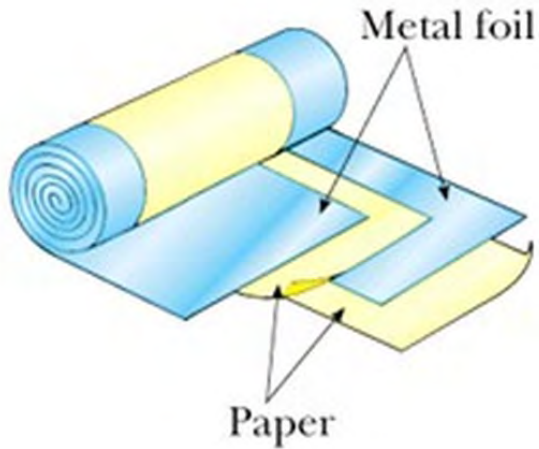


边缘效应



$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} f\left(\frac{d}{R}\right)$$

d/R	f
0.2	1.286
0.1	1.167
0.05	1.094
0.02	1.042
0.01	1.023



← 2.8 cm →

$$d = 25 \mu\text{m}$$

$$S = 2.8 \text{ km}^2$$

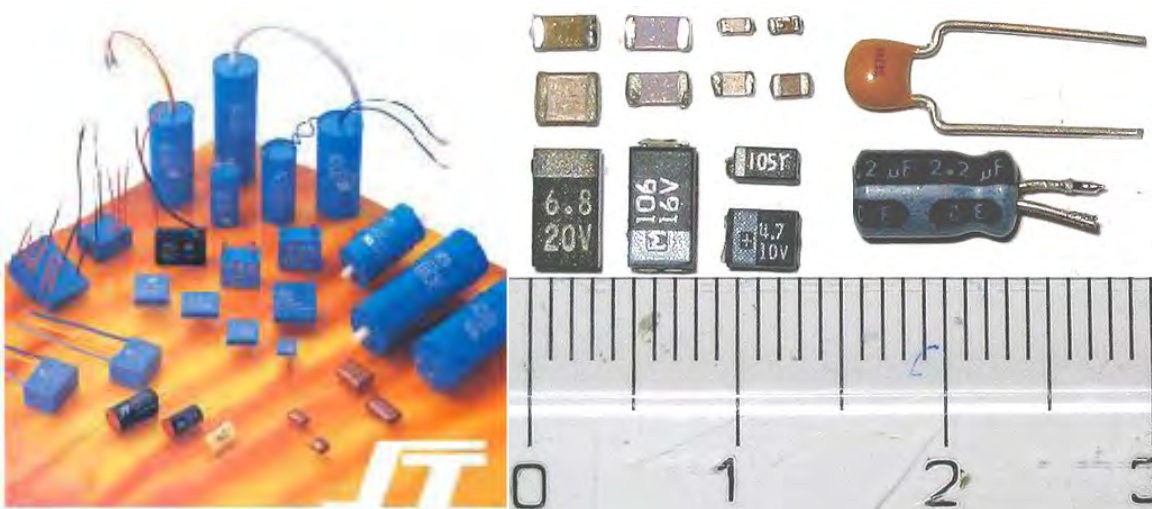
电容器的分类

- 按介质分类：

真空，空气，云母，纸质，油纸，电解聚四氟乙烯等。

- 按是否可变分类：

可变，半可变，微调，固定。



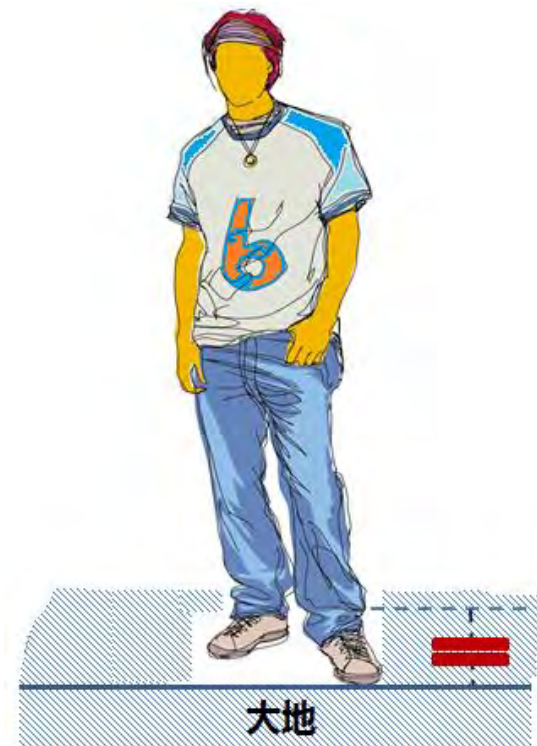
现在来估算人与大地之间的电容

假设人的横截面积为 300 cm^2 ,

人与地面间距为 $5\sim 10 \text{ mm}$,

则人与大地之间的电容约为 $C_0 = 100\sim 300 \text{ pF}$

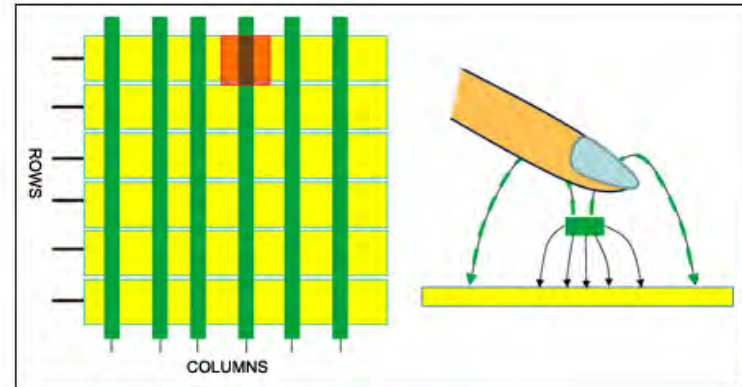
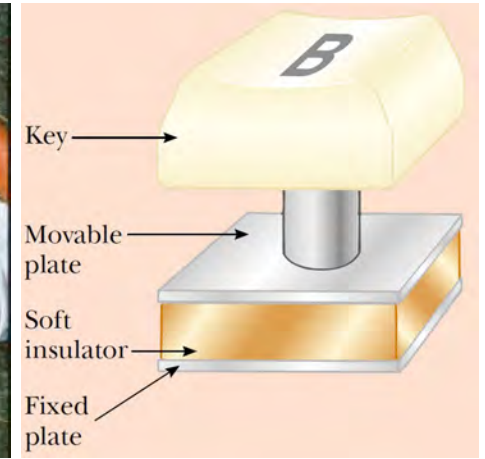
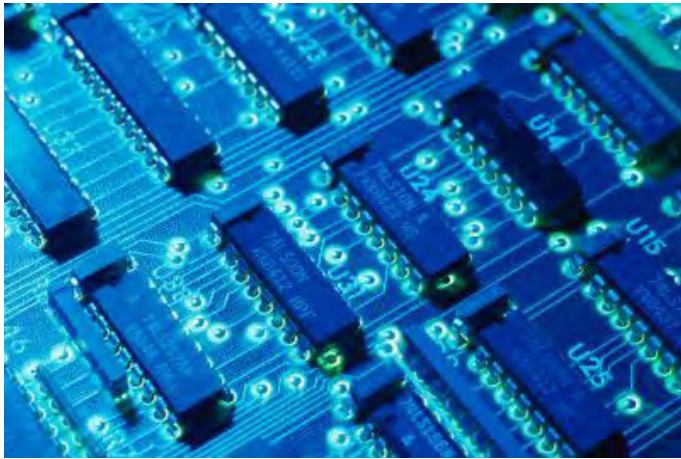
实际测量值大约为 $C = (60\sim 70\%) C_0$ 。



电容器的应用

电容器能储电、储能，并能在极短时间释放电能。

- 计算机内存（动态RAM）
- 键盘、电容式触摸屏、除颤器等

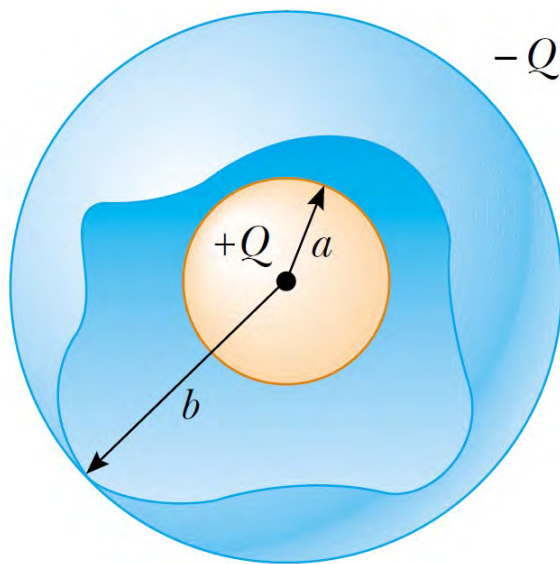


2. 球形电容器

由两个同心导体球壳组成的电容器。两球壳之间的电压为：

$$V_{ab} \triangleq \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\longrightarrow C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{1/a - 1/b} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b - a}$$



【注1】 $a \ll b \rightarrow$ 孤立导体球。

【注2】 $d = b - a \ll a \rightarrow$ 平行板电容器

$$\left[C = \epsilon_0 \frac{4\pi ab}{b - a} \approx \epsilon_0 \frac{4\pi a^2}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \right]$$

3. 圆柱形电容器

由两个同轴导体圆筒组成的电容器。设圆筒半径分别为 a 和 b ，长为 L ，当 $L \gg b-a$ 时，可近似认为圆筒无限长，边缘效应可忽略。

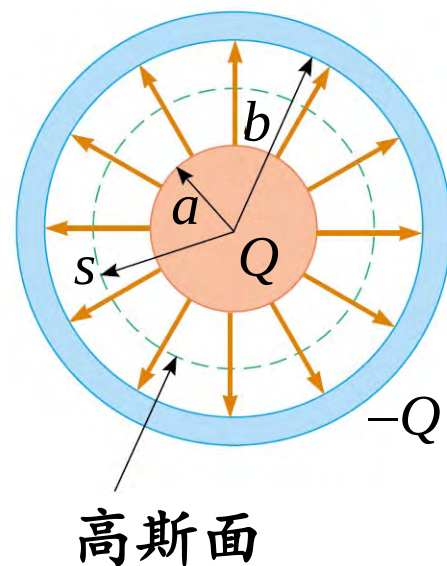
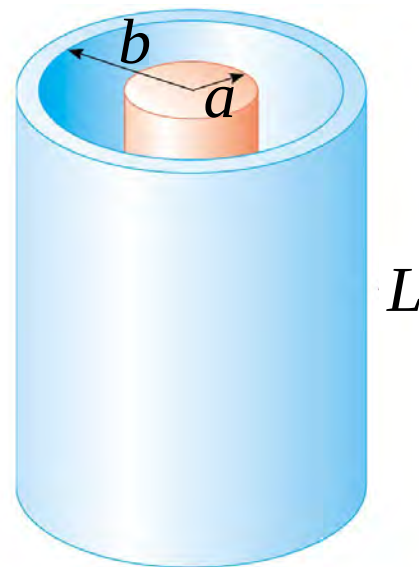
$$\vec{E} = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s}$$

$$\longrightarrow V_{ab} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_a^b \frac{ds}{s} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}$$

$$\longrightarrow C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

【注】 $d = b - a \ll a \rightarrow$ 平行板电容器

$$\left[\ln \frac{b}{a} = \ln \frac{a+d}{a} = \ln \left(1 + \frac{d}{a} \right) \approx \frac{d}{a} \right]$$



四、电容器的联结

电源



电容器



开关



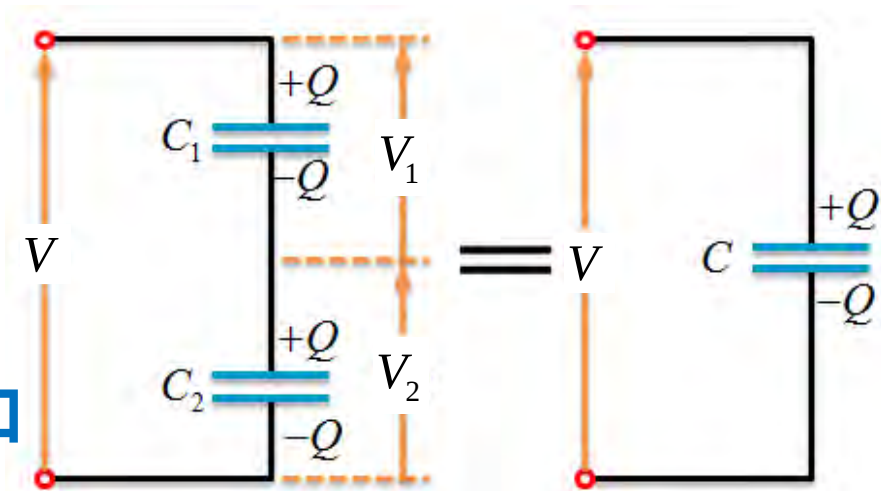
1. 电容器串联

- 各极板上电量的绝对值相等

$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q$$

- 总电压等于各电容器电压之和

$$V_1 + V_2 + \cdots = V$$

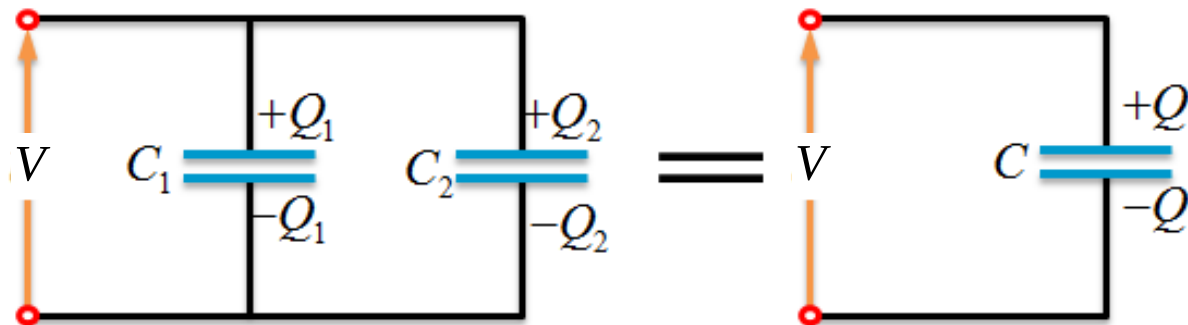


$$\longrightarrow V = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \cdots = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \right) = \frac{Q}{C}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$$

【注】但实际电容器很少串联使用，因为一旦一只电容器被击穿，会使其他电容器相继被击穿。

2. 电容器并联



- 各电容器电压相同 $V_1 = V_2 = \dots = V$

- 总电量等于各电容器电量之和 $Q_1 + Q_2 + \dots = Q$

$$\longrightarrow Q = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \dots = (C_1 + C_2 + \dots) V = CV$$

$$\longrightarrow C = C_1 + C_2 + \dots = \sum_{k=1}^n C_k$$

【注】电容器并联后可以获得较大的电容。

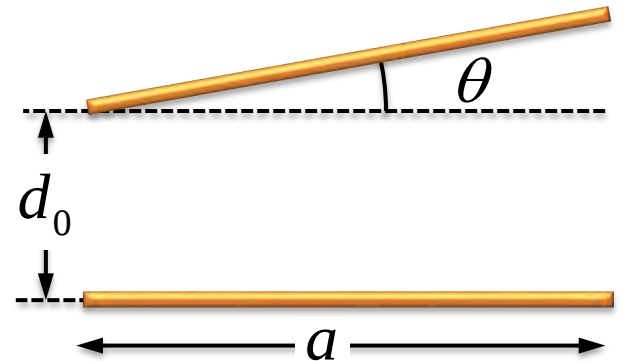
讨论：非平行板电容器

$$dC = \frac{\varepsilon_0 dS}{d} = \frac{\varepsilon_0 a dx}{d_0 + x \sin \theta} \approx \frac{\varepsilon_0 a dx}{d_0 + \theta x}$$

$$C = \int dC \approx \int_0^a \frac{\varepsilon_0 a dx}{d_0 + \theta x} = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta} \ln \left(1 + \frac{\theta a}{d_0} \right)$$

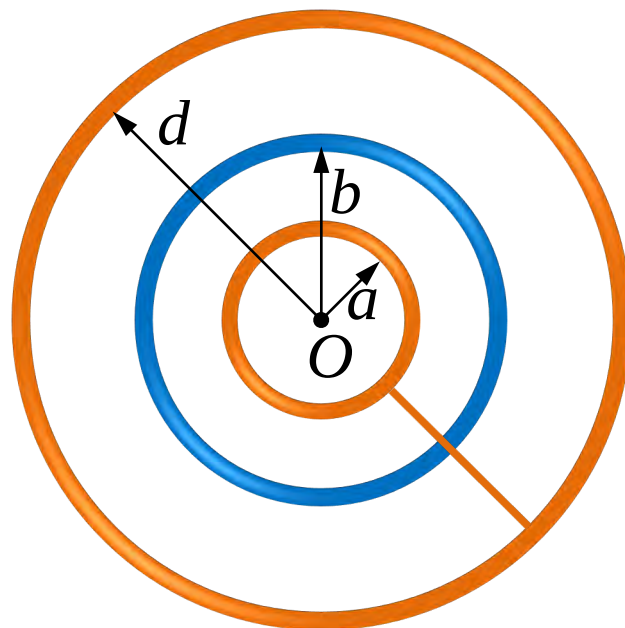
$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$$

$$C \approx \frac{\varepsilon_0 a}{\theta} \left[\frac{\theta a}{d_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\theta a}{d_0} \right)^2 \right] \approx \frac{\varepsilon_0 a^2}{d_0} \left(1 - \frac{\theta a}{2d_0} \right)$$

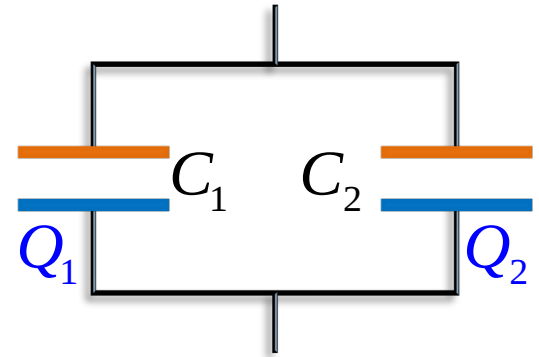
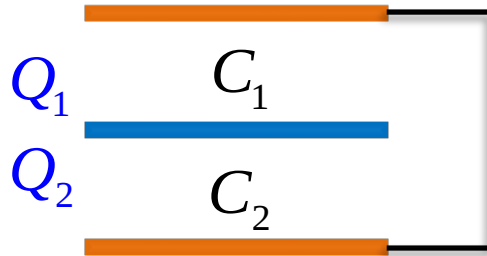
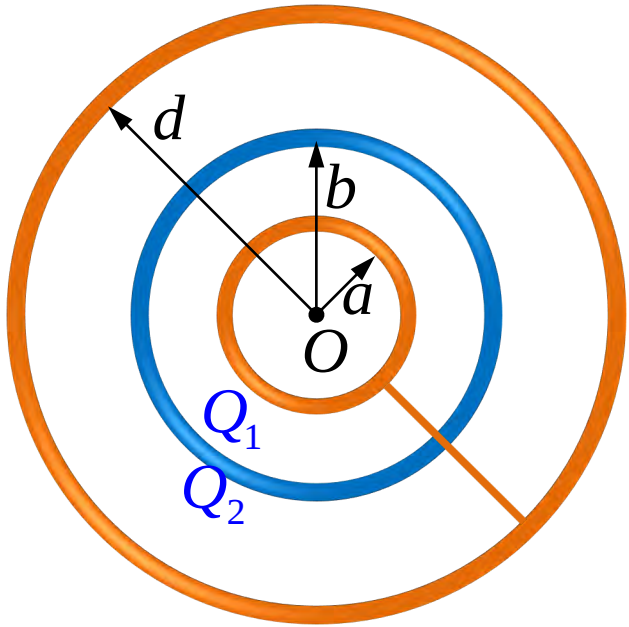


【例】 一个球形电容器由三个很薄的同心导体壳组成，它们的半径分别为 a 、 b 、 d 。一根绝缘细导线通过中间壳层的一个小孔把内外球壳连接起来。忽略小孔的边缘效应。求：

- (1) 此系统的电容；
- (2) 若在中问球壳上放置任意电量 Q ，确定中间球壳内外表面上的电荷分布



【解】 (1) 相对于内、外两电容器并联



$$C_1 = \frac{4\pi\epsilon_0}{1/a - 1/b}, \quad C_2 = \frac{4\pi\epsilon_0}{1/b - 1/d}$$

$$\rightarrow C = C_1 + C_2 = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{1/a - 1/b} + \frac{1}{1/b - 1/d} \right)$$

(2) 相对于内、外两电容器并联设中间球壳内、外表面带电分别为 Q_1 和 Q_2 :

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q \\ \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \end{cases}$$

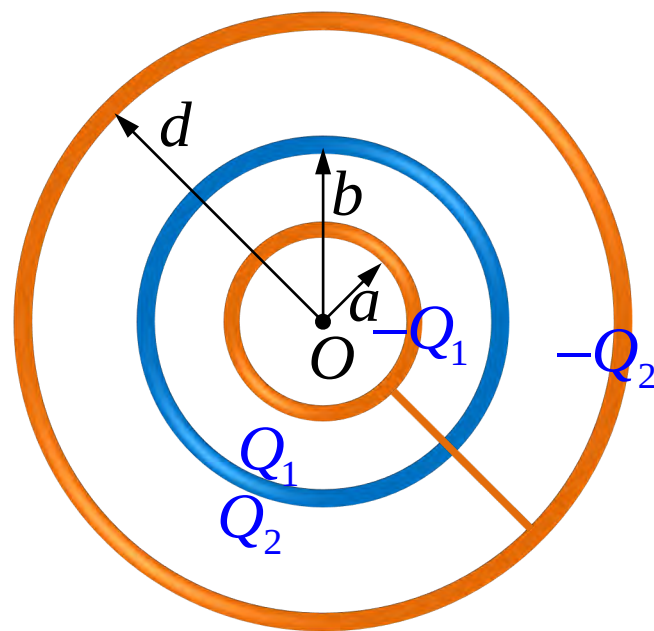


$$\begin{cases} Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q = \frac{1/b - 1/d}{1/a - 1/d} Q \\ Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q = \frac{1/a - 1/b}{1/a - 1/d} Q \end{cases}$$

或者直接利用电荷守恒 $Q_1 + Q_2 = Q$ 及:

$$V_{ab} = V_{db}$$

$$\rightarrow \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right)$$



【例】 各电容器电容以及电量如图。试确定当开关合上后各电容器所带电量。

【解】 设各电容器上极板带电分别为

$$(Q'_1, Q'_2, Q'_3)$$

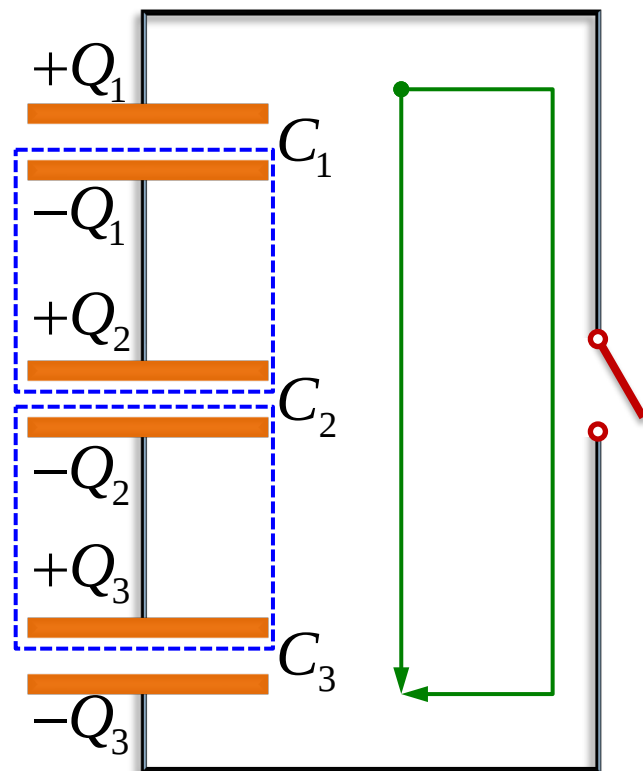
由**电荷守恒**得到

$$\begin{cases} Q'_2 - Q'_1 = Q_2 - Q_1 \\ Q'_3 - Q'_2 = Q_3 - Q_2 \end{cases}$$

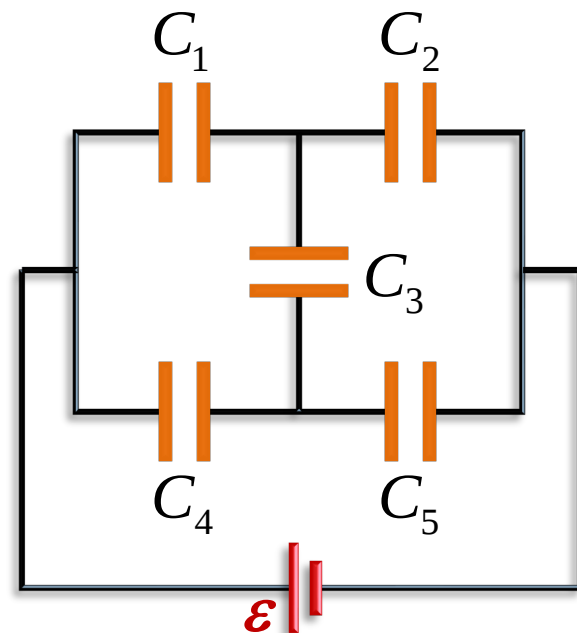
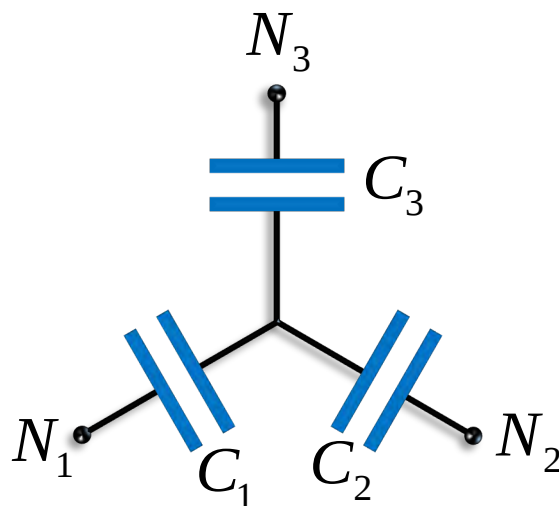
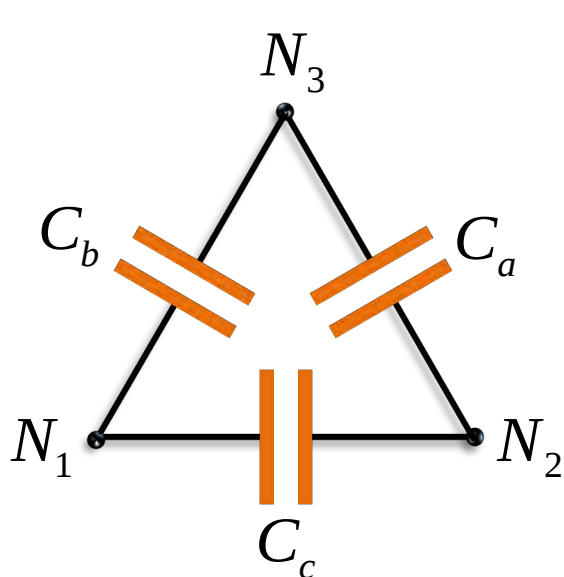
又由**环路定理**得到

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

$$\rightarrow \frac{Q'_1}{C_1} + \frac{Q'_2}{C_2} + \frac{Q'_3}{C_3} = 0$$



3. 三种典型的复杂联结



$$\Delta \triangleq C_a C_b + C_a C_c + C_b C_c, \quad Y \triangleq \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$\mathbf{Y} \rightarrow \Delta \text{ 变换: } C_1 = \frac{\Delta}{C_a}, \quad C_b = \frac{\Delta}{C_2}, \quad C_c = \frac{\Delta}{C_3}$$

$$\Delta \rightarrow \mathbf{Y} \text{ 变换: } C_a = \frac{Y}{C_1}, \quad C_b = \frac{Y}{C_2}, \quad C_c = \frac{Y}{C_3}$$

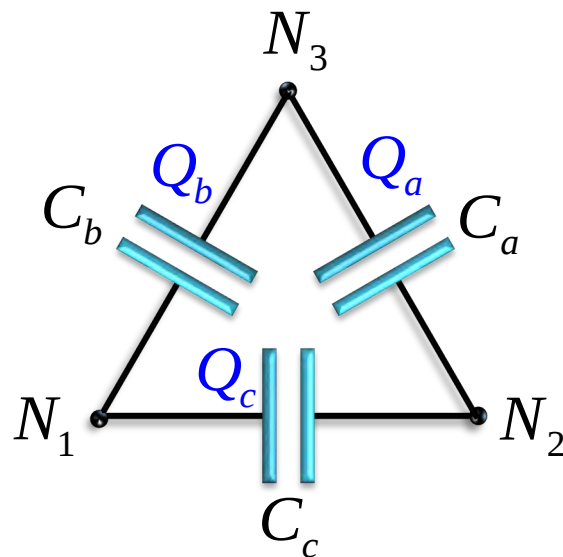
■ 设各电容器正极板电量如图所示

■ 二者等效意味着

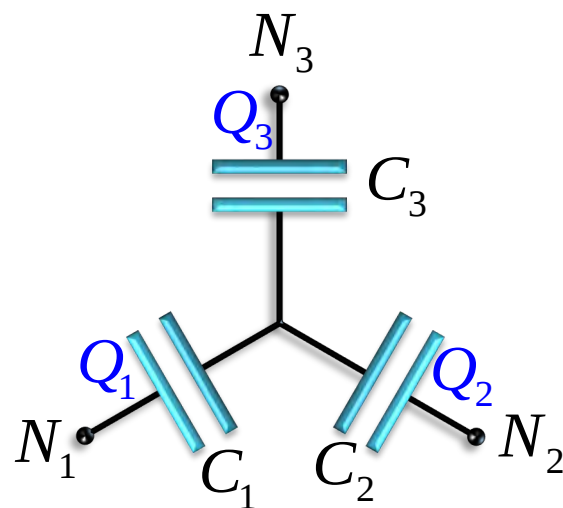
$$\begin{cases} Q_3 = Q_a + Q_b \\ Q_1 = Q_c - Q_b \\ Q_2 = -Q_a - Q_c \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} V_{31} = \frac{Q_b}{C_b} = \frac{Q_3}{C_3} - \frac{Q_1}{C_1} \\ V_{32} = \frac{Q_a}{C_a} = \frac{Q_3}{C_3} - \frac{Q_2}{C_2} \\ V_{12} = \frac{Q_c}{C_c} = \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{Q_a}{C_a} = \frac{Q_a + Q_b}{C_3} + \frac{Q_a + Q_c}{C_2} \\ \frac{Q_b}{C_b} = \frac{Q_a + Q_b}{C_3} - \frac{Q_c - Q_b}{C_1} \\ \frac{Q_c}{C_c} = \frac{Q_c - Q_b}{C_1} + \frac{Q_a + Q_c}{C_2} \end{cases}$$



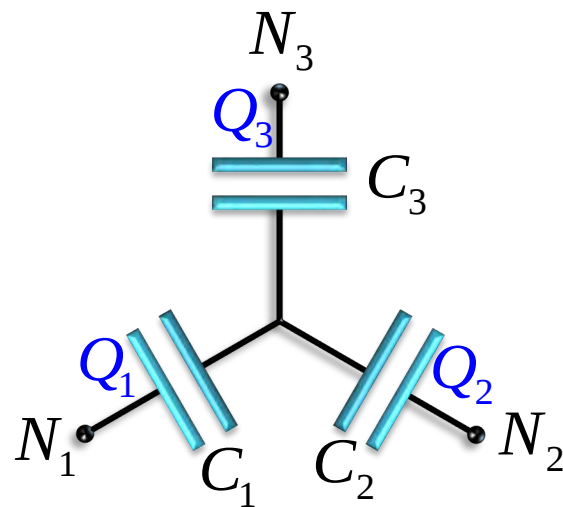
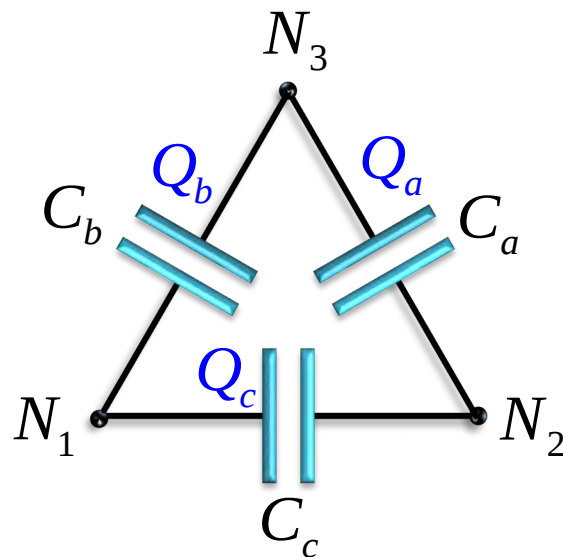
$$\begin{cases} \frac{Q_a}{C_a} = \frac{Q_a + Q_b}{C_3} + \frac{Q_a + Q_c}{C_2} \\ \frac{Q_b}{C_b} = \frac{Q_a + Q_b}{C_3} - \frac{Q_c - Q_b}{C_1} \\ \frac{Q_c}{C_c} = \frac{Q_c - Q_b}{C_1} + \frac{Q_a + Q_c}{C_2} \end{cases}$$

■ 取 $Q_c = 0$ ，第三式意味着 $\frac{Q_a}{Q_b} = \frac{C_2}{C_1}$

代入前两式得到

$$\frac{1}{C_a} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_2 C_3} = \frac{C_1}{Y}$$

$$\frac{1}{C_b} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_1 C_3} = \frac{C_2}{Y}$$



■ 类似可得 C_c ，因此

$$C_a = \frac{Y}{C_1}, C_b = \frac{Y}{C_2}, C_c = \frac{Y}{C_3}$$

■ 由于

$$\begin{aligned} \Delta &= C_a C_b + C_a C_c + C_b C_c \\ &= Y^2 \left(\frac{1}{C_1 C_2} + \frac{1}{C_1 C_3} + \frac{1}{C_2 C_3} \right) = Y \end{aligned}$$

因此，反变换为

$$C_1 = \frac{Y}{C_a} = \frac{\Delta}{C_a}, C_2 = \frac{Y}{C_b} = \frac{\Delta}{C_b}, C_3 = \frac{Y}{C_c} = \frac{\Delta}{C_c}$$

【例】 试求图示电路中各电容器两端的电压。 已知 $\varepsilon = 600 \text{ V}$, $C_1 = C_3 = C_5 = 3 \mu\text{F}$, $C_2 = C_4 = 1 \mu\text{F}$ 。

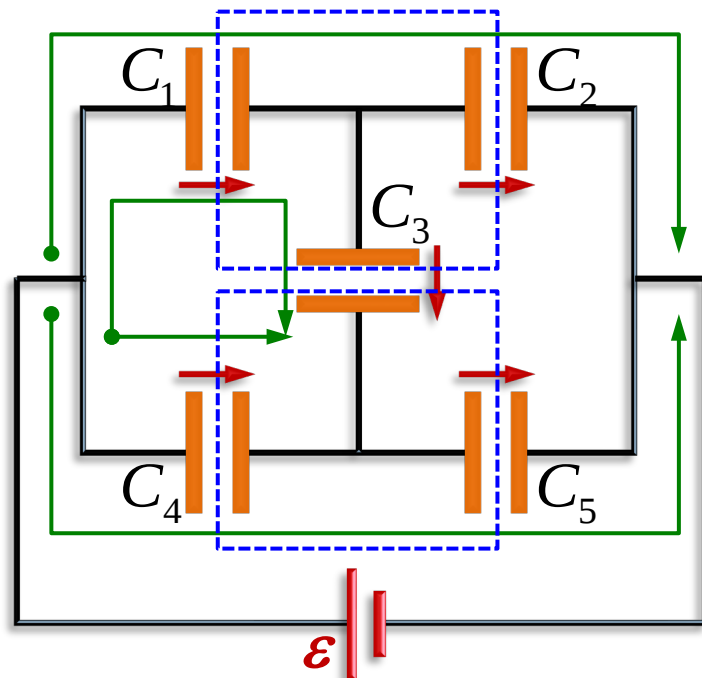
【解】 设正极板指向负极板的方向如图。由**环路定理**得到

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = \varepsilon \\ V_4 + V_5 = \varepsilon \\ V_1 + V_3 = V_4 \end{cases}$$

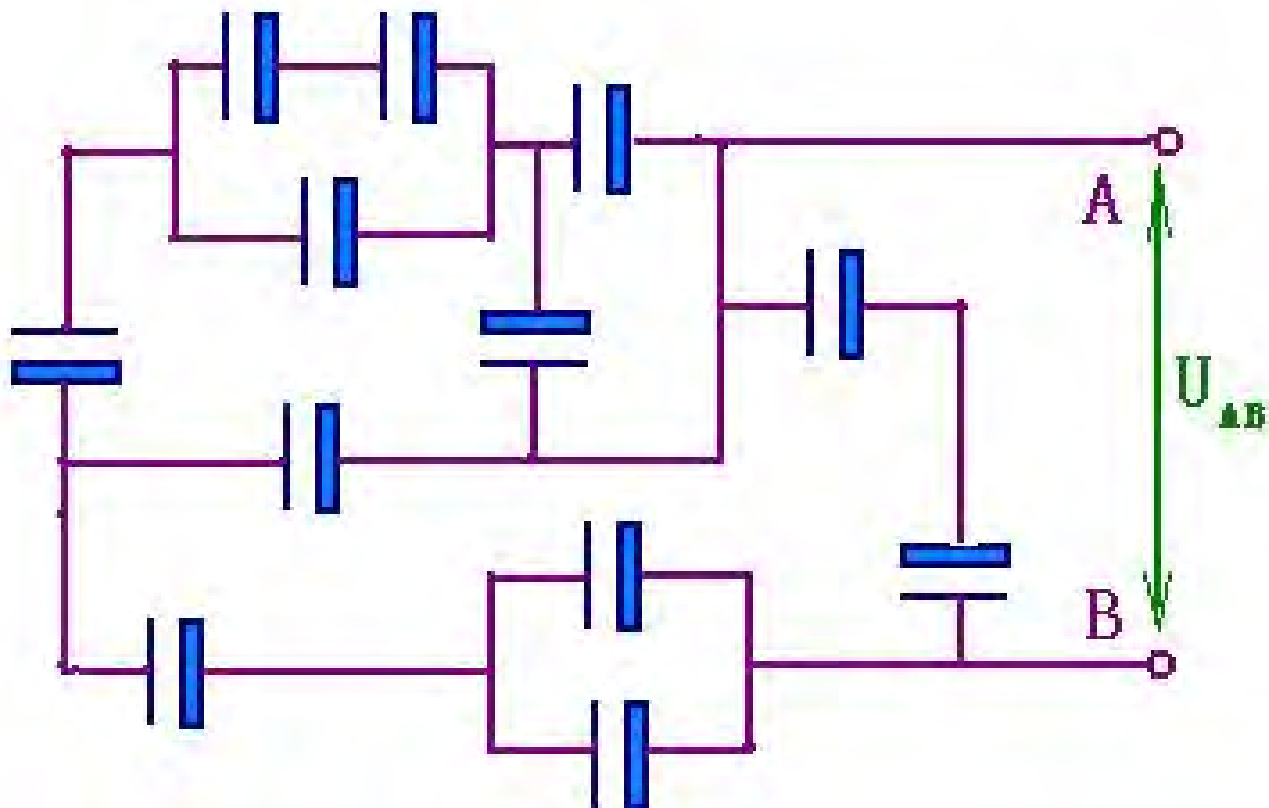
又由**电荷守恒**得到

$$\begin{cases} Q_2 + Q_3 = Q_1 \\ Q_3 + Q_4 = Q_5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2 V_2 + C_3 V_3 = C_1 V_1 \\ C_3 V_3 + C_4 V_4 = C_5 V_5 \end{cases}$$

$$\rightarrow V_1 = V_5 = 240 \text{ V}, V_2 = V_4 = 360 \text{ V}, V_3 = 120 \text{ V}$$



电容器混联



人类的梦想---雷电能量的“捕捉和储存”



■ **电容 (capacitance/capacity): 量度储电能力(导体几何特性)**

五、导体系统的电容

1. 电容系数

空间中有若干导体构成的孤立体系，各导体电势给定，分别为 φ_k ($k = 1, 2, \dots, N$)。

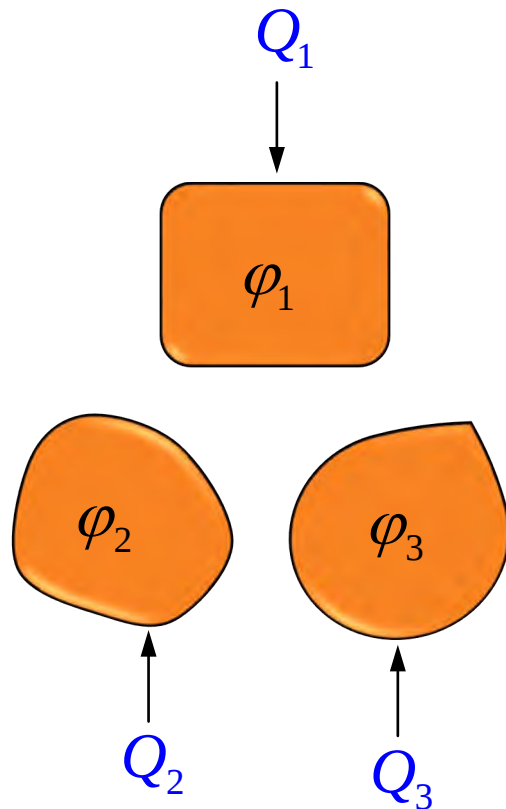
- 唯一性定理意味着：全空间电场、从而各导体所带总电量 Q_k 唯一确定：

$$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \longrightarrow (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

即每一个 Q_k 均可以表示为诸 φ_k 的函数：

$$Q_k = Q_k(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

问题：这些函数有什么性质？



- 维持导体 1 电势等于给定数值 φ_1 ，其余导体电势为零。
则导体 k 的带电量为：

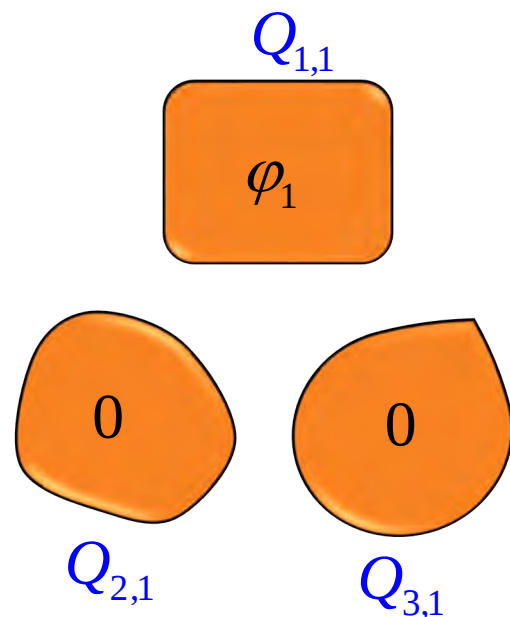
$$Q_{k,1} = Q_{k,1}(\varphi_1, 0, \dots, 0)$$

问题：若导体 1 电势变为 $\lambda\varphi_1$ ，其余导体电势仍保持为零，各导体电量如何变化？

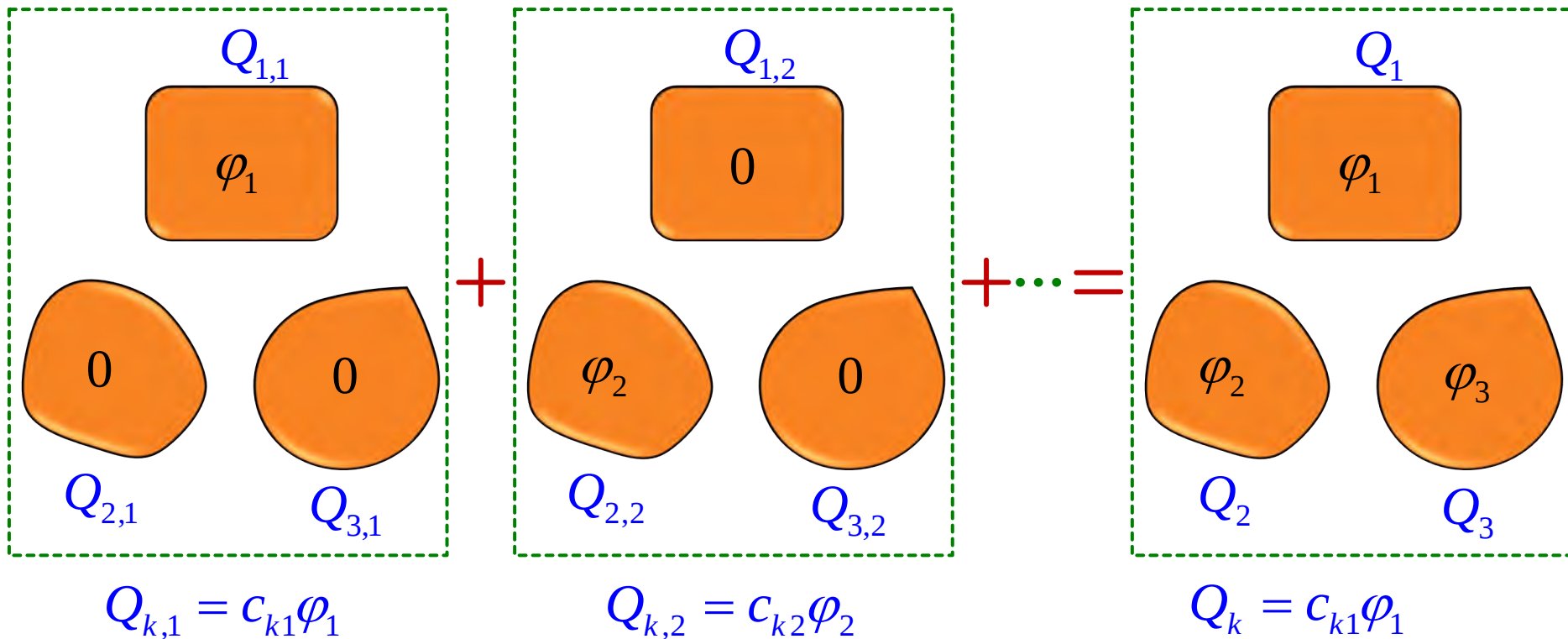
答案：空间每一点的电势、电场都变为原来的 λ 倍（**唯一性定理**），从而各导体电量也变为了原来的 λ 倍（**高斯定理**）！

结论：在其他导体接地情形下各导体电量与导体 1 的电势成正比，比例系数取决于各导体的几何特征（大小、形状、相对距离以及方位），即有

$$Q_{k,1} = c_{k1}\varphi_1$$



● 静电平衡可以叠加：



■ 对于三个导体的情形

$$\begin{cases} Q_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 + c_{13}\varphi_3 \\ Q_2 = c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2 + c_{23}\varphi_3 \\ Q_3 = c_{31}\varphi_1 + c_{32}\varphi_2 + c_{33}\varphi_3 \end{cases}$$

- 孤立导体系统中，各导体所带电量与其电势呈线性关系：

$$Q_k = \sum_{j=1}^N c_{kj} \varphi_j, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

系数 c_{kj} 称为导体系统的**电容系数**。

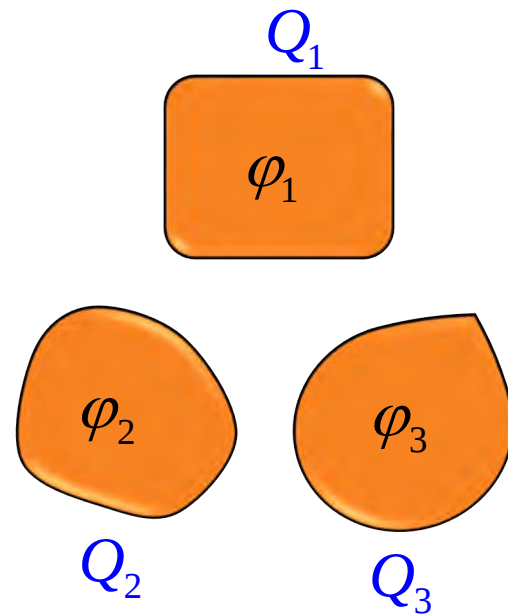
【注1】 c_{kj} 由导体系统的几何特征所决定。

【注2】 c_{kj} 的物理含义：

当导体 j 电势为 $\varphi_j = 1 \text{ V}$,

而其他导体均接地时,

导体 k 所带电量为 $Q_k = c_{kj}$ 。



2. 电容系数的性质

- 对称性: $c_{jk} = c_{kj}$

- 麦克斯韦不等式:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{kk} > 0 \\ c_{kj} \leq 0 \quad (\text{if } k \neq j) \\ \sum_{j=1}^N c_{kj} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^N c_{kj} \geq 0 \end{array} \right.$$



$$(c_{kj}) = \begin{pmatrix} + & - & - & \cdots & - \\ - & + & - & \cdots & - \\ - & - & + & \cdots & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ - & - & - & \cdots & + \end{pmatrix}$$

3. 电压系数

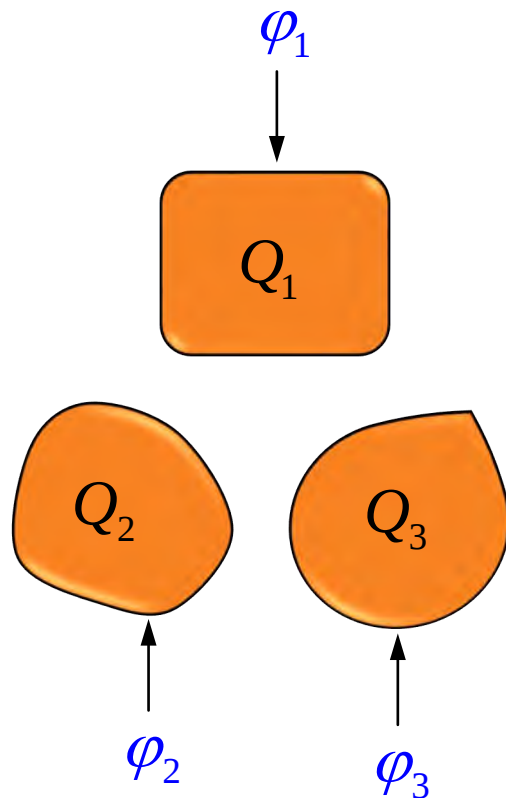
对于孤立导体系统，唯一性定理意味着：
给定各导体的电量后，全空间电场从而各
导体的电势唯一确定：

$$(Q_1, Q_2, \dots, Q_N) \longrightarrow (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$$

类似于前面的讨论可知，各导体电势与其
所带电量呈线性关系：

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^N p_{kj} Q_j, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

系数 p_{kj} 称为导体系统的**电压系数**。



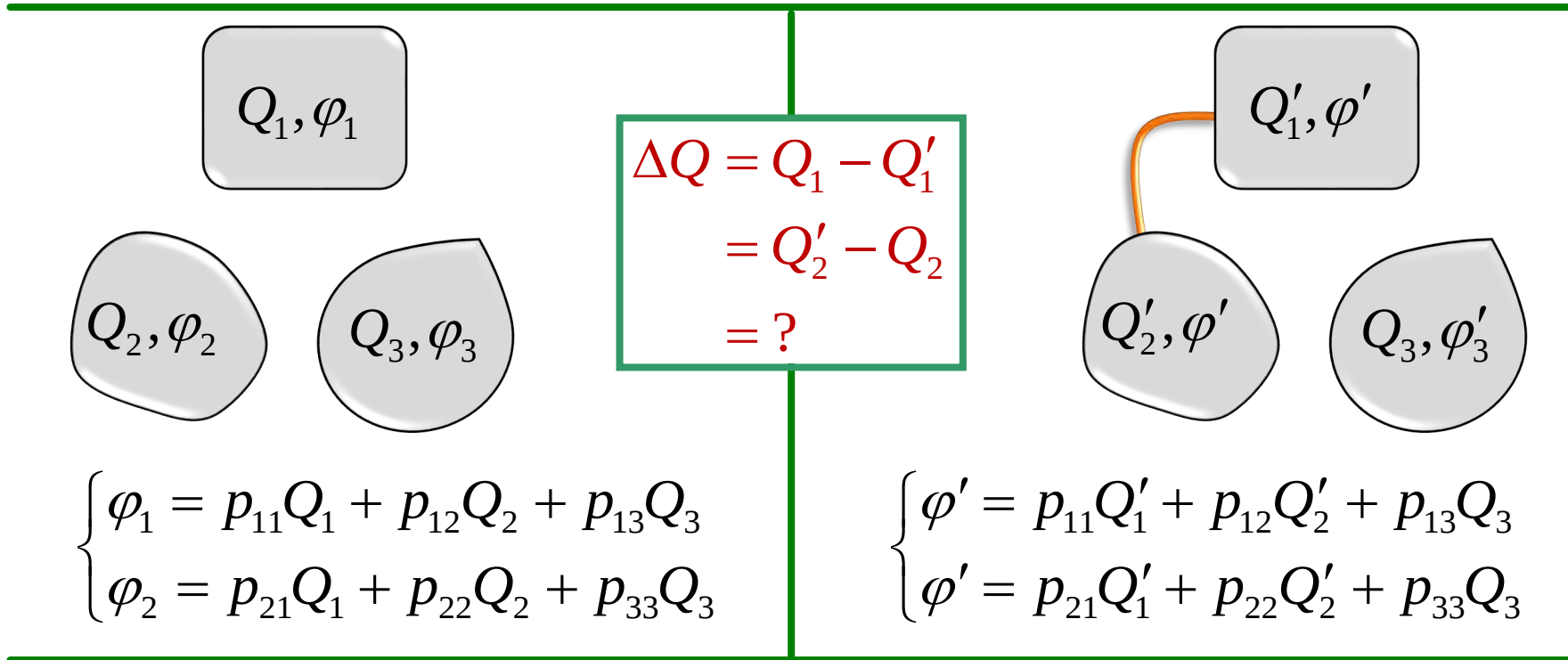
4. 电压系数的性质

- 电压系数矩阵与电容系数矩阵互为逆矩阵。
- 对称性: $p_{jk} = p_{kj}$
- p_{kj} 由导体系统的几何特征所决定。
- p_{kj} 的物理含义:

当导体 j 带电量为 $Q_j = 1 \text{ C}$,
而其他导体均不带电时,
导体 k 的电势为 $\varphi_k = p_{kj}$ 。

5. 导体系统中的两导体之间的电容

问题：如果将导体1、2用导线连接，重新达到静电平衡后，有多少电量从导体1转移到导体2？

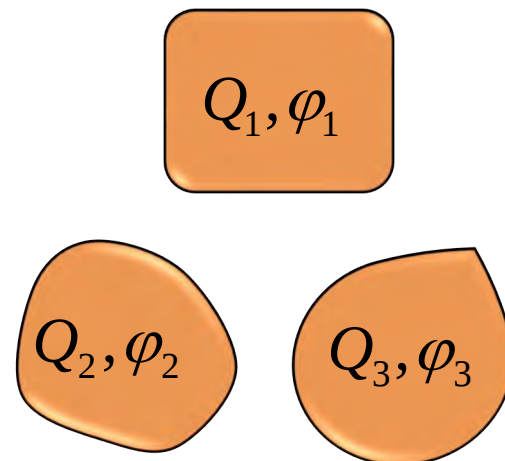


$$\longrightarrow \varphi_1 - \varphi' = p_{11}\Delta Q - p_{12}\Delta Q, \quad \varphi_2 - \varphi' = p_{21}\Delta Q - p_{22}\Delta Q$$

$$\longrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = (p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21})\Delta Q$$

将导体1、2用导线连接，重新达到静电平衡后，从导体1转移到导体2的电量为

$$\Delta Q = Q_1 - Q'_1 = \frac{\phi_1 - \phi_2}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}}$$

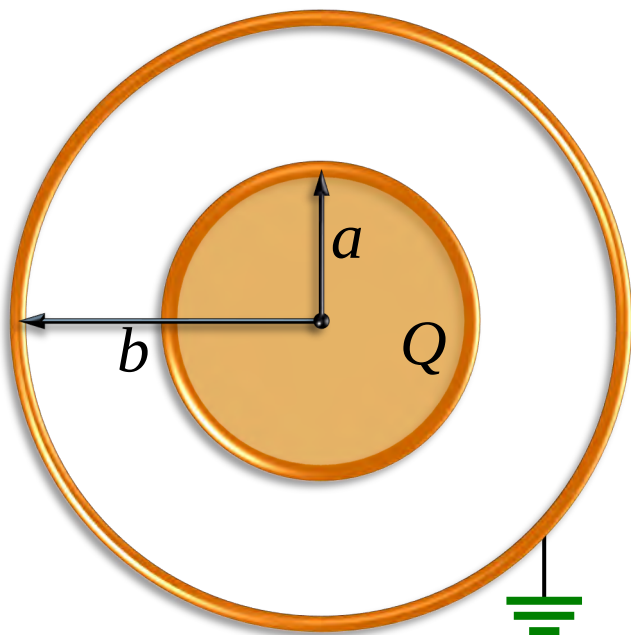


即转移电量与二者电压成正比，比例系数完全由导体系统的几何特征决定。将其称为处于该导体系统中的**两导体之间的电容**：

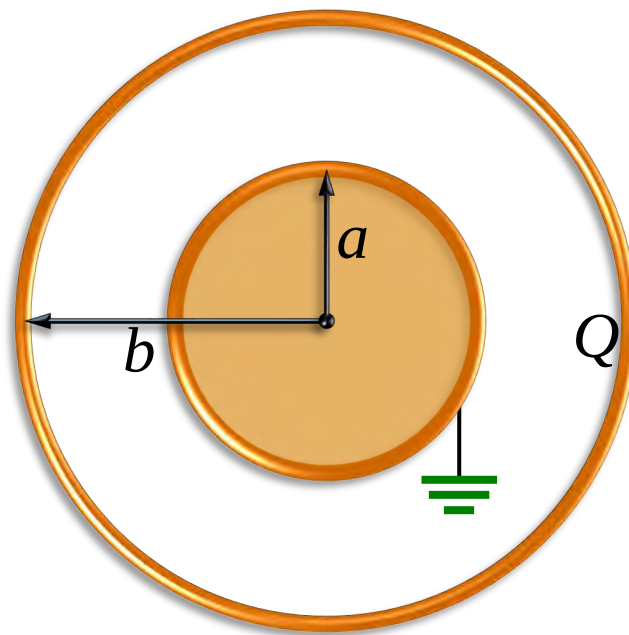
$$C_{12} \triangleq \frac{\Delta Q}{\phi_1 - \phi_2} = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}}$$

【例】 半径为 b 的导体球壳内有一半径为 a 的同心导体球，试就以下两种情形分别计算系统的电容：

- (1) 导体球壳接地而导体球带有正的电量 Q ;
- (2) 导体球壳接地而导体球壳带有正的电量 Q 。



外球壳接地

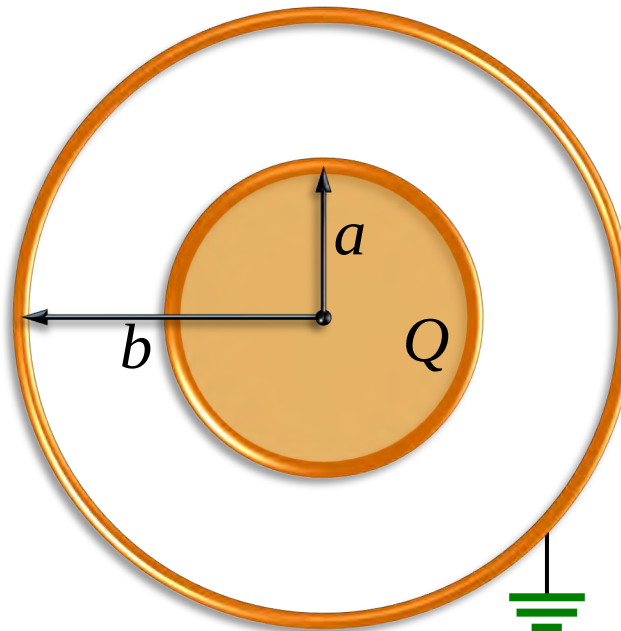


内球壳接地

【解】 (1) 两导体的电势差为

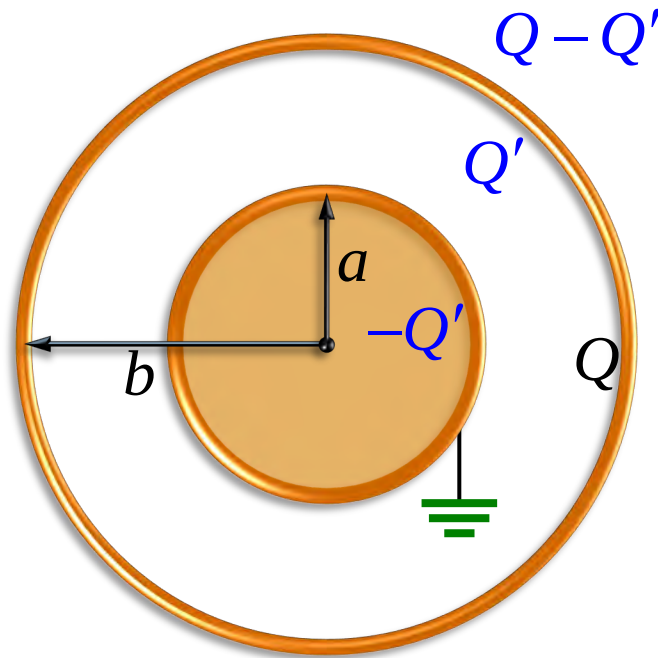
$$V = \varphi(a) - \varphi(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

→ $C_1 = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$



(2) 设导体球上的感应电荷为 $-Q'$ ，
则导体球壳内外表面的电量分别为
 $+Q'$ 和 $Q-Q'$ 。由于导体球电势为
零，所以

$$\frac{Q}{b} - \frac{Q'}{a} = 0 \quad \longrightarrow \quad Q' = \frac{a}{b}Q$$



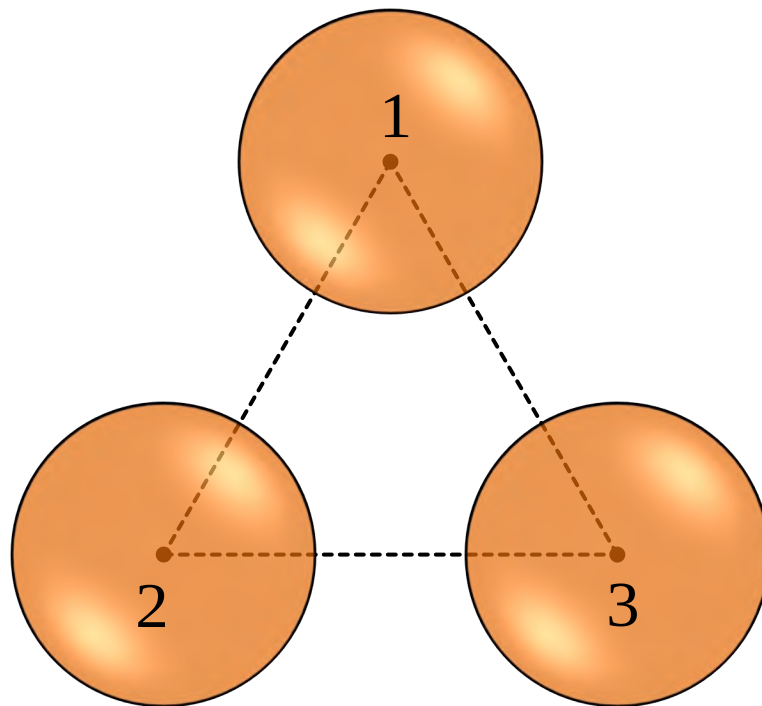
两导体的电势差为

$$V = \varphi(b) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q - Q'}{b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{b - a}{b^2} Q$$

$$\longrightarrow \quad C_2 = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{b^2}{b - a} = C_1 + 4\pi\epsilon_0 b$$

【例】 三个相同的导体球，球心位于等边三角形的三个顶点处。已知导体球电势分别为 $(\varphi, 0, 0)$ 时，带电量分别为 (q, q_0, q_0) ：

- (1) 若各球的电势均为 φ' ，试求各球带电量 q' ；
- (2) 若各球所带电量为 $(q'', 0, 0)$ ，试求各球的电势；
- (3) 若各球所带电量为 $(q, 2q, 3q)$ ，试求各球的电势。



【解】 由对称性知：

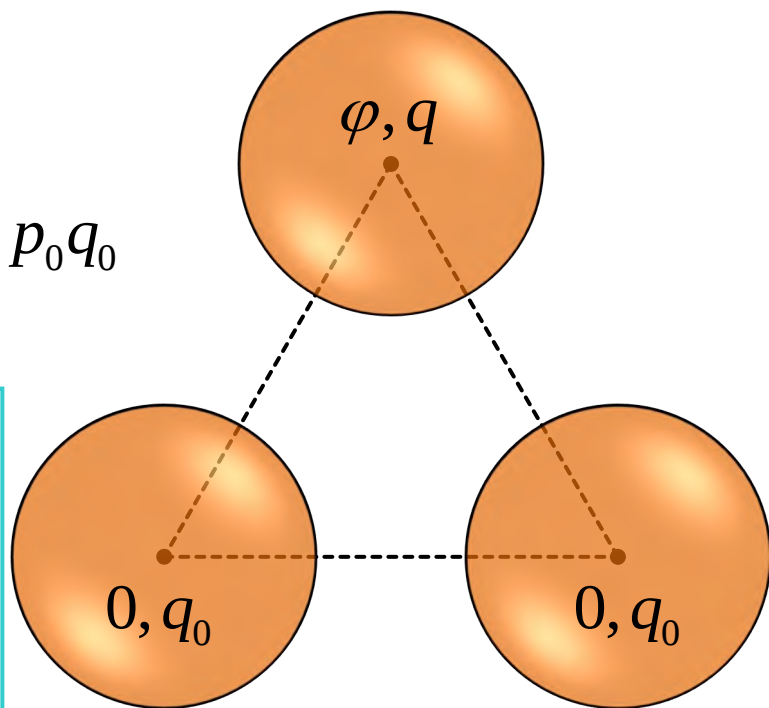
$$\begin{cases} q_1 = c_0 \varphi_1 + c_1 \varphi_2 + c_1 \varphi_3 \\ q_2 = c_1 \varphi_1 + c_0 \varphi_2 + c_1 \varphi_3 \\ q_3 = c_1 \varphi_1 + c_1 \varphi_2 + c_0 \varphi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1 = p_0 q_1 + p_1 q_2 + p_1 q_3 \\ \varphi_2 = p_1 q_1 + p_0 q_2 + p_1 q_3 \\ \varphi_3 = p_1 q_1 + p_1 q_2 + p_0 q_3 \end{cases}$$

由已知条件可得

$$\begin{cases} q = c_0 \varphi \\ q_0 = c_1 \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = p_0 q + 2p_1 q_0 \\ 0 = p_1 (q + q_0) + p_0 q_0 \end{cases}$$

$$c_0 = \frac{q}{\varphi}, \quad p_0 = \frac{q + q_0}{(q + 2q_0)(q - q_0)} \varphi$$

$$c_1 = \frac{q_0}{\varphi}, \quad p_1 = -\frac{q_0}{(q + 2q_0)(q - q_0)} \varphi$$



(1) 若各球的电势均为 φ' ，则各球带电量为：

$$q' = (c_0 + 2c_1)\varphi' = (q + 2q_0)\frac{\varphi'}{\varphi}$$

(2) 若各球所带电量为 $(q'', 0, 0)$ ，则各球的电势为：

$$\begin{cases} \varphi_1 = p_0 q'' = \frac{(q + q_0)q''}{(q + 2q_0)(q - q_0)} \varphi \\ \varphi_2 = \varphi_3 = p_1 q'' = -\frac{q_0 q''}{(q + 2q_0)(q - q_0)} \varphi \end{cases}$$

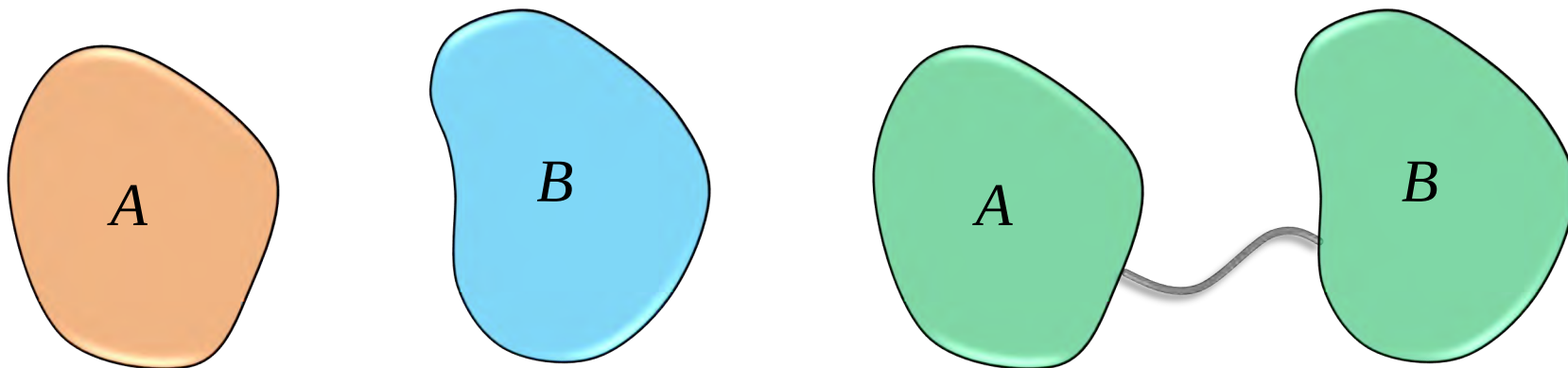
(3) 若各球所带电量为 $(q, 2q, 3q)$ ，则各球的电势为：

$$\begin{cases} \varphi_1 = p_0 q + 2p_1 q + 3p_1 q = (p_0 + 5p_1)q \\ \varphi_2 = p_1 q + 2p_0 q + 3p_1 q = 2(p_0 + 2p_1)q \\ \varphi_3 = p_1 q + 2p_1 q + 3p_0 q = 3(p_0 + p_1)q \end{cases}$$

【例】 对于两导体构成的系统，试用电容系数表示

(1) 两导体间的电容 C ;

(2) 将二者用导线连接后孤立导体的电容 C_0 。



【解】 (1) 电容系数矩阵与电压系数矩阵互为逆矩阵

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{11} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow C = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}}$$

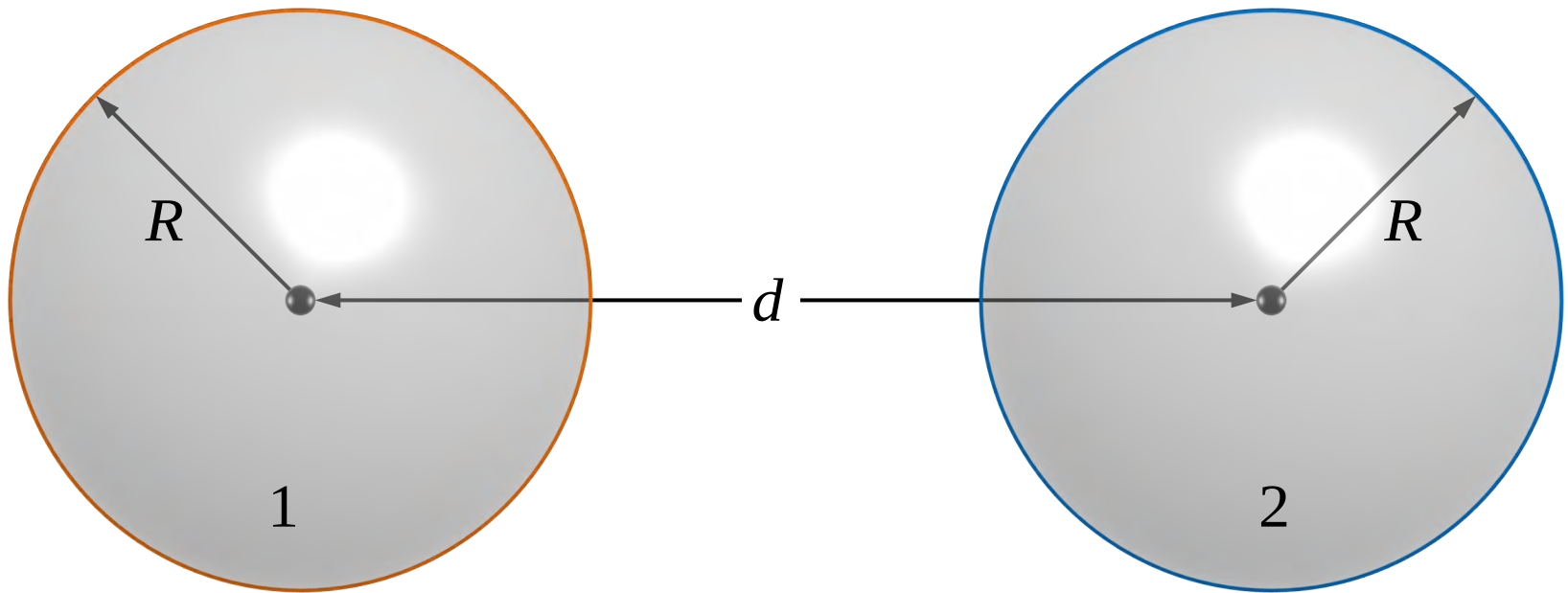
(2) 用导线连接后，两导体电势相同，因此

$$Q_1 = c_{11}\varphi + c_{12}\varphi, \quad Q_2 = c_{12}\varphi + c_{22}\varphi$$

$$\longrightarrow C_0 = \frac{Q_1 + Q_2}{\varphi} = c_{11} + c_{22} + 2c_{12}$$

【例】 设两个半径均为 R 的导体球相距为 d ($\geq 2R$) :

- (1) 用电容系数写出两球间的电容 C 以及用导线连接后导体的电容 C_0 ;
- (2) 如果 $d = 2R$, 试求出 C 、 C_0 ;
- (3) 如果 $d = 4R$, 试在1%的精确度下求出 C 、 C_0 。



【解】 (1) 由对称性有 $c_{11} = c_{22}$ ，即有

$$Q_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2, \quad Q_2 = c_{12}\varphi_1 + c_{11}\varphi_2$$

利用前例结果：

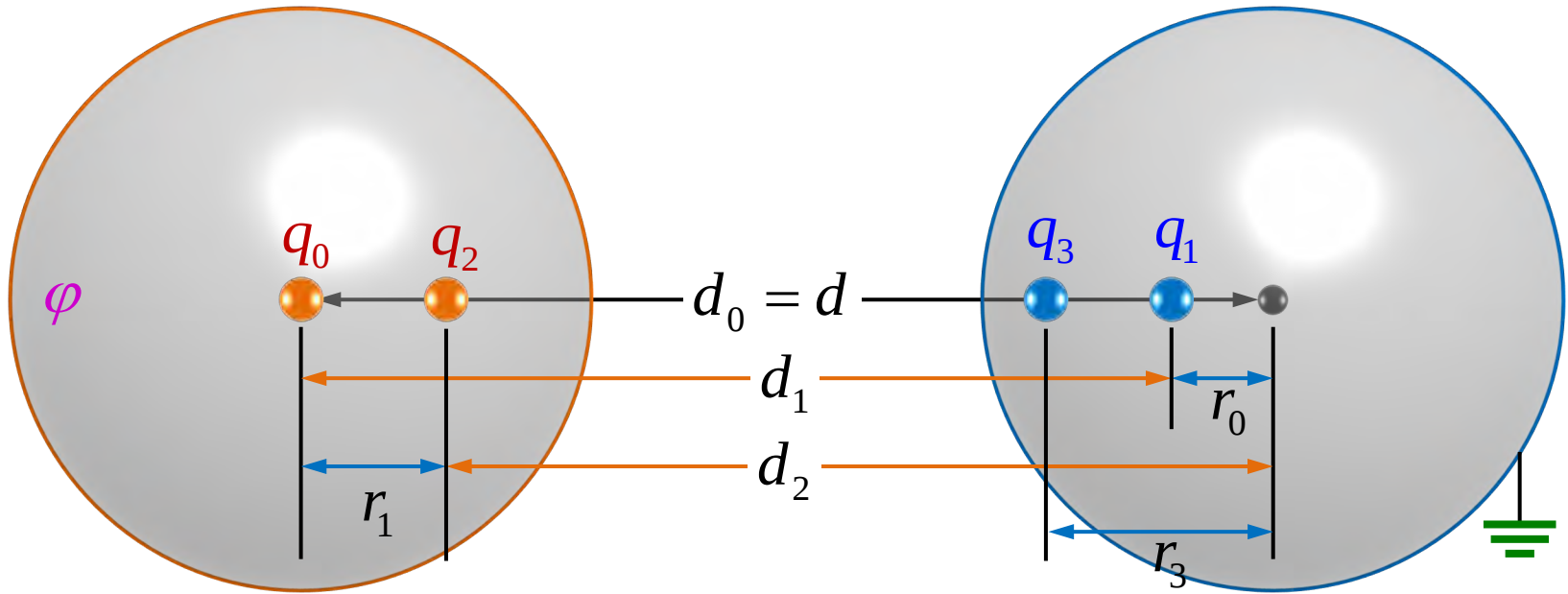
$$\left\{ \begin{array}{l} C = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}} \\ C_0 = c_{11} + c_{22} + 2c_{12} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \\ C_0 = 2(c_{11} + c_{12}) \end{array} \right.$$

下面采用电像法求电容系数。让球1维持电势为 φ ，球2接地，设二者各自电量分别为 Q_1 和 Q_2 ，则

$$Q_1 = c_{11}\varphi, \quad Q_2 = c_{12}\varphi$$

$$Q_1 = q_0 + q_2 + q_4 + \dots = c_{11}\varphi$$

$$Q_2 = q_1 + q_3 + q_5 + \dots = c_{12}\varphi$$



$\varphi = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R}$	$d_0 = d$	$q_1/q_0 = -R/d_0$	$r_0 = R^2/d_0$
	$d_1 = d - r_0$	$q_2/q_1 = -R/d_1$	$r_1 = R^2/d_1$
	$d_2 = d - r_1$	$q_3/q_2 = -R/d_2$	$r_2 = R^2/d_2$
	$d_3 = d - r_2$	$q_4/q_3 = -R/d_3$	$r_3 = R^2/d_3$

$$c_{11} = 4\pi\epsilon_0 R \left(1 + \frac{q_2}{q_0} + \frac{q_4}{q_0} + \dots \right), \quad c_{12} = 4\pi\epsilon_0 R \left(\frac{q_1}{q_0} + \frac{q_3}{q_0} + \dots \right)$$

(2) $d = 2R$

$d_0 = 2R$	$\frac{q_1}{q_0} = -\frac{1}{2}$	$r_0 = \frac{1}{2}R$
$d_1 = \frac{3}{2}R$	$\frac{q_2}{q_0} = +\frac{1}{3}$	$r_1 = \frac{2}{3}R$
$d_2 = \frac{4}{3}R$	$\frac{q_3}{q_0} = -\frac{1}{4}$	$r_2 = \frac{3}{4}R$
$d_3 = \frac{5}{4}R$	$\frac{q_4}{q_0} = +\frac{1}{5}$	$r_3 = \frac{4}{5}R$

$d_0 = d$	$\frac{q_1}{q_0} = -\frac{R}{d_0}$	$r_0 = \frac{R^2}{d_0}$
$d_1 = d - r_0$	$\frac{q_2}{q_1} = -\frac{R}{d_1}$	$r_1 = \frac{R^2}{d_1}$
$d_2 = d - r_1$	$\frac{q_3}{q_2} = -\frac{R}{d_2}$	$r_2 = \frac{R^2}{d_2}$
$d_3 = d - r_2$	$\frac{q_4}{q_3} = -\frac{R}{d_3}$	$r_3 = \frac{R^2}{d_3}$

$$\longrightarrow c_{11} = 4\pi\epsilon_0 R \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \right), \quad c_{12} = -4\pi\epsilon_0 R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

$$\longrightarrow C = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} = \infty, \quad C_0 = 2(c_{11} + c_{12}) = (2 \ln 2) 4\pi\epsilon_0 R$$

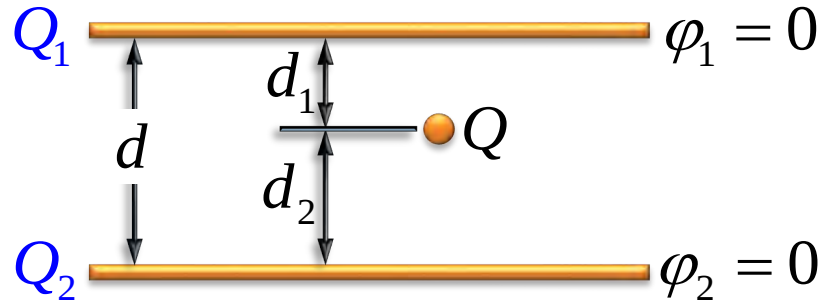
(3) $d = 4R$

$d_0 = 4R$	$\frac{q_1}{q_0} = -\frac{1}{4}$	$r_0 = \frac{1}{4}R$	$d_0 = d$	$\frac{q_1}{q_0} = -\frac{R}{d_0}$	$r_0 = \frac{R^2}{d_0}$
$d_1 = \frac{15}{4}R$	$\frac{q_2}{q_0} = +\frac{1}{15}$	$r_1 = \frac{4}{15}R$	$d_1 = d - r_0$	$\frac{q_2}{q_1} = -\frac{R}{d_1}$	$r_1 = \frac{R^2}{d_1}$
$d_2 = \frac{56}{15}R$	$\frac{q_3}{q_0} = -\frac{1}{56}$	$r_2 = \frac{15}{56}R$	$d_2 = d - r_1$	$\frac{q_3}{q_2} = -\frac{R}{d_2}$	$r_2 = \frac{R^2}{d_2}$
$d_3 = \frac{209}{56}R$	$\frac{q_4}{q_0} = +\frac{1}{209}$	$r_3 = \frac{56}{209}R$	$d_3 = d - r_2$	$\frac{q_4}{q_3} = -\frac{R}{d_3}$	$r_3 = \frac{R^2}{d_3}$

$$\longrightarrow c_{11} = 4\pi\epsilon_0 R \left(1 + \frac{1}{15} + \frac{1}{209} + \dots \right), \quad c_{12} = -4\pi\epsilon_0 R \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{56} + \dots \right)$$

$$\longrightarrow C = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \approx 0.67(4\pi\epsilon_0 R), \quad C_0 = 2(c_{11} + c_{12}) \approx 1.61(4\pi\epsilon_0 R)$$

例：一点电荷 Q 位于两无限大接地平行导体板间，与两板间距离分别为 d_1 和 d_2 ，求两板上感应电荷 Q_1 与 Q_2 。



$$Q_1 = -\frac{d_2}{d} Q = -\frac{d_2}{d_1 + d_2} Q$$

$$Q_2 = -\frac{d_1}{d} Q = -\frac{d_1}{d_1 + d_2} Q$$

六、格林互易定理

带电体 A 产生的电势为 φ' ;

带电体 B 产生的电势为 φ 。

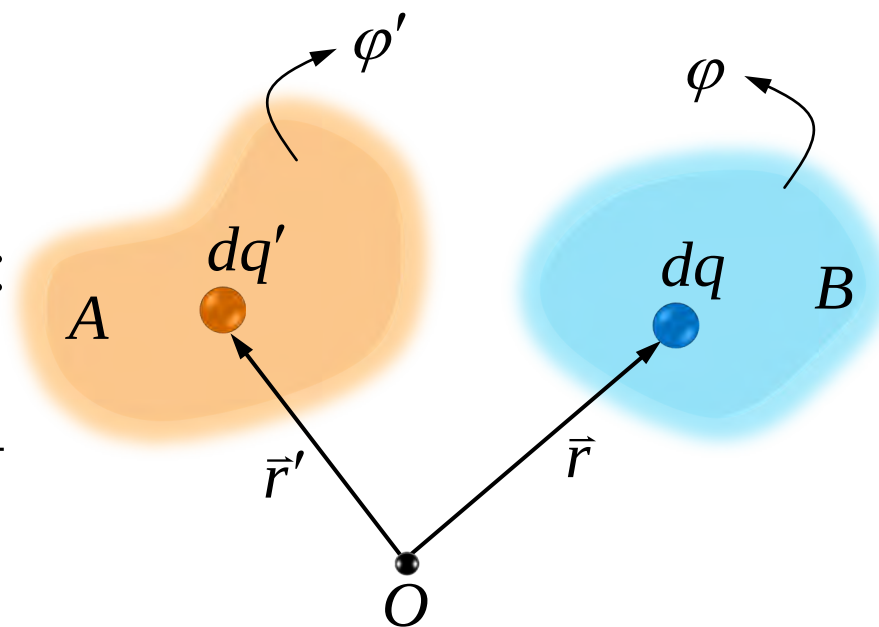
- A 在 B 产生的外场中的电势能:

$$\int \varphi(\vec{r}') dq' = \int dq' \int dq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- B 在 A 产生的外场中的电势能:

$$\int \varphi'(\vec{r}) dq = \int dq \int dq' \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\longrightarrow \int \varphi dq' = \int \varphi' dq \quad \text{格林 (Green) 互易定理}$$

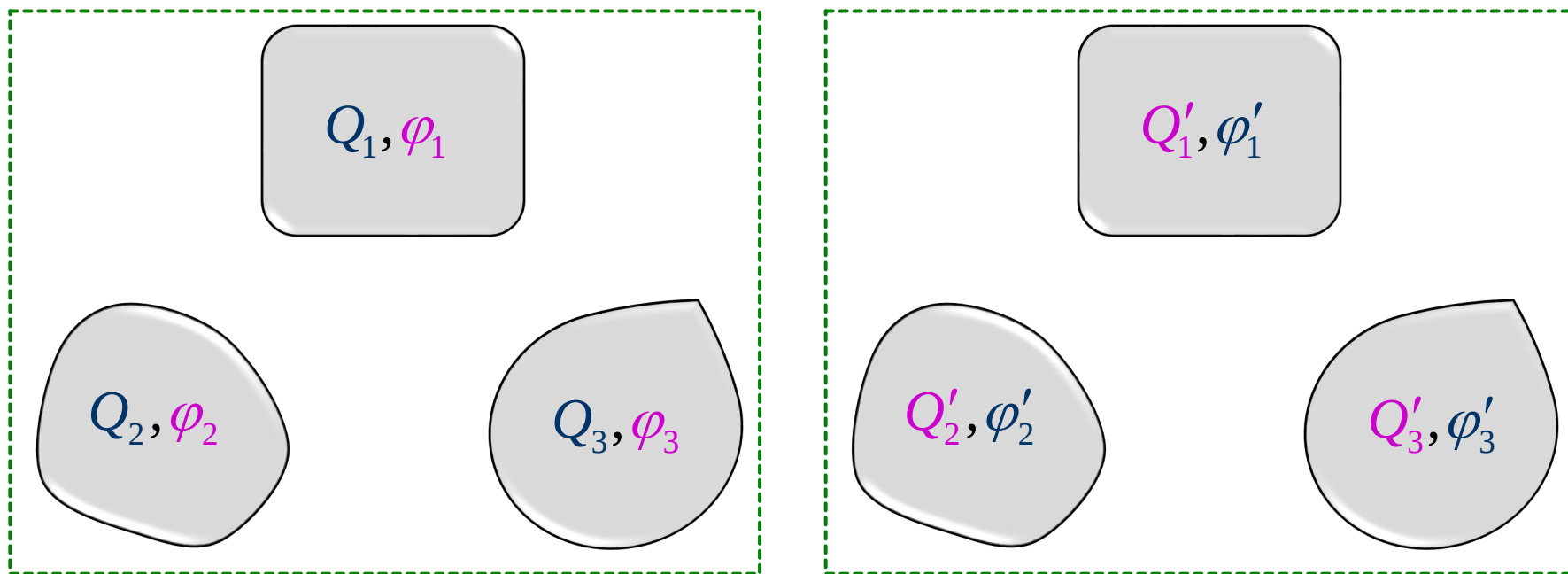


- 对于同一导体系统的两个可能的平衡状态：

$$(Q_k, \varphi_k) \quad \text{and} \quad (Q'_k, \varphi'_k)$$

由于静电平衡时导体为等势体，因而：

$$\sum_{i=1}^N Q'_i \varphi_i = \sum_{i=1}^N Q_i \varphi'_i \quad \text{格林互易定理}$$



【证明】

(1) 先证点电荷情况

均匀介质中有N个点电荷 $P_1, P_2, \dots, P_n$
电荷分别为 $q_1, q_2, \dots, q_n$

P_i 处的电势由其它n-1个电荷产生 $U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}}$

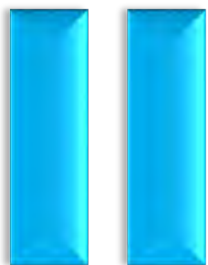
如果将N个点电荷换成 $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$,

P'_i 处的电势由其它n-1个电荷产生 $U'_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q'_j}{4\pi\epsilon r_{ij}}$

用 q'_i 乘 U_i 得:

$$q'_i U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q'_i q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n q'_i U_i$$



$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n q_i U'_i$$

$$\begin{aligned}
 q'_1 U_1 &= 0 + \frac{q'_1 q_2}{4\pi\epsilon r_{12}} + \frac{q'_1 q_3}{4\pi\epsilon r_{13}} + \dots + \frac{q'_1 q_n}{4\pi\epsilon r_{1n}} \\
 q'_2 U_2 &= \frac{q'_2 q_1}{4\pi\epsilon r_{21}} + 0 + \frac{q'_2 q_3}{4\pi\epsilon r_{23}} + \dots + \frac{q'_2 q_n}{4\pi\epsilon r_{2n}} \\
 q'_3 U_3 &= \frac{q'_3 q_1}{4\pi\epsilon r_{31}} + \frac{q'_3 q_2}{4\pi\epsilon r_{32}} + 0 + \dots + \frac{q'_3 q_n}{4\pi\epsilon r_{3n}} \\
 &\vdots \\
 q'_n U_n &= \frac{q'_n q_1}{4\pi\epsilon r_{n1}} + \frac{q'_n q_2}{4\pi\epsilon r_{n2}} + \frac{q'_n q_3}{4\pi\epsilon r_{n3}} + \dots + 0
 \end{aligned}$$
$$= q_1 U'_1 + q_2 U'_2 + q_3 U'_3 + \dots + q_n U'_n$$

(2)再证带电导体的情况

导体的电荷全部分布在表面，设电荷面密度为 σ_i ,

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{S_j} \Delta q_i U'_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{S_j} \Delta q'_i U_i \right)$$

由于每个导体是等势体，故

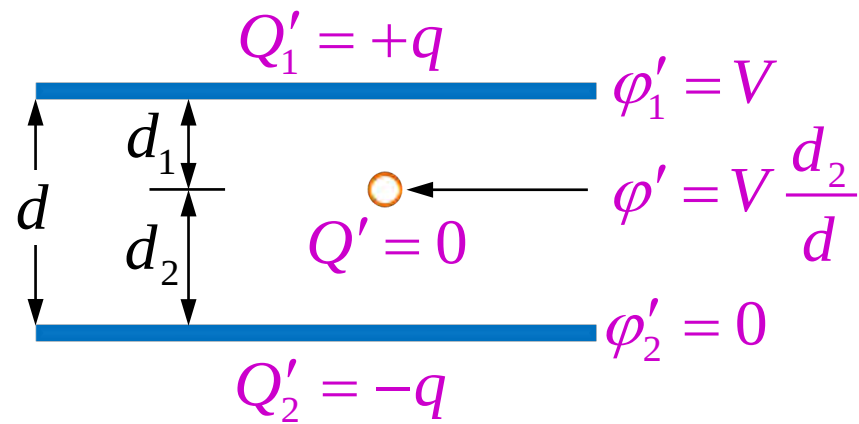
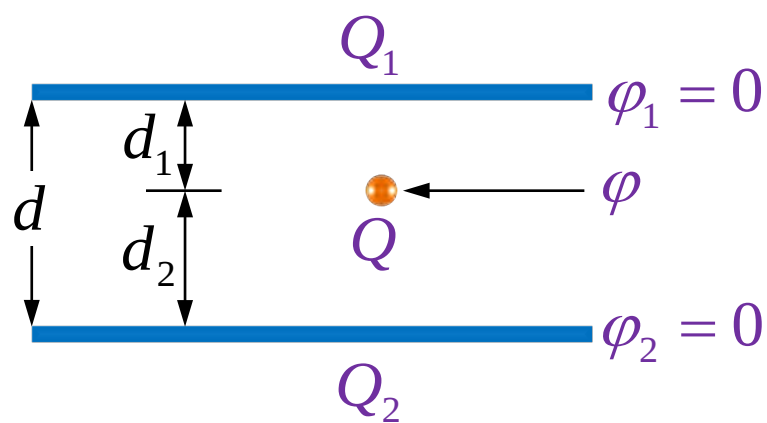
$$\sum_{S_j} (\Delta q_i U'_i) = \left(\sum_{S_j} \Delta q_i \right) U'_i = q_i U'_i$$

$$\sum_{S_j} (\Delta q'_i U_i) = \left(\sum_{S_j} \Delta q'_i \right) U_i = q'_i U_i$$

所以

$$\sum_{i=1}^n q_i U'_i = \sum_{i=1}^n q'_i U_i$$

【例】 一点电荷 Q 位于两无限大接地平行导体板间，与两板间距离分别为 d_1 和 d_2 ，求两板上感应电荷 Q_1 与 Q_2 。



【解】 将点电荷视为无限小的导体球。直接利用格林互易原理

$$\begin{array}{ccccccc}
 Q_1 \varphi'_1 + Q_2 \varphi'_2 + Q \varphi' & = & Q'_1 \varphi_1 + Q'_2 \varphi_2 + Q' \varphi & = & Q' \varphi \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 V & 0 & V \frac{d_2}{d} & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

选择如图所示的第二种静电平衡状态：

$$Q_1 V + Q \frac{d_2}{d_1} V = 0$$

→
$$Q_1 = -\frac{d_2}{d} Q = -\frac{d_2}{d_1 + d_2} Q$$

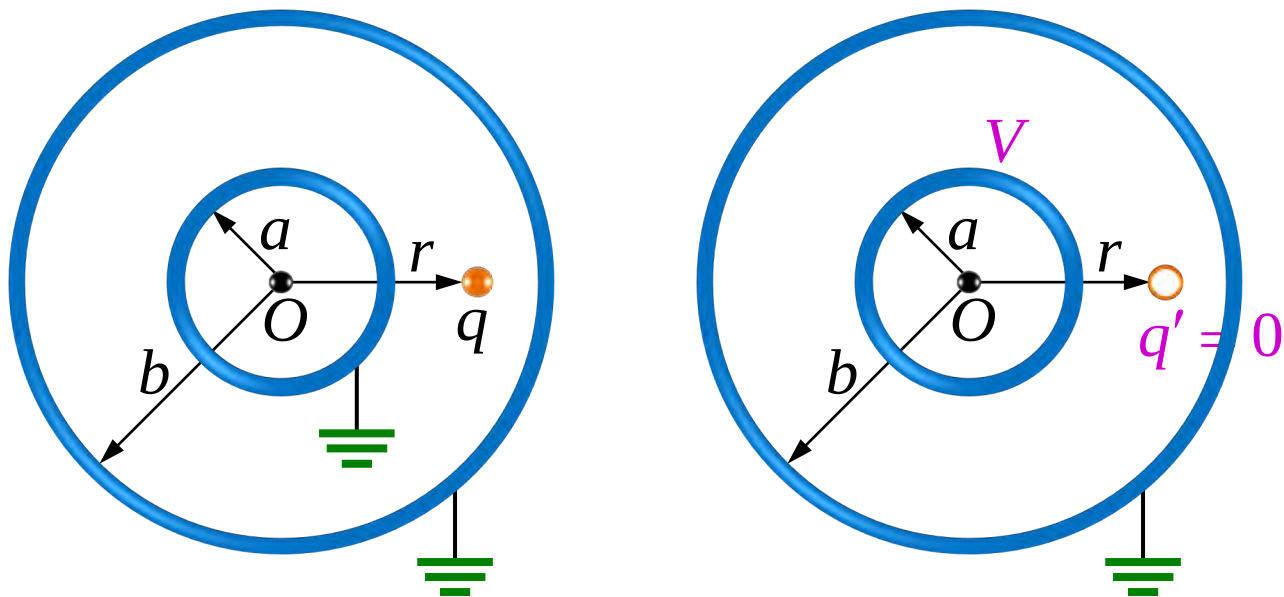
类似地，有：
$$Q_2 = -\frac{d_1}{d} Q = -\frac{d_1}{d_1 + d_2} Q$$

或者， Q 发出的电力线必须全部终止在两个极板上，故：

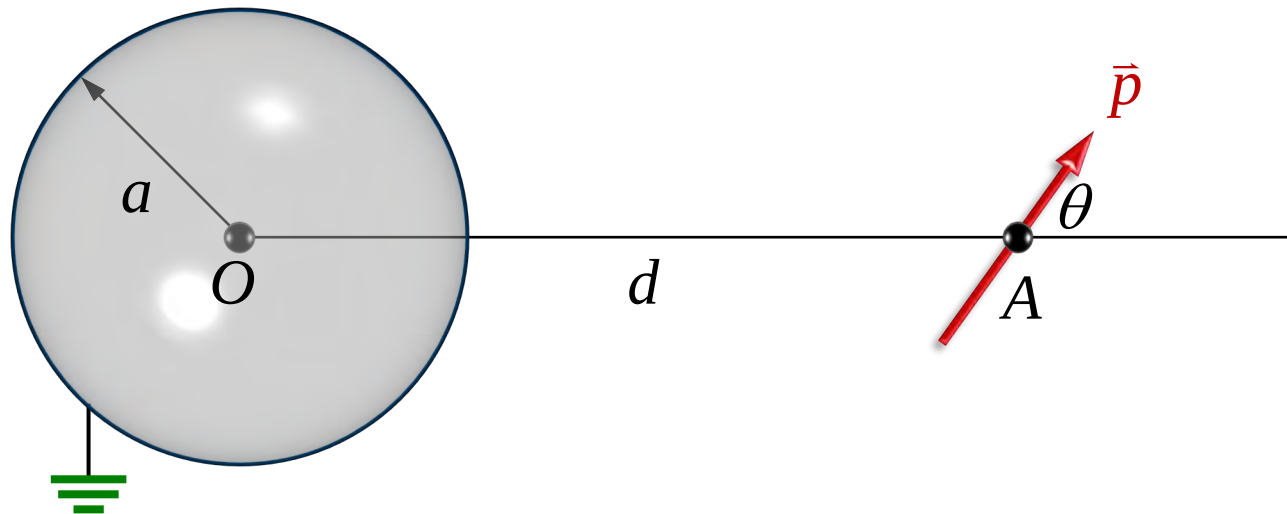
$$Q = -(Q_1 + Q_2)$$

→
$$Q_2 = -\frac{d_1}{d_1 + d_2} Q$$

【例】 两个半径分别为 a 和 b ($b > a$) 的同心导体球壳接地，一个点电荷 q 位于两球壳之间，到球心的距离为 r ($a < r < b$)。试确定每个球壳上的感应电荷量。

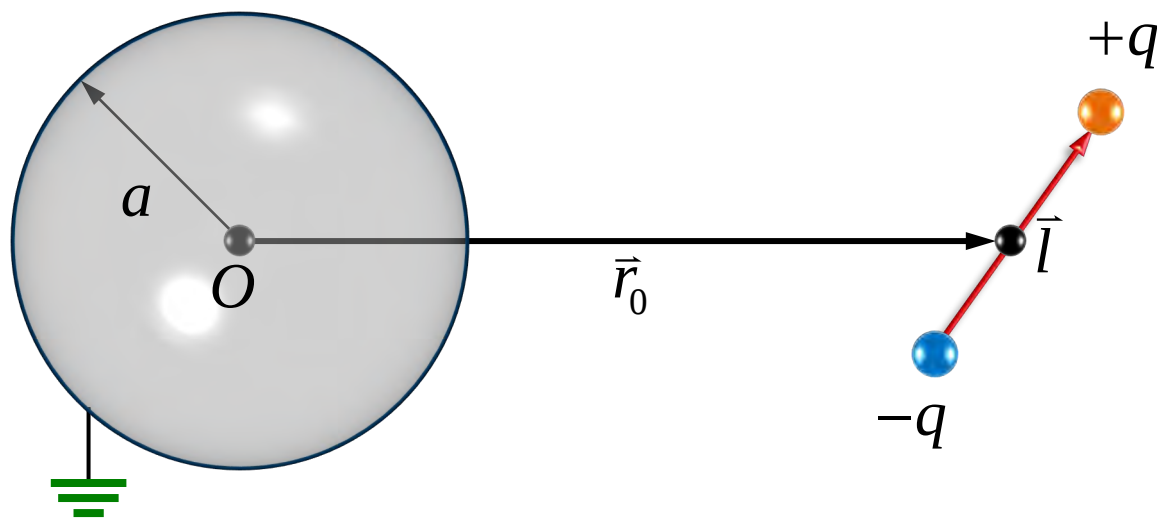


【例】 半径为 a 的接地导体球外 A 点处有一电偶极子 $\vec{p}$, A 到球心 O 的距离为 d , $\vec{p}$ 与 OA 夹角为 θ 。试求导体球表面的感应电荷总量。



【解】 设导体球感应电荷总量为 Q_a 。将电偶极子视为相距 l 、带等量异号电荷 $\pm q$ 的小导体球，相对于球心的位矢分别为

$$\vec{r}_+ = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{l}, \quad \vec{r}_- = \vec{r}_0 - \frac{1}{2}\vec{l}$$

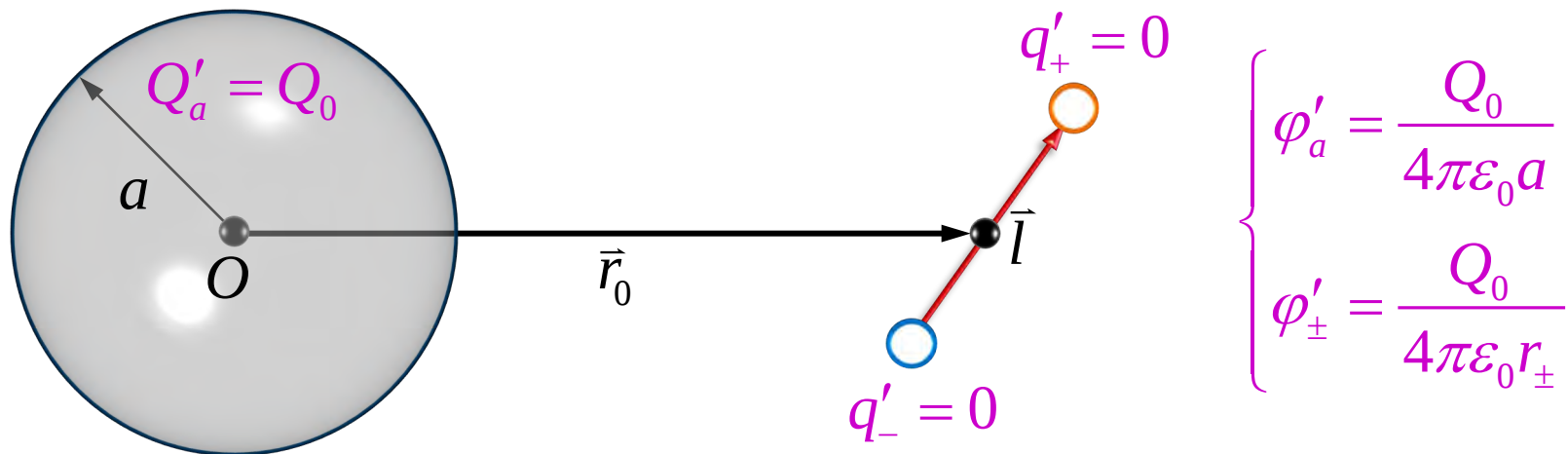


由格林互易定理：

$$Q_a \varphi'_a + q \varphi'_+ - q \varphi'_- = Q'_a \varphi_a + q'_+ \varphi_+ + q'_- \varphi_- = q'_+ \varphi_+ + q'_- \varphi_-$$

第二种带电状态如图所示，由此给出：

$$\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_a}{a} + q \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \right] = 0 \quad \longrightarrow \quad Q_a = -qa \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$



即有

$$Q_a = -4\pi\epsilon_0 \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \right] a = -4\pi\epsilon_0 \left[\frac{\vec{p} \cdot (-\vec{r}_0)}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \right] a$$

→
$$Q_a = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_0}{r_0^3} a = \frac{pa}{d^2} \cos \theta$$

或者，由于构成电偶极子的正负电荷相对于接地导体球的像电荷分别为

$$Q'_1 = -\frac{a}{r_+} q, \quad Q'_2 = -\frac{a}{r_-} (-q) = \frac{a}{r_-} q$$

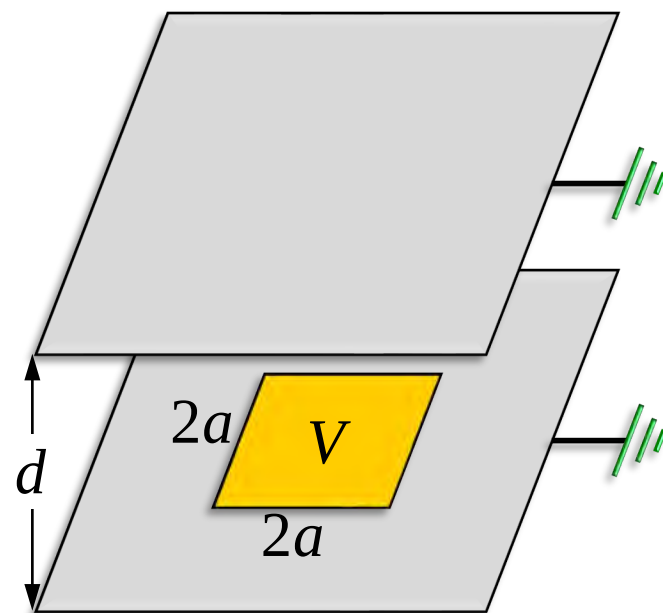
→
$$Q_a = Q'_1 + Q'_2 = -qa \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{pa}{d^2} \cos \theta$$

【例】 平行板电容器两极板接地，其中下极板面积为 S 的一部分与下极板的其余部分绝缘，并维持电势为 V 。已知两极板间距为 d 。试求整个下极板上的感应电荷总量。

【解】 设上导体平面用1标志，除去正方形的下导体平面用2标志，正方形用3标志，有

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = V$$

下面利用格林互易定理求解下极板上的感应电荷 $Q = Q_2 + Q_3$ ：



$$Q_1\varphi'_1 + Q_2\varphi'_2 + Q_3\varphi'_3 = Q'_1\varphi_1 + Q'_2\varphi_2 + Q'_3\varphi_3 = Q'_3V$$

第二种静电平衡状态下各导体电势取为： $(\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3) = (0, \varphi', \varphi')$

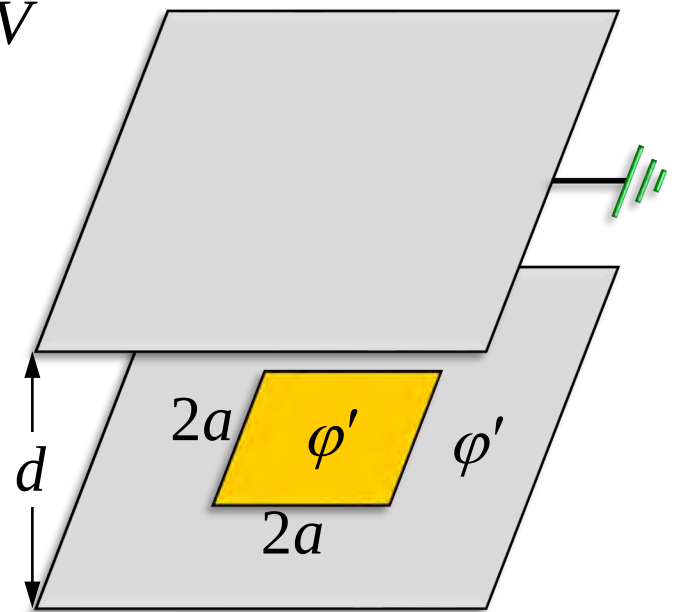
$$\longrightarrow (Q_2 + Q_3) \varphi' = Q'_3 V = \varepsilon_0 \frac{\varphi'}{d} (2a)^2 V$$

$$\longrightarrow Q_2 + Q_3 = \frac{4\varepsilon_0 V a^2}{d}$$

若取： $(\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3) = (\varphi', 0, 0)$

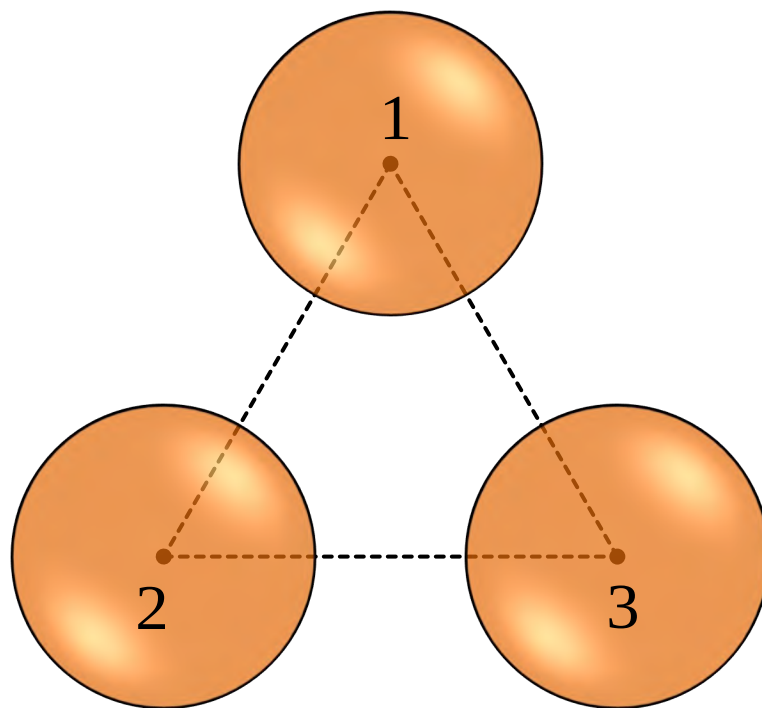
$$\longrightarrow Q_1 \varphi'_1 = Q'_3 V = -\varepsilon_0 \frac{\varphi'}{d} (2a)^2 V$$

$$\longrightarrow Q_1 = -\frac{4\varepsilon_0 V a^2}{d}$$



【例】 三个相同的导体球，球心位于等边三角形的三个顶点处。已知导体球电势分别为 $(\varphi, 0, 0)$ 时，带电量分别为 (q, q_0, q_0) ：

- (1) 若各球的电势均为 φ' ，试求各球带电量 q' ；
- (2) 若各球所带电量为 $(q'', 0, 0)$ ，试求各球的电势。



【解】 (1) 直接利用格林互易定理：

$$q' \cdot \varphi + q' \cdot 0 + q' \cdot 0 = q \cdot \varphi' + q_0 \cdot \varphi' + q_0 \cdot \varphi'$$

$$\longrightarrow q' = (q + 2q_0) \frac{\varphi'}{\varphi}$$

(2) 设各球所带电量为 $(q'', 0, 0)$ 时的电势为 $(\varphi'', \varphi_0, \varphi_0)$,

$$q \cdot \varphi'' + q_0 \cdot \varphi_0 + q_0 \cdot \varphi_0 = q'' \cdot \varphi + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0$$

利用 (1) 的结论又有

$$q' \cdot \varphi'' + q' \cdot \varphi_0 + q' \cdot \varphi_0 = q'' \cdot \varphi' + 0 \cdot \varphi' + 0 \cdot \varphi'$$

$$\longrightarrow \varphi_0 = \frac{q_0 q''}{(q_0 - q)(q + 2q_0)} \varphi, \quad \varphi'' = -\frac{(q + q_0) q''}{(q_0 - q)(q + 2q_0)} \varphi$$

【例】 试证明电容系数的对称性。

【证明】 考察导体系统的两种可能的静电平衡状态，各导体电势与电量分别为

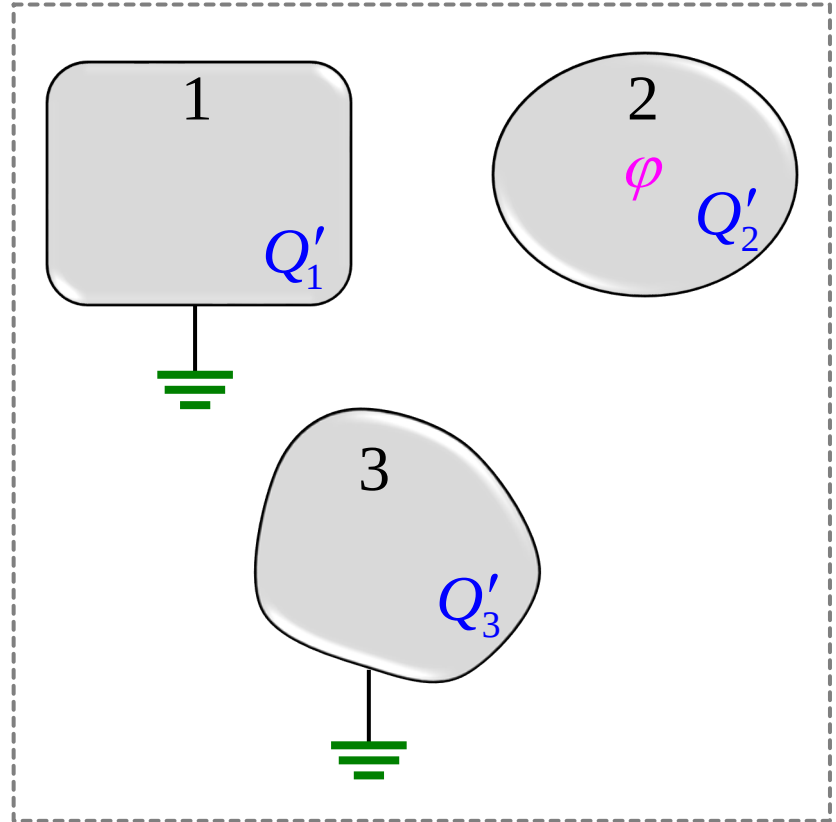
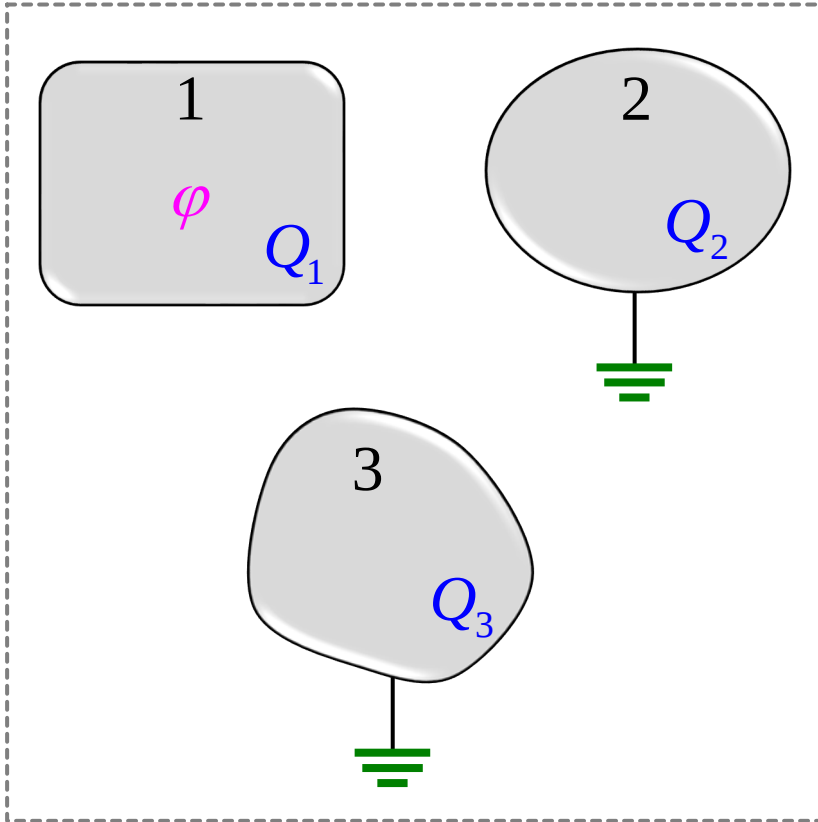
$$\varphi_i \leftrightarrow Q_i = \sum_{k=1}^N c_{ik} \varphi_k \quad \text{and} \quad \varphi'_i \leftrightarrow Q'_i = \sum_{k=1}^N c_{ik} \varphi'_k$$

由格林互易定理得到：

$$\sum_{i=1}^N Q_i \varphi'_i = \sum_{i=1}^N Q'_i \varphi_i \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N c_{ik} \varphi_k \varphi'_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N c_{ik} \varphi'_k \varphi_i$$

$$\text{取 } (\varphi_1 = V, \varphi_{k \neq 1} = 0) \quad \text{and} \quad (\varphi'_2 = V, \varphi'_{k \neq 2} = 0) \quad \longrightarrow \quad c_{21} = c_{12}$$

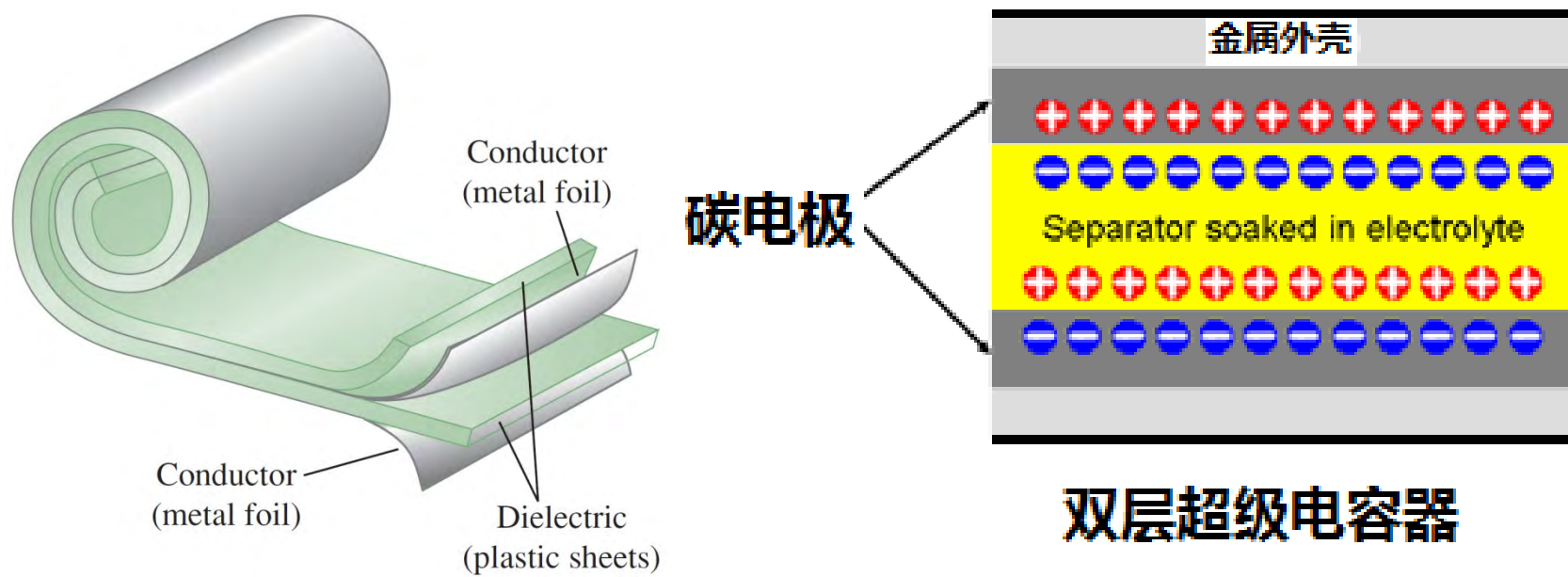
类似地，有 $c_{ik} = c_{ki}$



$$Q_2 = Q'_1$$

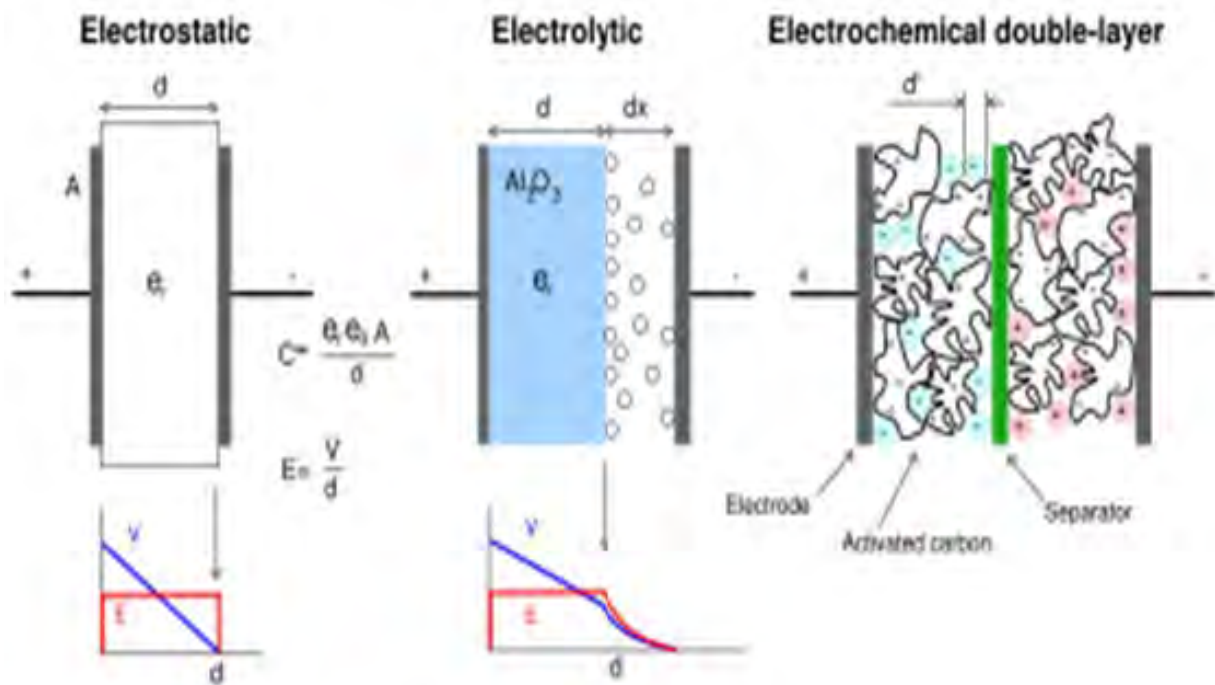
七、超级电容器

- 超级电容器是利用双电层原理的电容器。当外加电压加到超级电容器的两个极板上时，与普通电容器一样，极板的正电极存储正电荷，负极板存储负的荷，在超级电容器的两极板上的电荷产生的电场作用下，在电解液与电极间的界面上形成相反的电荷，以平衡电解液的内电场，这种正电荷与负电荷在两个不同相之间的接触面上，以正负电荷之间极短间隙排列在相反的位置上，这个电荷分布层叫作**双电层**，因此电容量非常大。

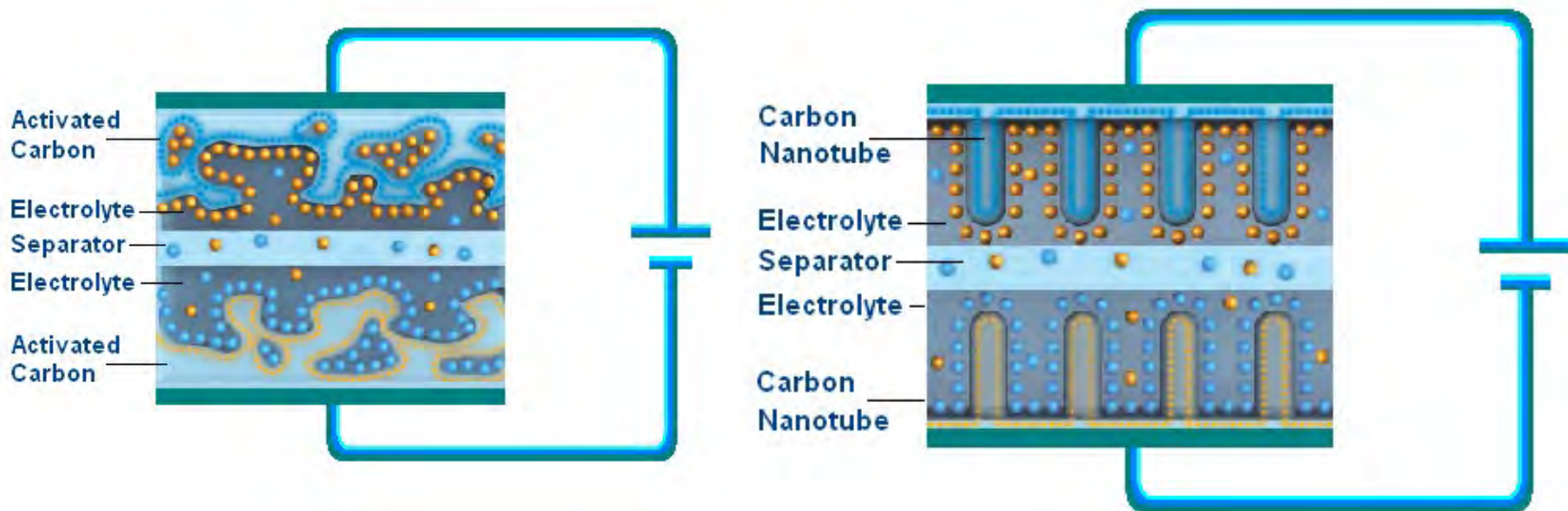


双层超级电容器

- 当两极板间电势低于电解液的氧化还原电极电位时，电解液界面上的电荷不会脱离电解液，超级电容器为正常工作状态，如电容器两端电压超过电解液的氧化还原电极电位时，电解液将分解，为非正常状态。随着超级电容器放电，正、负极板上的电荷被外电路泄放，电解液的界面上的电荷相应减少。由此可以看出，超级电容器的充放电过程始终是物理过程，没有化学反应。因此性能是稳定的，与利用化学反应的蓄电池是不同的。



- 超级电容器通常使用多孔碳材料，该材料的多孔结构允许其面积达到 **2000 m²/g**，通过一些措施可实现更大的表面积。超级电容器电荷分离开的距离是由被吸引到带电电极的电解质离子尺寸决定的。该**距离 (< 1 nm)** 和传统电容器薄膜材料所能实现的距离更小。这种庞大的表面积再加上非常小的电荷分离距离使得超级电容器较传统电容器而言有着大得惊人的静电容量，这也是其“超级”所在。



- 双层电容器通常采用活性炭、碳纤维、碳气凝胶和碳纳米管等作为电极材料，电容值达到法拉量级，有的甚至达到**几千法拉**。采用多层叠片串联组合而成的高压超级电容器，可以达到 **300V 以上的工作电压**。超级电容器的发展将取代常规的电源用在各种动力系统中，特别是在汽车工业，将从目前的汽油发动机转到混合动力，直至发展成为纯电源动力汽车。

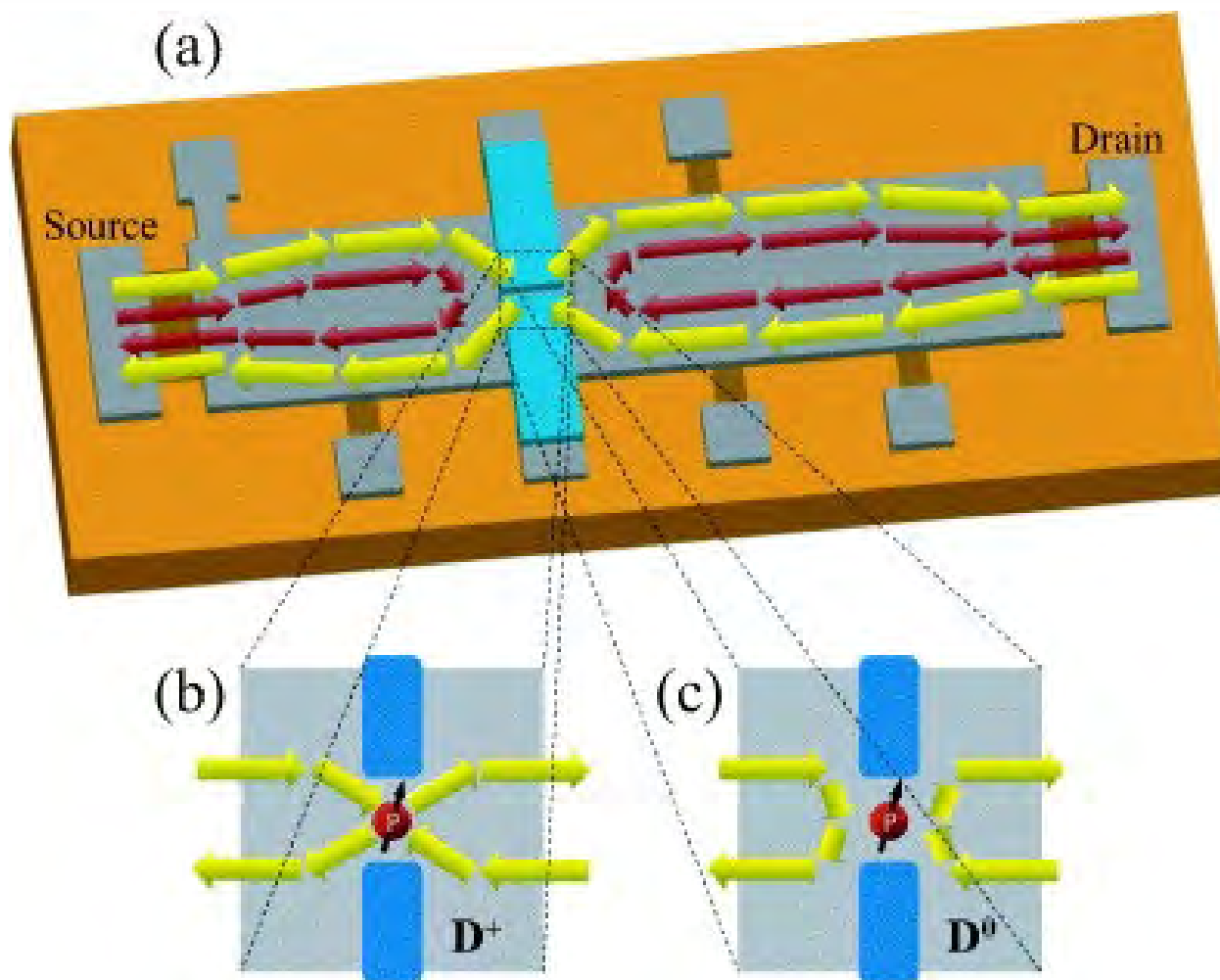


人类的梦想
雷电能量的“捕捉和储存”

Thank You!

fineart
america

微观体系的电容



1、介观体系的电学特性

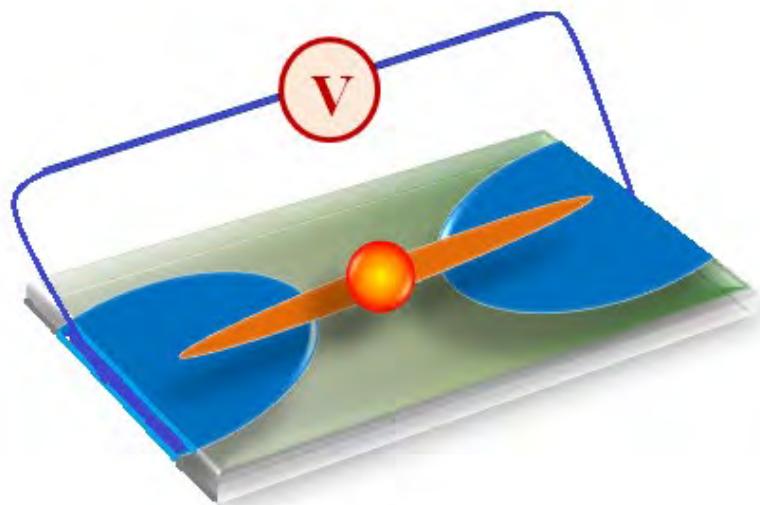
- 介观（mesoscopic）”一词第一次是在1976年一篇关于随机过程的文章中提到的。直观地讲，介观系统是指尺度介于微观和宏观尺度之间的系统，它可以看成是尺度缩小的宏观物体。它的标志特征在于其物理可观测性质中明确地呈现出量子相位相干的效应。因此，物理意义上讲，尺度与相位相干长度接近的电子系统就是介观的。研究这类尺度缩小的宏观物体中量子相干性引起的物理问题，便形成了所谓“介观物理”的学科。在介观尺度上，一些电学特性与宏观材料的电学特性也有很大的不同。

量子化电导（量子点接触）

- 量子点接触是两个大的导电区域之间由于突然收缩而变成狭窄通道，如果在收缩区域的宽度小到电子波长（纳米到微米量级）的接触而产生的导电效应。



(a)



(b)

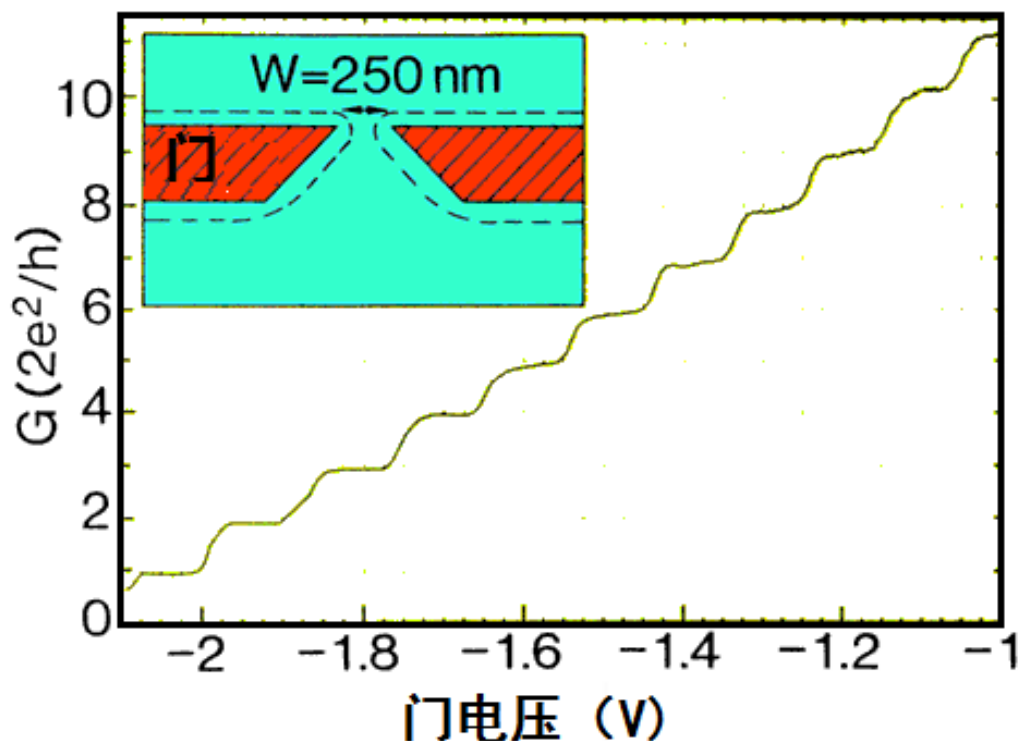
量子化电导（量子点接触）

- 量子点接触产生的效应首次是在1988荷兰和英国研究者独立发现的。实验室中人们现在利用力学的方法，能够以可控的方式制备出单个原子的接触结。若施加电压在量子点接触诱导电流的流动，这种规模的电流是由欧姆定律 $I=GU$ 给出，这里 G 是量子点接触处的电导。然而有一个根本的区别在这里产生的是小尺寸。在低的温度和电压下，1988年研究者发现二维电子气上实验测出的点接触的电导是量子化的

$$G = G_0 N, \quad G_0 = \frac{2e^2}{h} = 7.75 \times 10^{-5} \Omega^{-1}, \quad N = 1, 2, 3 \dots$$

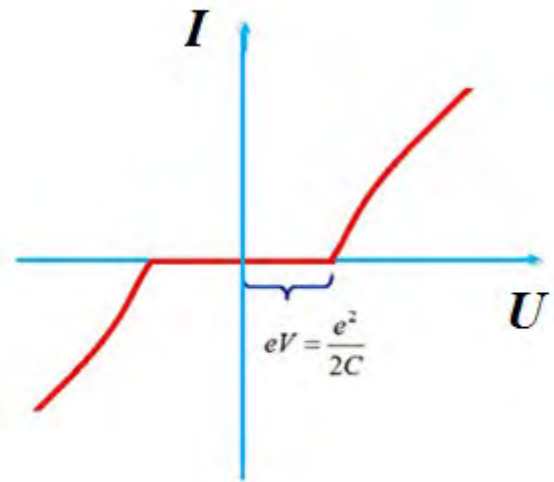
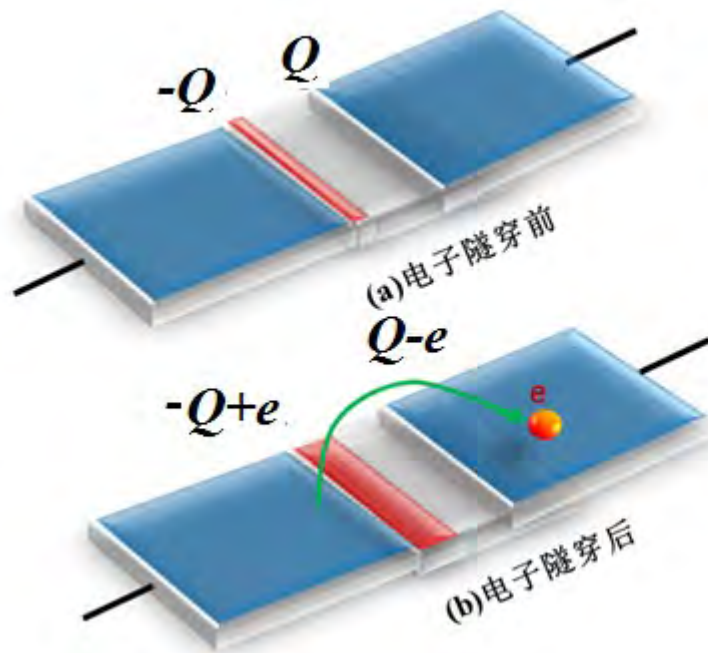
量子化电导 (量子点接触)

- 这表明对量子点接触，电导是一个直接与量子力学相联系的概念。量子点接触系统造成了电导的量子化，这正是量子力学的典型特征。



库仑阻塞和单电子隧穿

- 库仑阻塞效应是20世纪80年代所发现的极其重要的物理现象之一。当体系的尺度进入到纳米量级时，体系电荷是“量子化”的，即充电和放电过程是不连续的，充入一个电子所需能量为 $W=e^2/2C$ 。可见体系越小，即 C 越小， W 就越大，我们称 W 为库仑阻塞能。
- 库仑阻塞能是前一个电子对后一个电子的库仑排斥能，这就导致对一个小体系的充放电过程，电子不能集体传输，而是一个一个单电子的传输，通常把小体系的这种单电子输运行为称为库仑阻塞效应。



电子隧穿前，电容器的能量为 $W_1 = Q^2 / 2C$

电子发生隧穿后，电容器的能量为 $W_2 = (Q - e)^2 / 2C$

隧穿前后的能量改变为 $\Delta W = W_1 - W_2 = e(Q - e/2) / C$

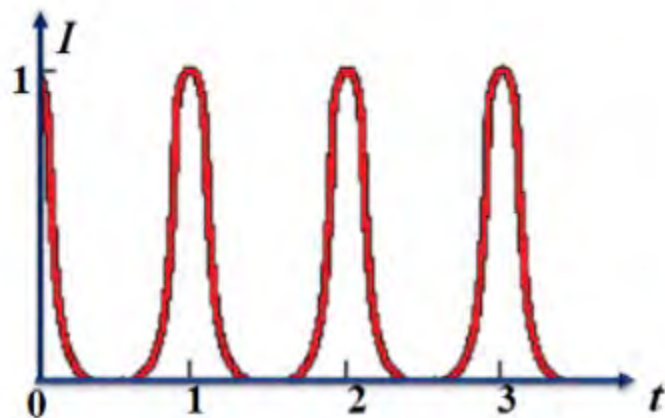
- 库仑阻塞要求隧穿后体系能量增加，即 $\Delta W < 0$ ，解之得：

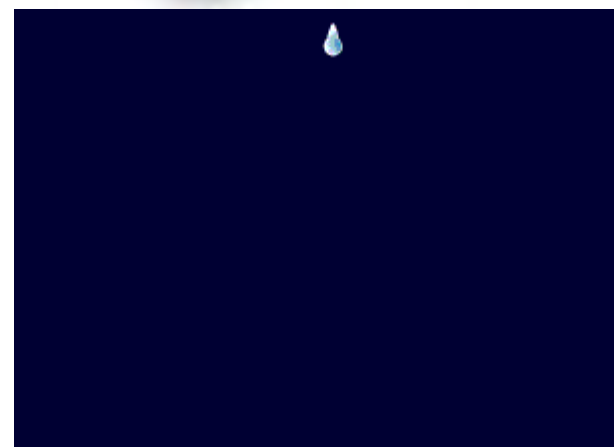
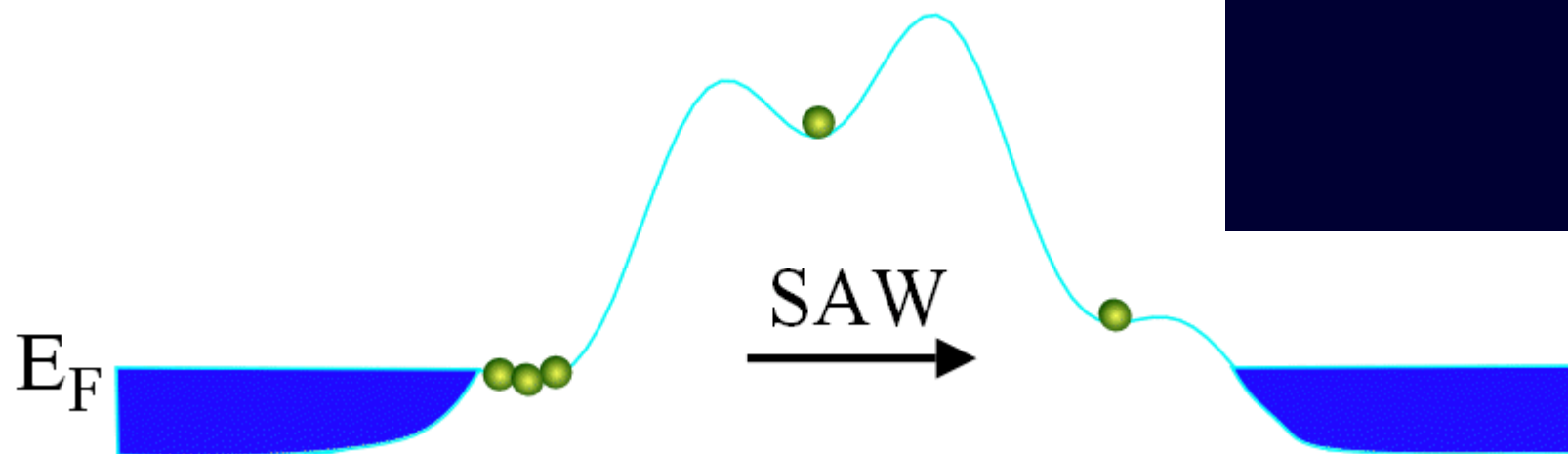
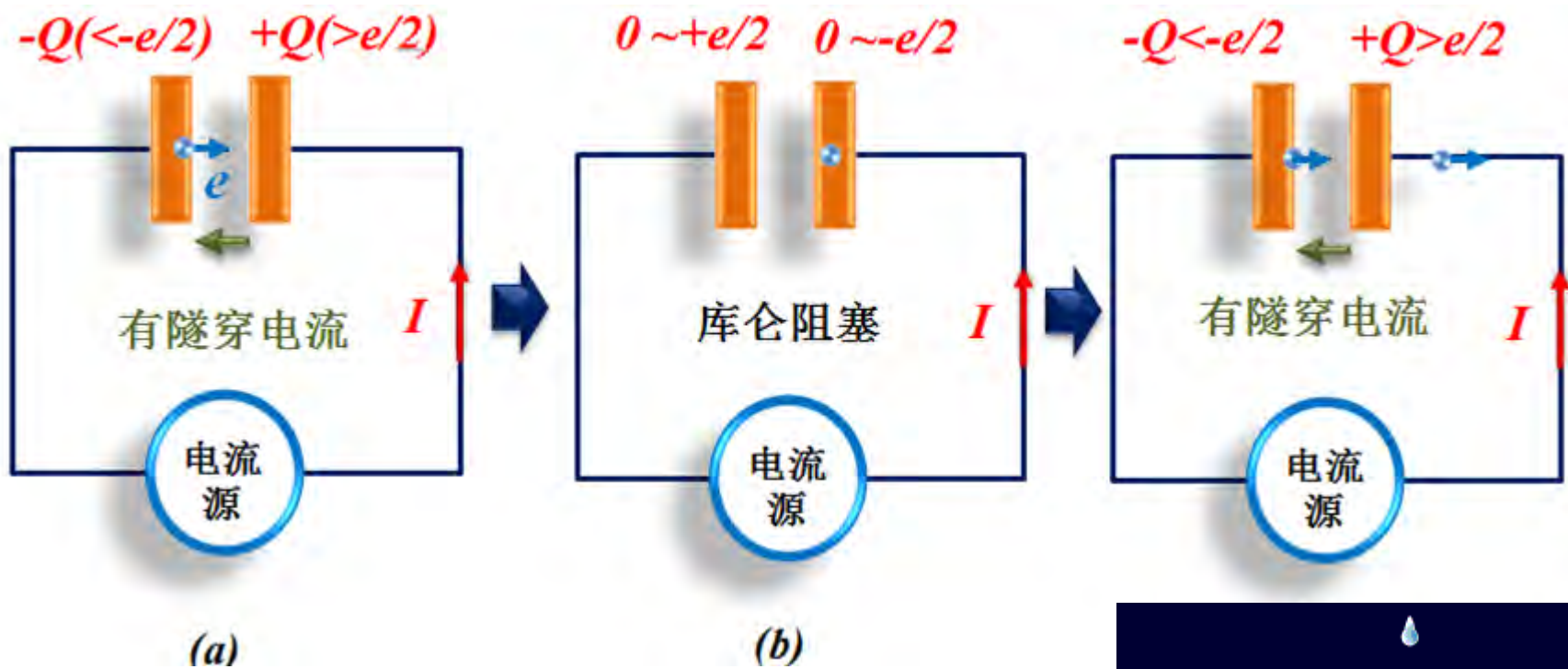
$$Q < \frac{e}{2}$$

电容器的电压 U ，则 $C|U| < e/2$ 即 $-\frac{e}{2C} < U < \frac{e}{2C}$

这就是发生库仑阻塞的条件

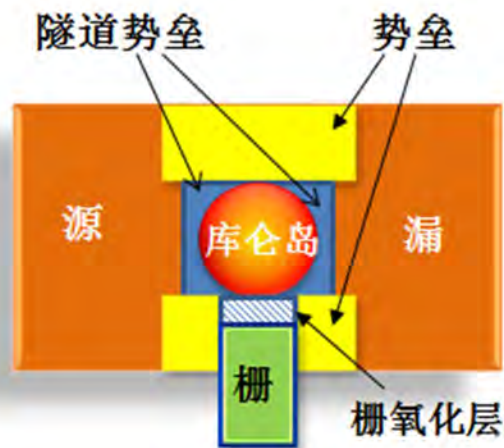
在满足这个条件下，电子就不能进入量子点，这就是库仑阻塞现象。通常在低温下的量子点中可以观测到这种现象，但如果量子点的尺度小到10nm，即电容达到 $10^{-15}F$ 时，单电子效应就可以在室温下观测到。



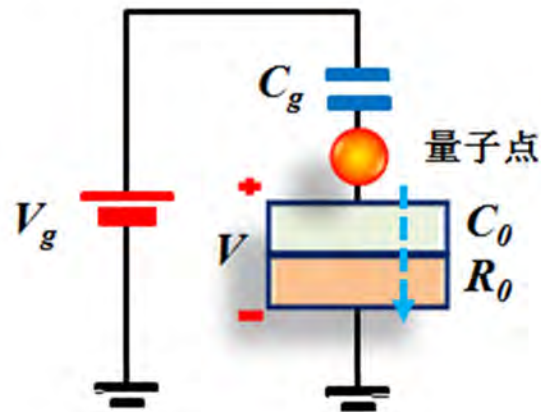


2. 单电子存储器

- 当器件的尺寸接近纳米尺度时，量子效应对器件工作的影响变得越来越重要，因此，可能需要采用新概念的晶体管结构。此结构中的一个典型例子是单电子晶体管（SET）。单电子晶体管是单电子存储器的最主要的组成部分，单电子晶体管的特性在一定程度上决定了基于它制备的存储器的性能，所以它的发展在很大程度上制约单电子存储器的发展。



(a)



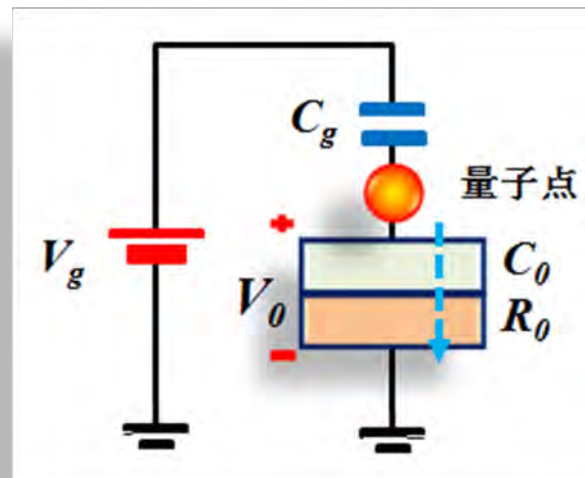
(b)

- (1) 库仑岛（或量子点）：由三维被势垒包围的极微小金属或半导体颗粒构成，它在某一方向上分别通过两侧的隧道势垒与源、漏区相连接；
- (2) 隧道势垒：它可以由极薄的绝缘层构成，也可以由构成库仑岛的窄禁带半导体材料与构成源、漏区的宽禁带半导体材料之间形成的异质结势垒构成，还可以由界面态或外加电压等引起的势场构成；
- (3) 势垒区：由较厚的绝缘层或宽禁带半导体材料构成；
- (4) 栅氧化层：由几十纳米厚的氧化层或电介质层构成；
- (5) 源、漏、栅极：由金属或掺杂半导体构成，与外部连接。

$$Q_g = C_g (V_g - V_\theta)$$

量子点中的总电荷数 $Q = Q_0 - Q_g$

设 n 为量子点相对于电中性所具有的额外电子数目, 则:



$$V_\theta = \frac{Q_0}{C_\theta + C_g} = \frac{1}{C_\theta + C_g} (C_g V_g - ne) = \frac{1}{C} (C_g V_g - ne)$$

C 为总电容。栅极电容和隧穿结电容中储存的能量为:

$$W = \frac{Q_0^2}{2C_0} + \frac{Q_g^2}{2C_g} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{C_\theta^2 V_\theta^2}{2C_\theta} + \frac{C_g^2 (V_g - V_\theta)^2}{2C_g} = \frac{C_\theta C_g V_\theta^2 + Q^2}{2C}$$

注意：

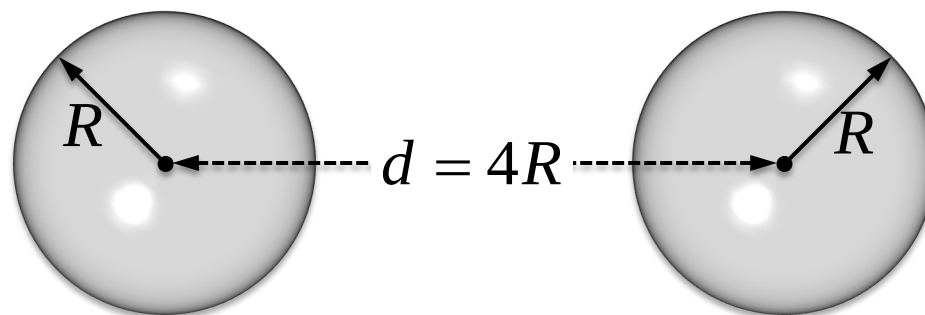
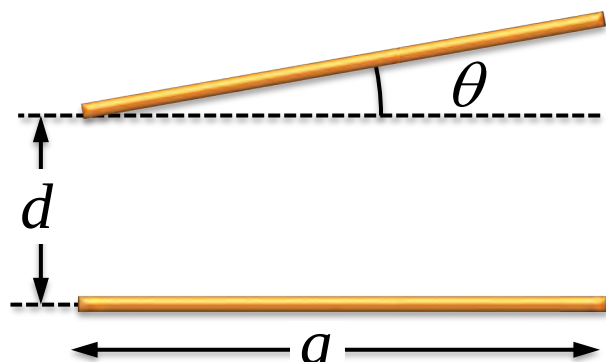
$$W \neq \frac{1}{2}CV^2$$

量子岛储能

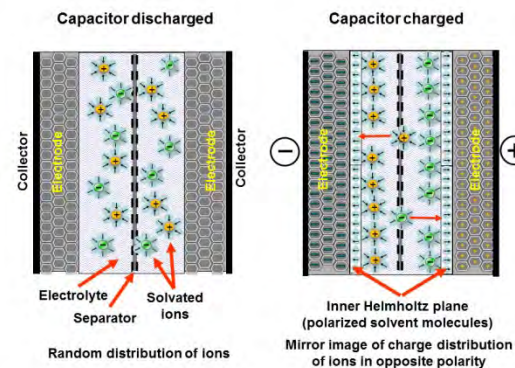
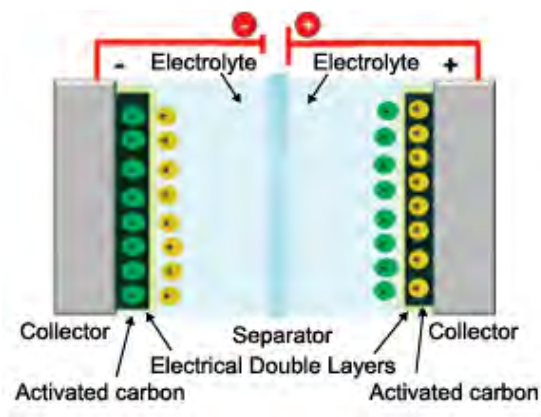
$$W_{\text{量子岛}} = \frac{Q_{\theta}^2}{2C_{\theta}} + \frac{Q_g^2}{2C_g} - \frac{1}{2}CV^2 = \frac{(ne)^2}{2(C_g + C_{\theta})}$$

思考题

■ 复杂体系的电容计算

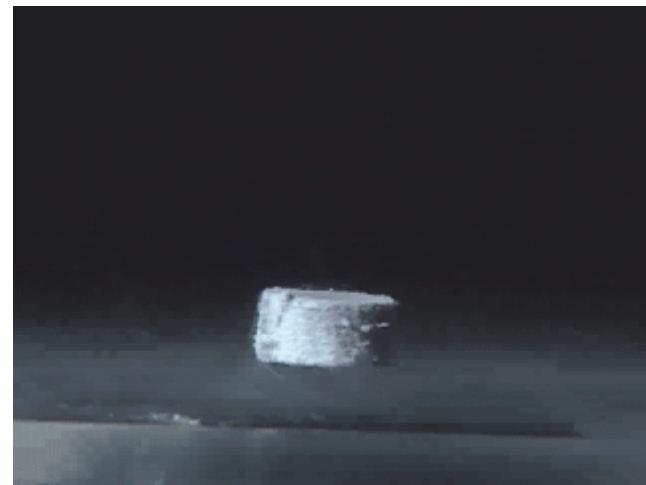
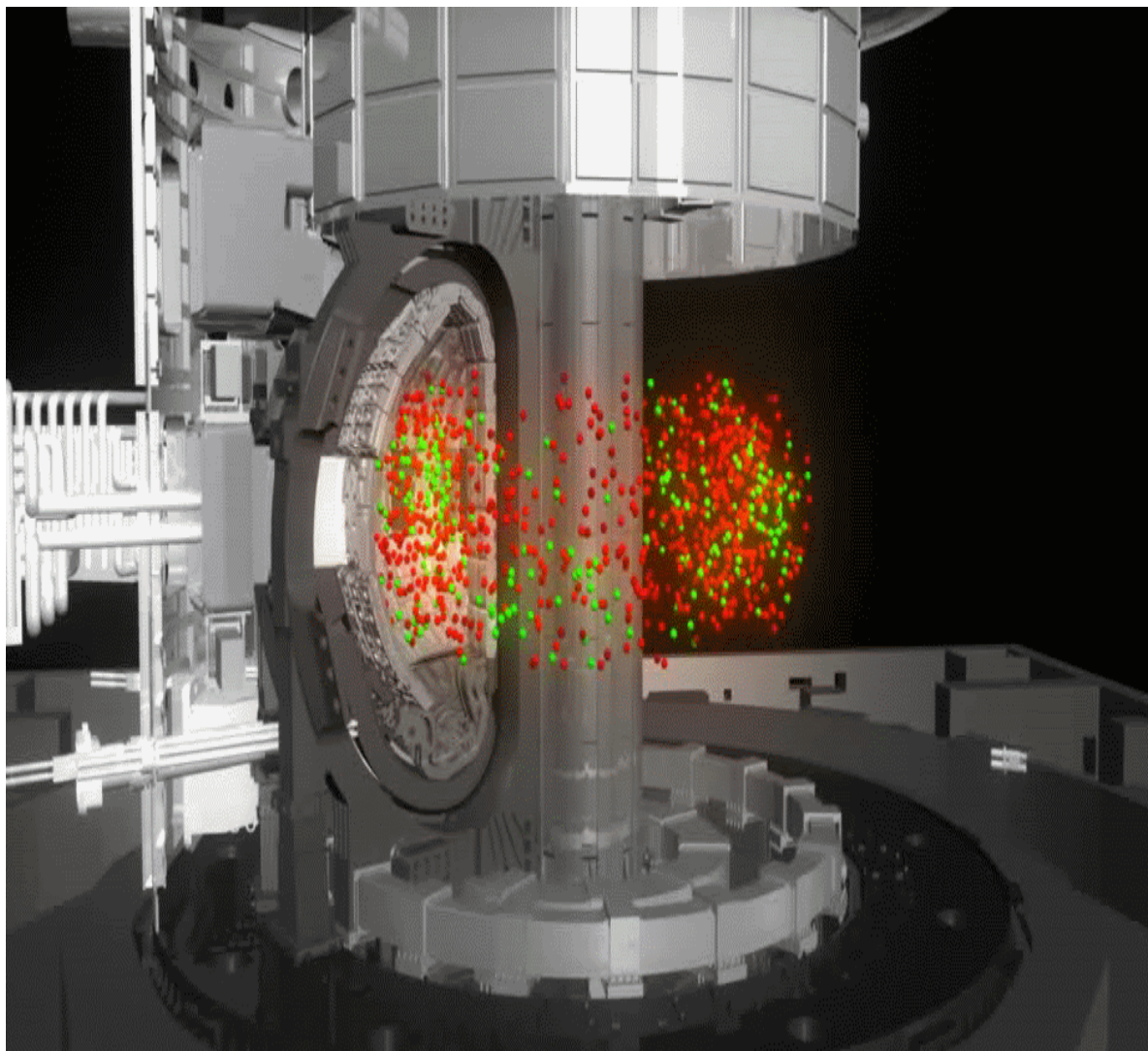


■ 超级电容器的制作原理



■ 电容器的应用

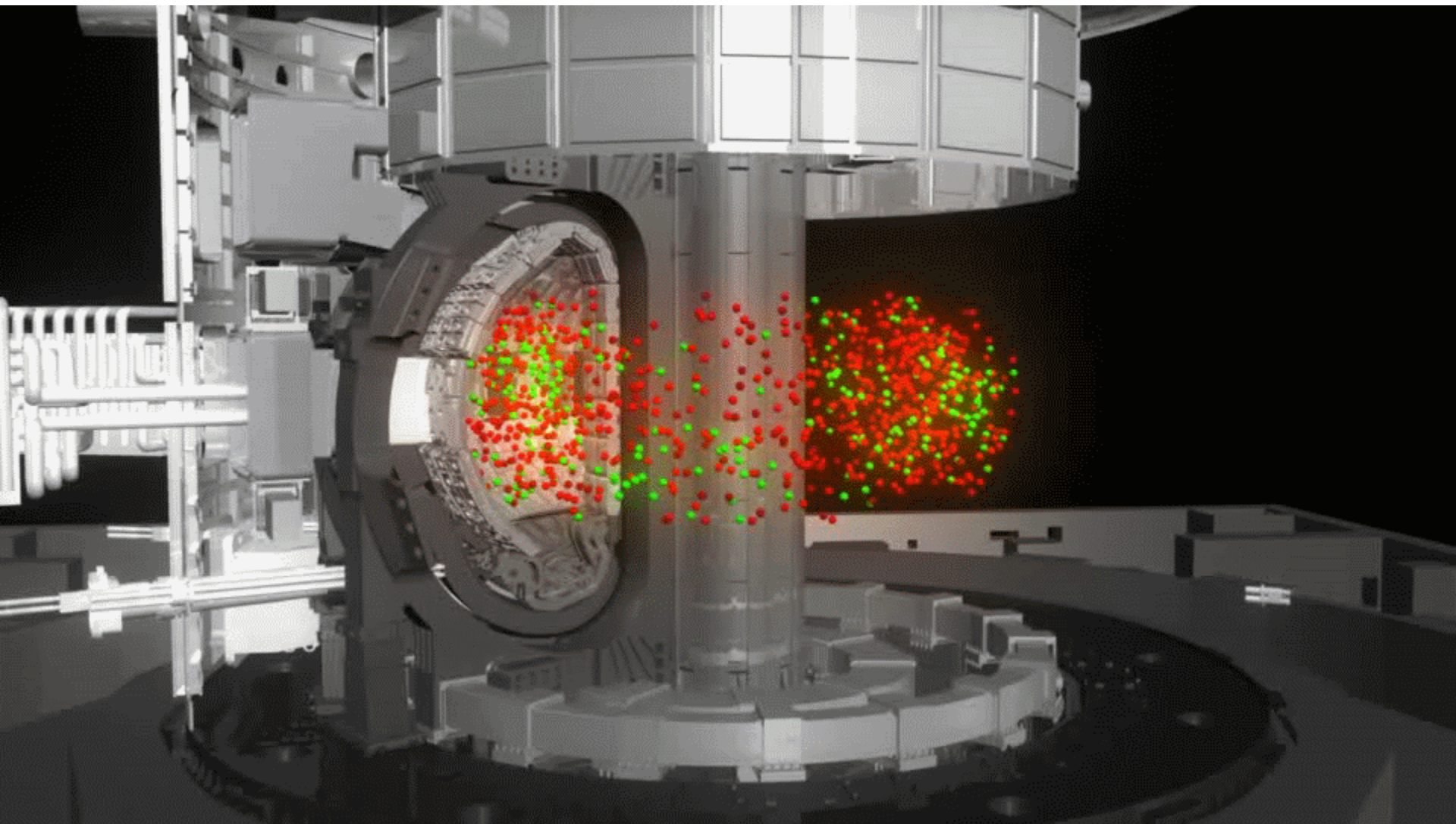
等离子体和超导体简介



等离子体

(1) 什么是等离子体

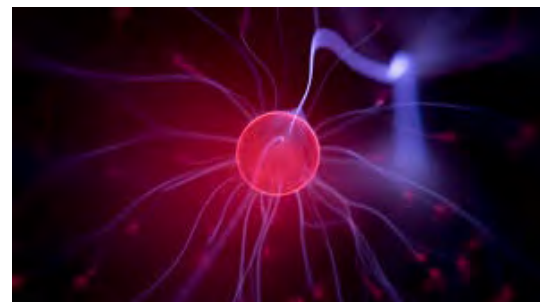
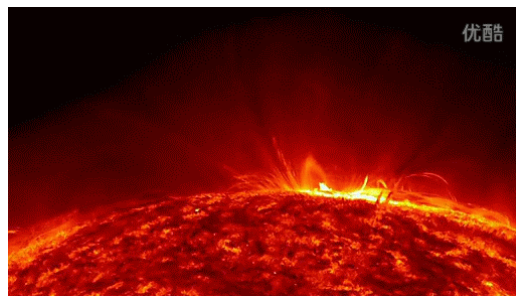
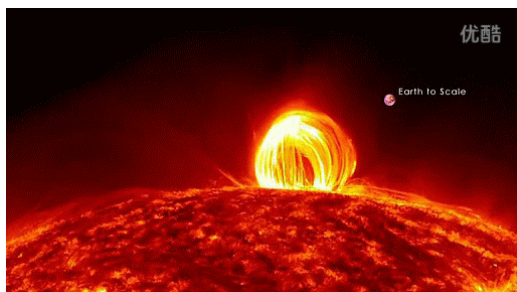
等离子体是部分或完全电离的气体，由大量自由电子和正离子以及中性原子、分子组成。等离子体在宏观上是近似电中性的，即从宏观上说，所含的正电荷与负电荷几乎处处相等。



托克马克中的等离子体

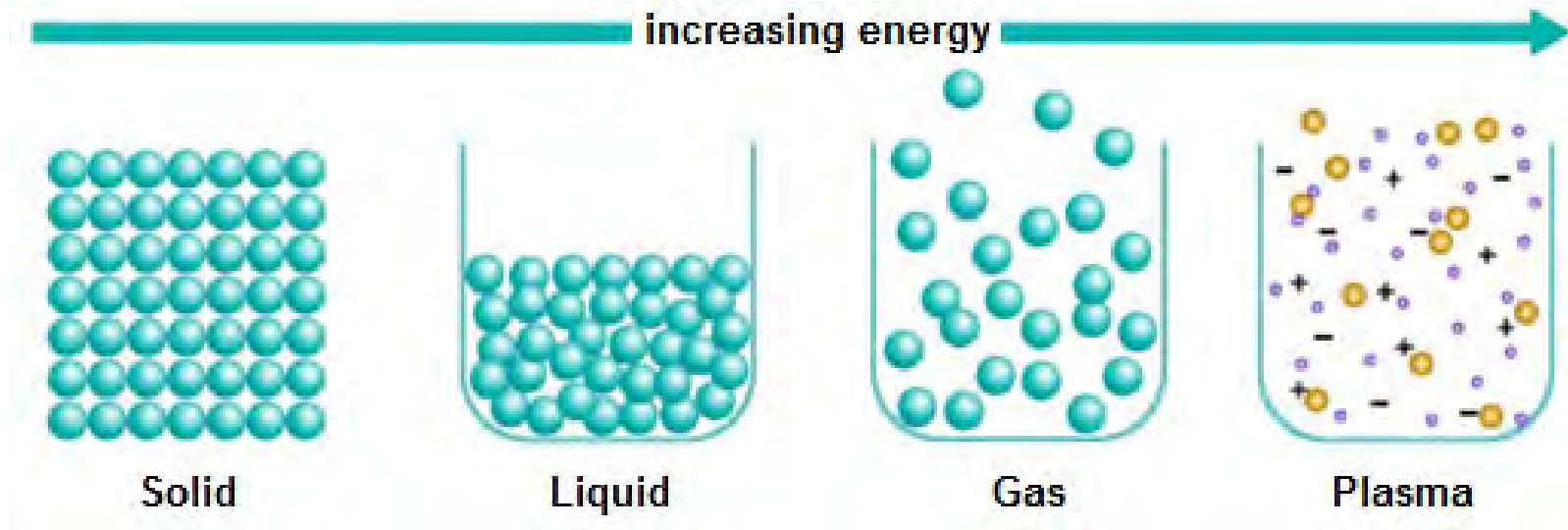
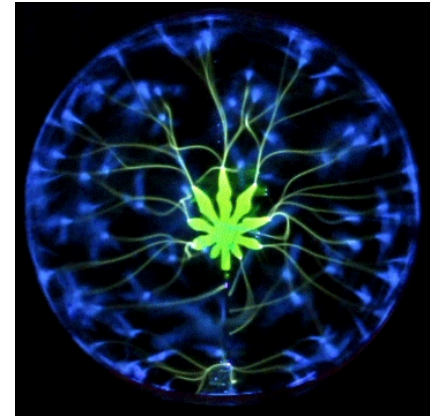
(2) 离子体如何形成

任何物质由于温度不同将处于不同的聚集状态。固体加温熔解成为液体，液体加温沸腾成为气体。温到几万度、几十万度甚至更高的温度，则不仅分子或原子的运动十分剧烈，而且原子中的电子也已具有相当大的动能，足以摆脱原子核的束缚成为自由电子，于是原子电离，成为自由电子和正离子。这种部分电离（带电粒子的数量超过千分之一）或完全电离的气体，就是等离子体。



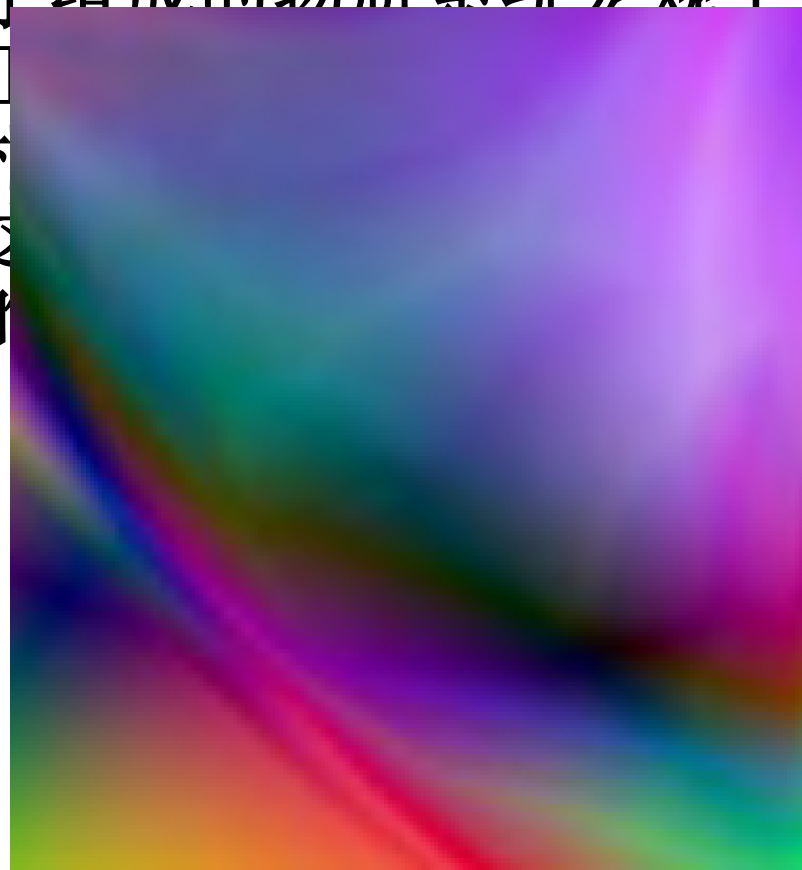
(3) 物质的第四态

- 从物质聚集态的顺序来说，等离子体居于固体、液体、气体之后，位列第四，所以等离子体又称为物质的第四态。所谓物质的不同聚集态，从微观上说，就是构成物质的微观粒子排列的有序程度不同。



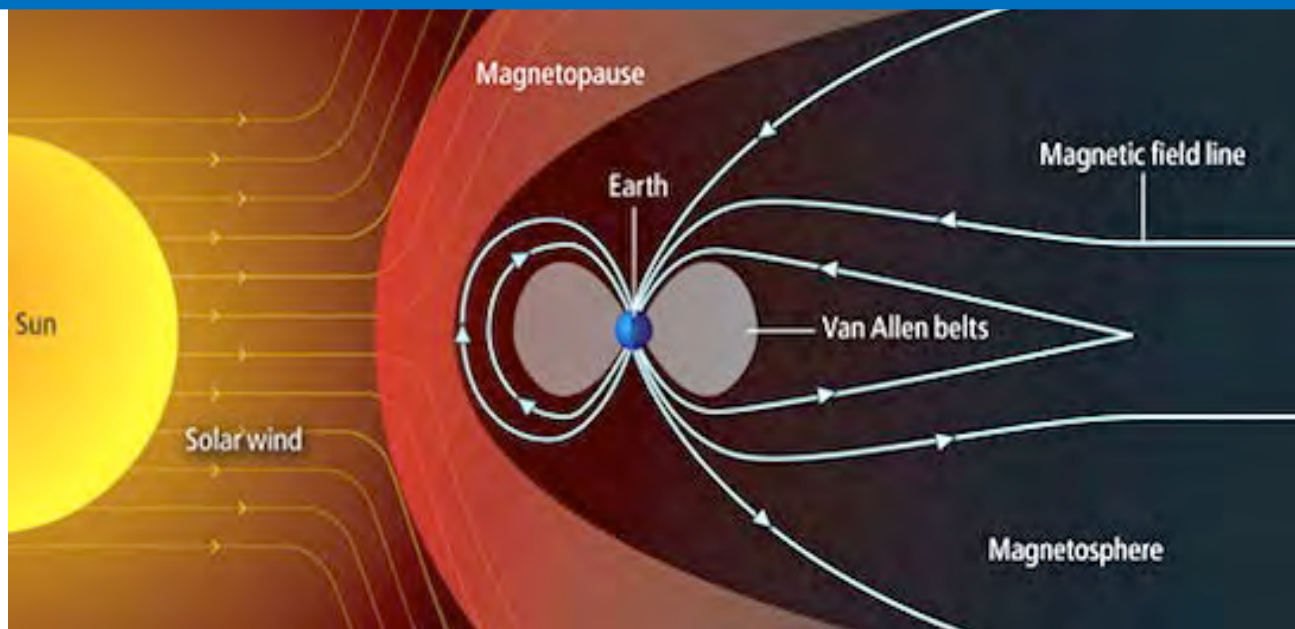


- ◎从电性质上看，由于它主要是由可自由运动的电子和正离子组成，所以是导电性能极好的良导体。这种由大量电子和正离子组成的物质系统宏观上是电中性的，任何局部正电中都会被附近移来的材料从而恢复电中性。所有这些具有一系列区别于气体的



(5) 等离子体是宇宙物质存在的主要形态

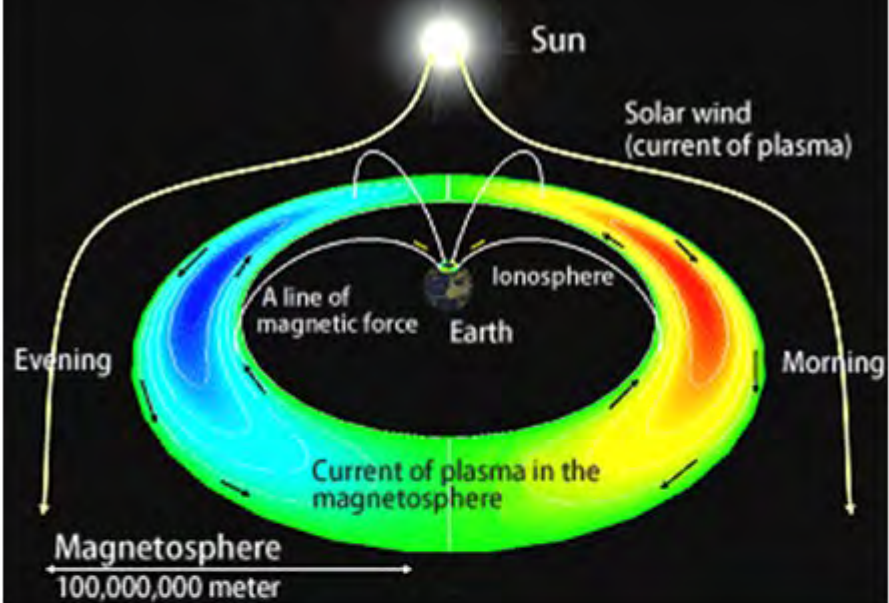
✧ 在地球上，常见的是气体、液体和固体，等离子体很少见，这是因为地球表面的温度太低，通常并不具备产生等离子体的条件。



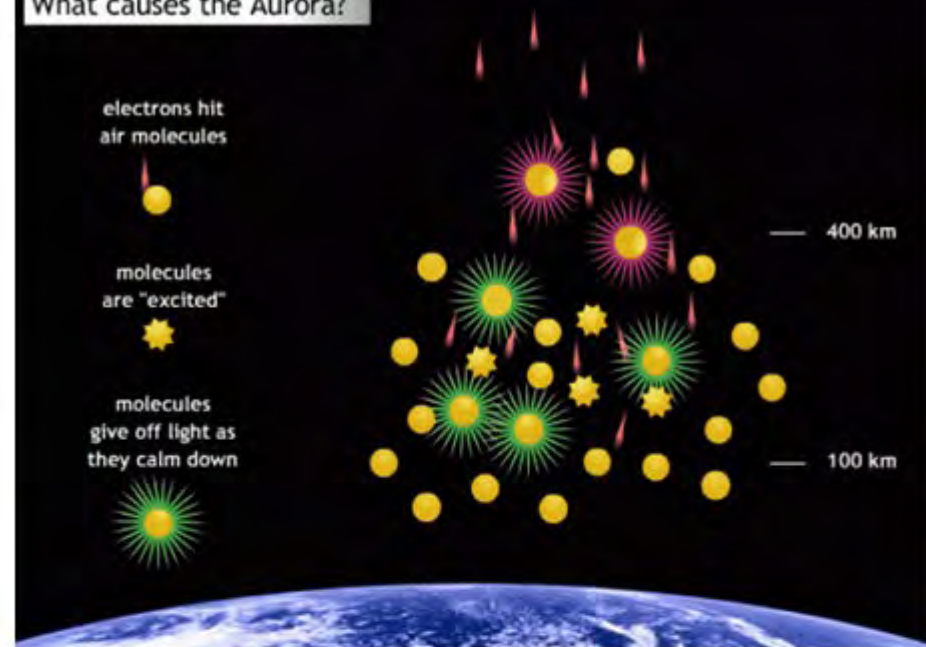
✧ 在宇宙中，恒星是高温电离形成的等离子体，稀薄的星云和星际物质则是由辐射电离形成的等离子体，在宇宙中99%的物质是等离子体。



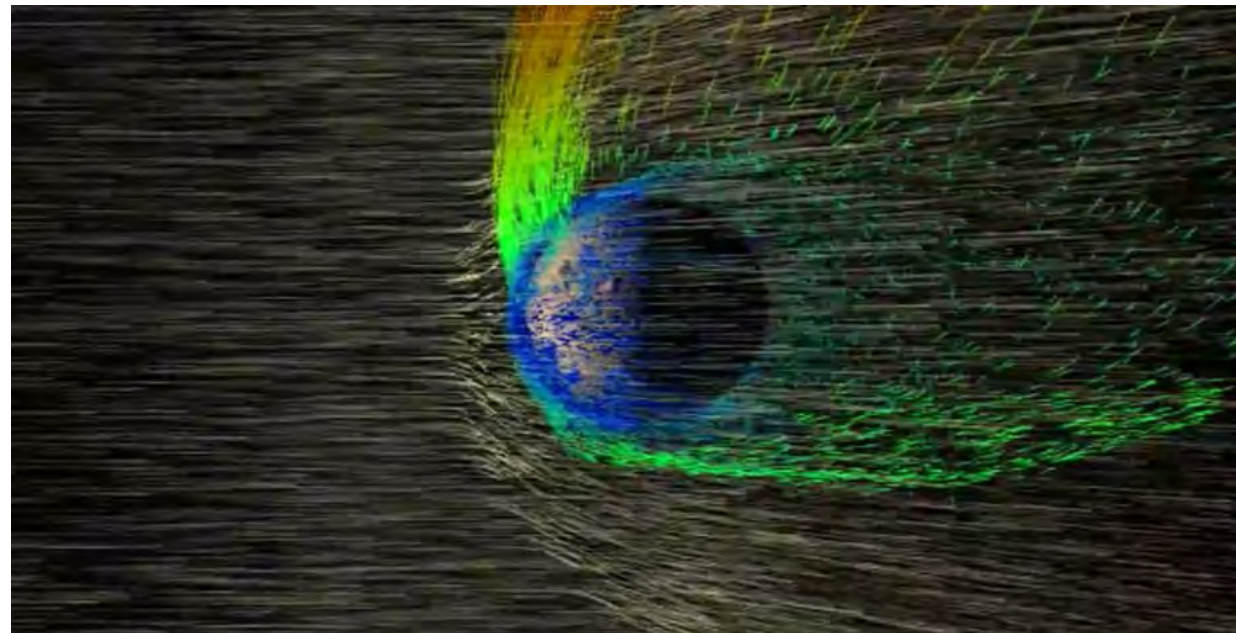
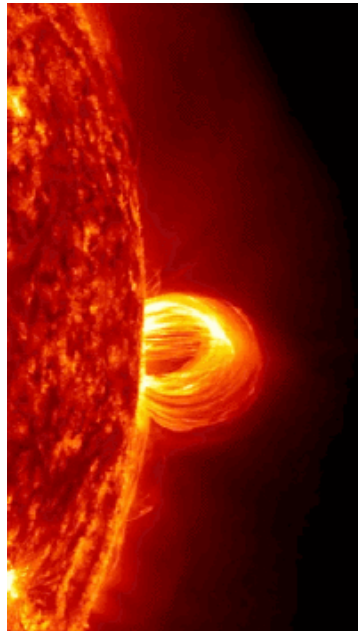
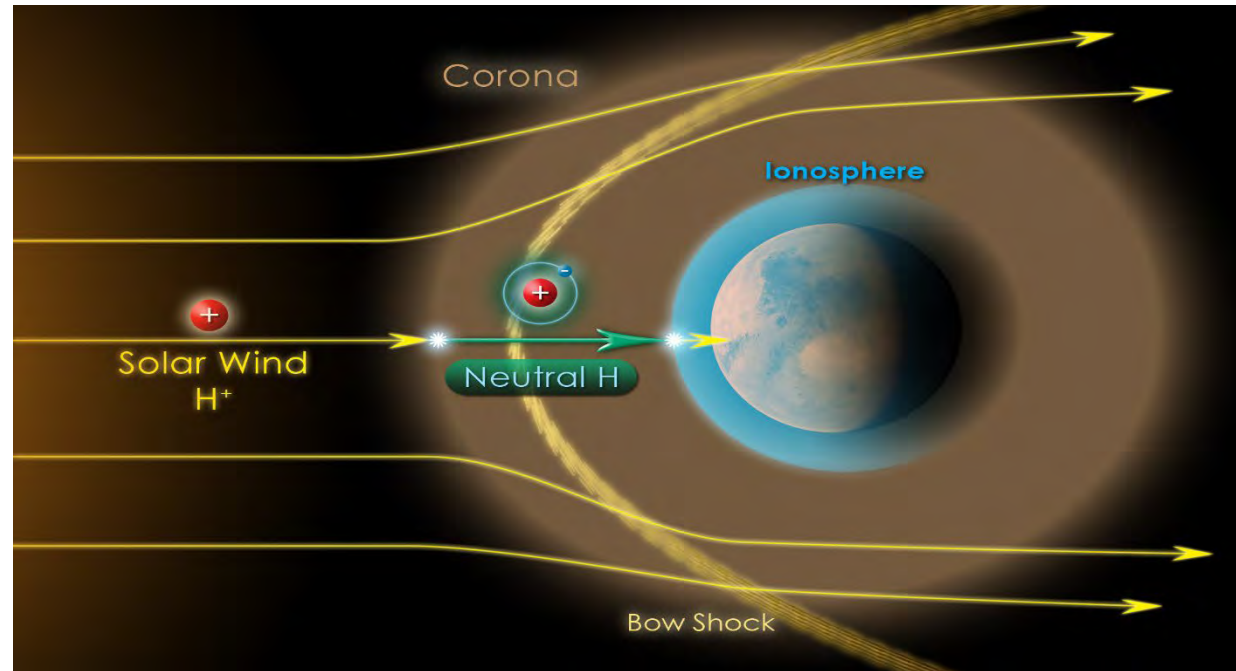
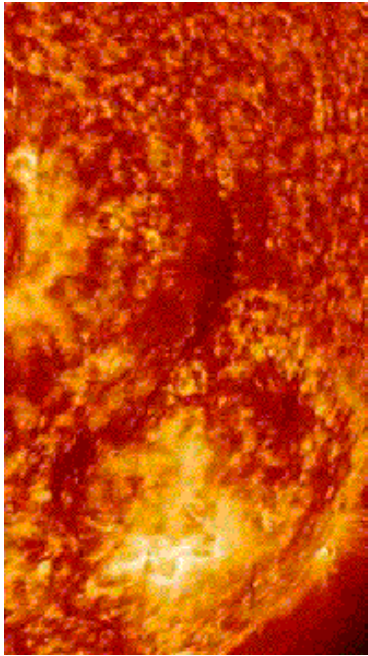
Current of solar wind

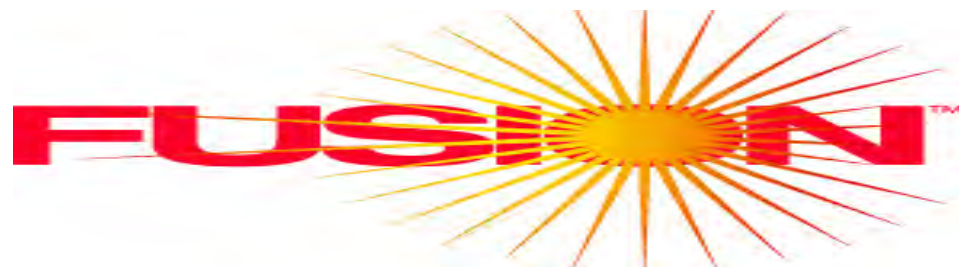


What causes the Aurora?

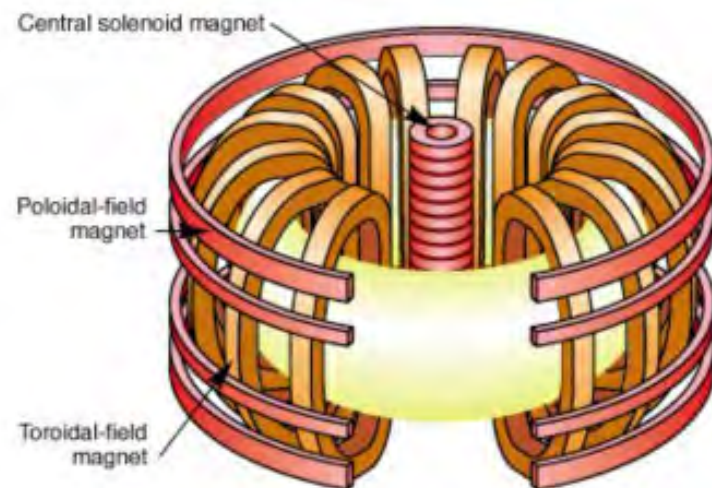
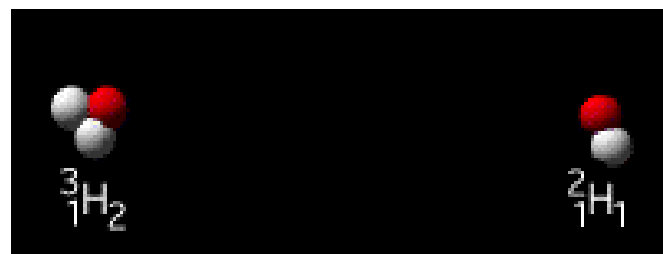


The solar wind



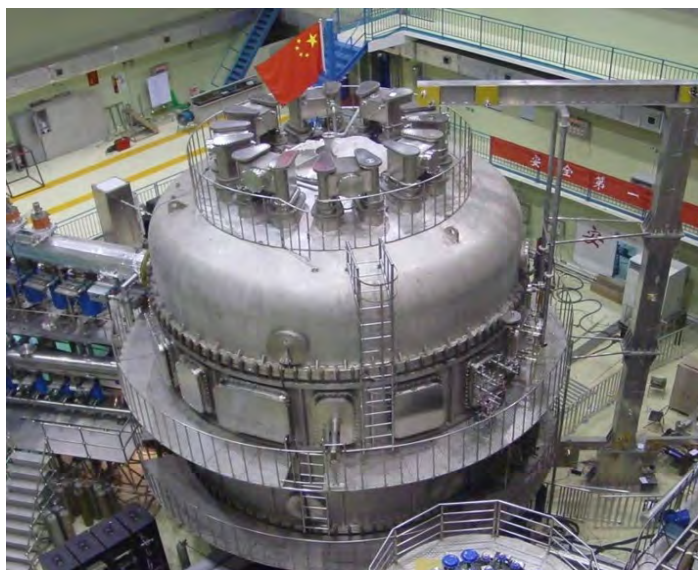
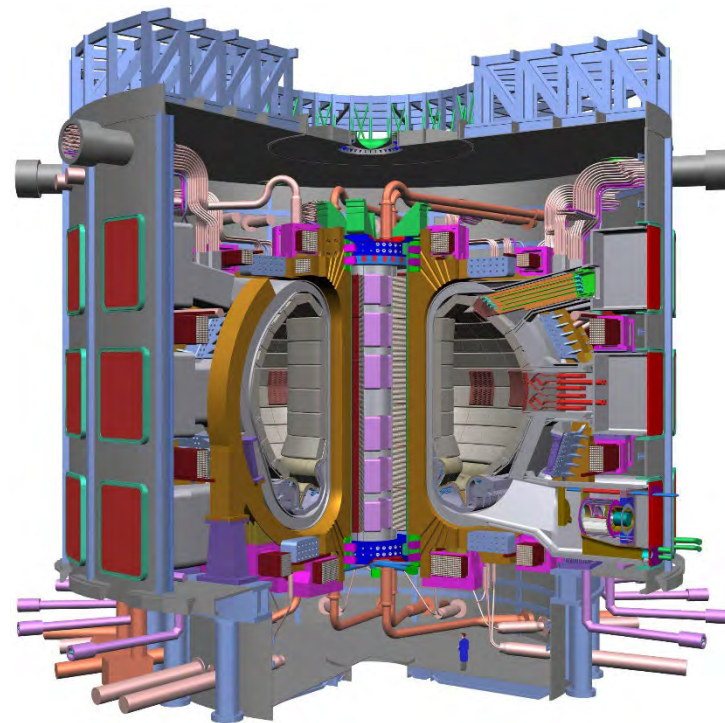


- * 轻核的聚变可以获得取之不尽用之不竭的能量，为了实现可控热核反应而不是热核爆炸，需要解决一系列难题。
- * 例如，聚变只能在几百万度或更高的温度下进行，在这种温度下任何固体都将熔化而无法作为装载的“容器”，为此，人们采用磁场来约束等离子体，迫使等离子体的全部带电粒子按一定队形运动而不与固体器壁接触。





然而，又出现了等离子体的不稳定性问题，它使得约束无法维持到实现反应所需的时间。所以，为了解决等离子体的磁约束问题，不仅需要设计各种磁场位形，建立巨大而复杂的托卡马克装置。



3. 超导体

(1) 什么是超导体

- ❁ 某些金属或合金的温度降到接近绝对零度时，其电阻突然变为零或接近于零，这种现象称为超导电现象。
- ❁ 现代超导重力仪的观测表明，超导态物体的电阻率必定小于 $10^{-28} \Omega \text{ m}$ ，远远小于正常金属迄今所能达到的最低电阻率 $10^{-8} \Omega \text{ m}$ ，因此，可以认为超导态的电阻率确实为零。

(2) 超导体的发现

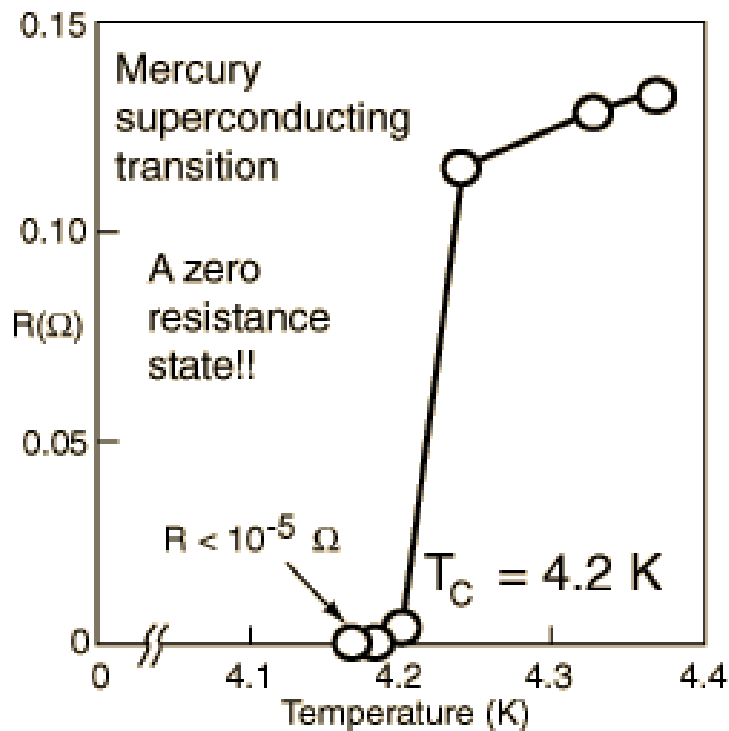
K. Onnes教授(1853-1926年), 荷兰莱登实验室

- ☺1895: 空气被液化 81K
- ☺1898: 氢气被液化 20K
- ☺1908: 氦气被液化 4.25K
- ☺1911: 发现水银在4.22 °K
~4.27°K电阻消失

- ☺1913年获诺贝尔物理学奖 (60岁)
- ☺29岁: 莱登大学教授
- ☺30岁: 阿姆斯特丹皇家科学院院士
- ☺“绝对零度先生”



(3) 转变温度



K. Omnes, Commun.
Phys. Lab. (1911).

Perfect conductor



$$\rho = 0$$

$$\frac{I}{dI/dt} > 10^5 \text{ yrs}$$

三种临界参数:

- 临界温度,
- 临界磁场,
- 临界电流。

(4) BCS理论



1957年提出超导理论, 1972年, 诺贝尔物理学奖:
超导机理——BCS理论

巴丁 (美国) 64岁

库柏 42岁: 提出超导理论模型, 36岁任教授

施里弗 41岁: 解决超导理论问题, 33岁任教授



刑禱田作万相子吉由



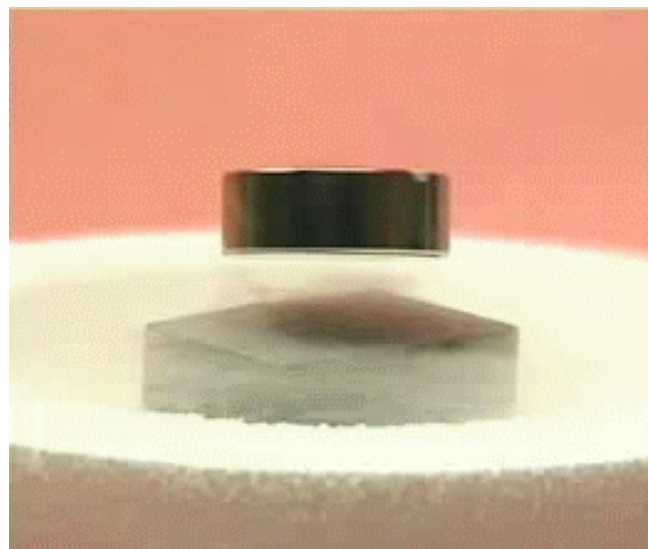
(5) 高温超导



- 1983年开始，在瑞士苏黎世实验室研究氧化物超导电性
- 1986年瑞士,LaBaCuO超导体: $T_c \sim 36^\circ \text{K}$ 。
- 1987年，诺贝尔物理学奖

缪勒（瑞士）60岁

柏诺兹（德国）37岁



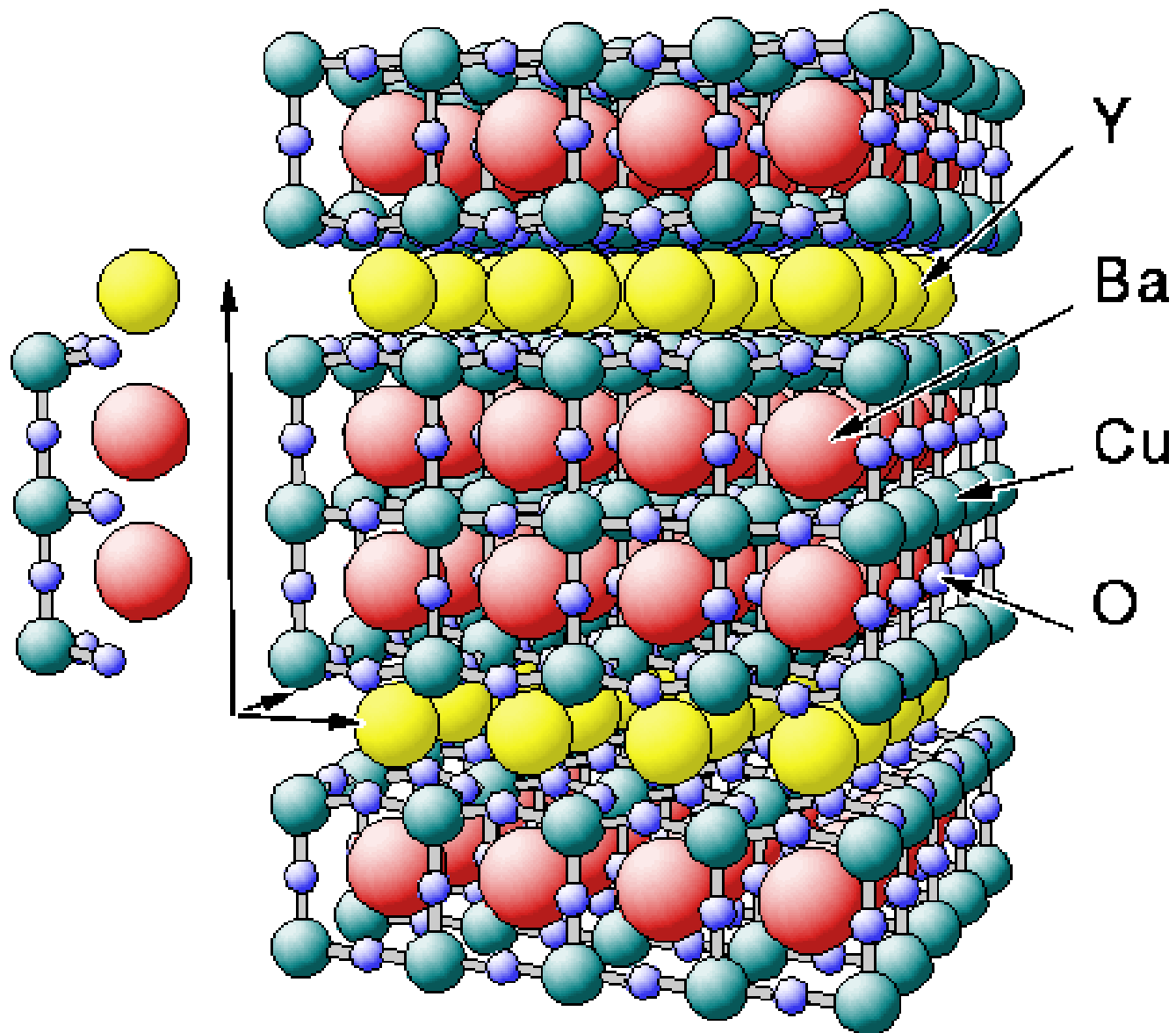
❀ 1986年12月和1987年1月初，中国科学院物理所赵忠贤教授等宣布，Sr-La-Cu-O系统的 $T_c = 48.6 \text{ K}$ ，Ba-La-Cu-O系统的 $T_c = 46.3 \text{ K}$

❀ 1987年2月 16日美联社报道美国朱经武教授等获得起始转变温度为98K的超导材料。

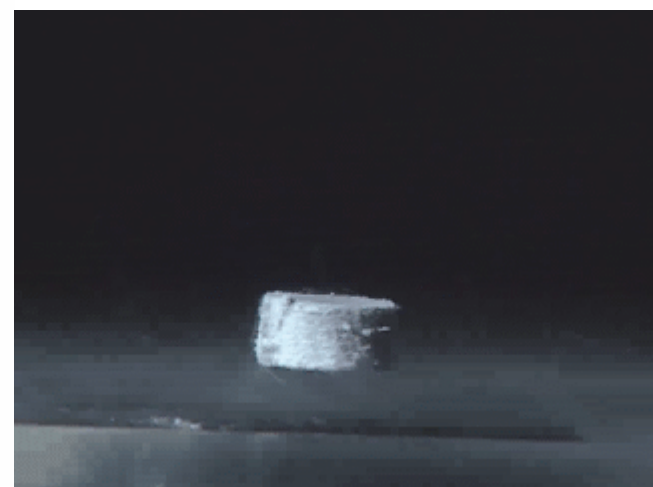
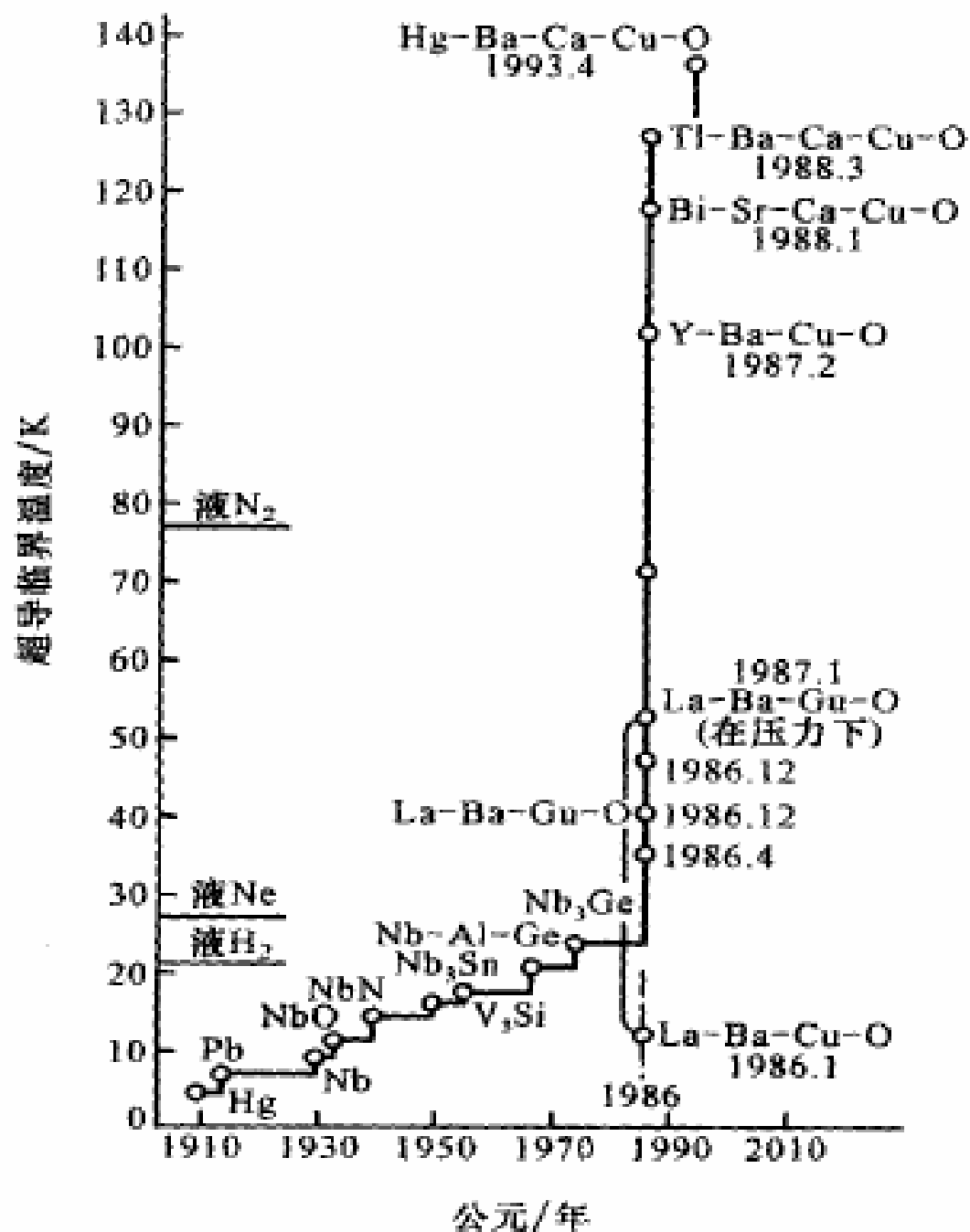
❀ 1987年2月24日中国科学院物理所宣布，赵忠贤教授等已制成起始超导温度高于100K，中点转变温92.8 K，零电阻温度为78.5 K的超导材料 $\text{Ba}_x\text{Y}_{5-x}\text{Cu}_5\text{O}_{5(3-y)}$ 。

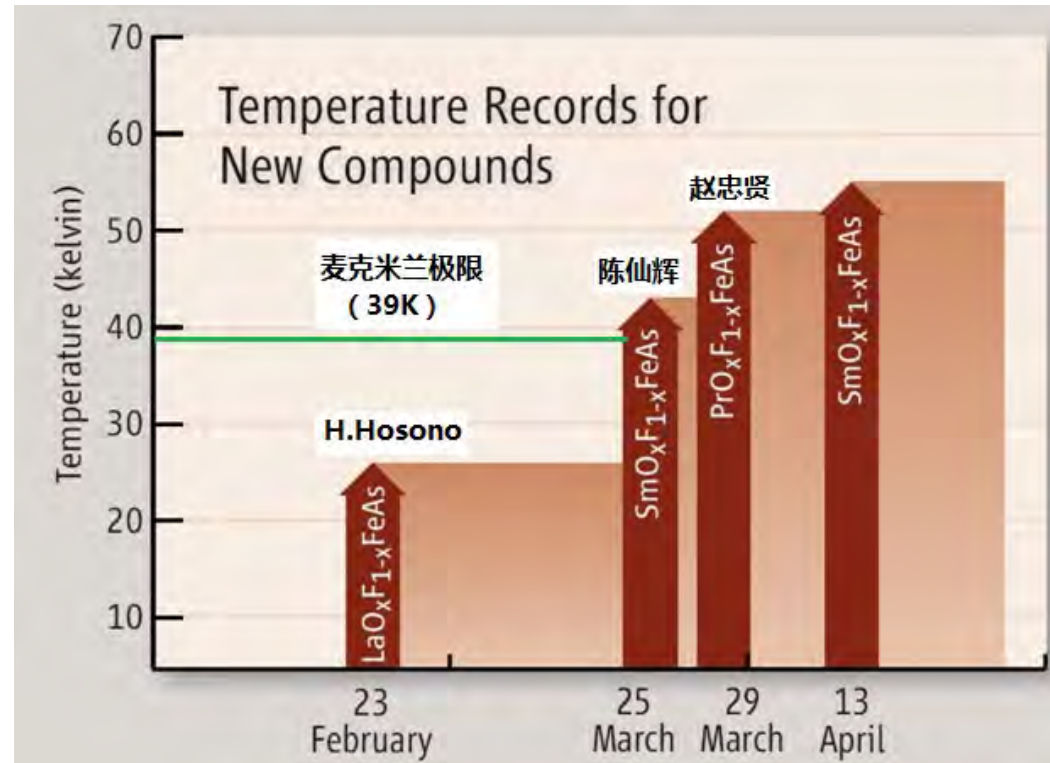
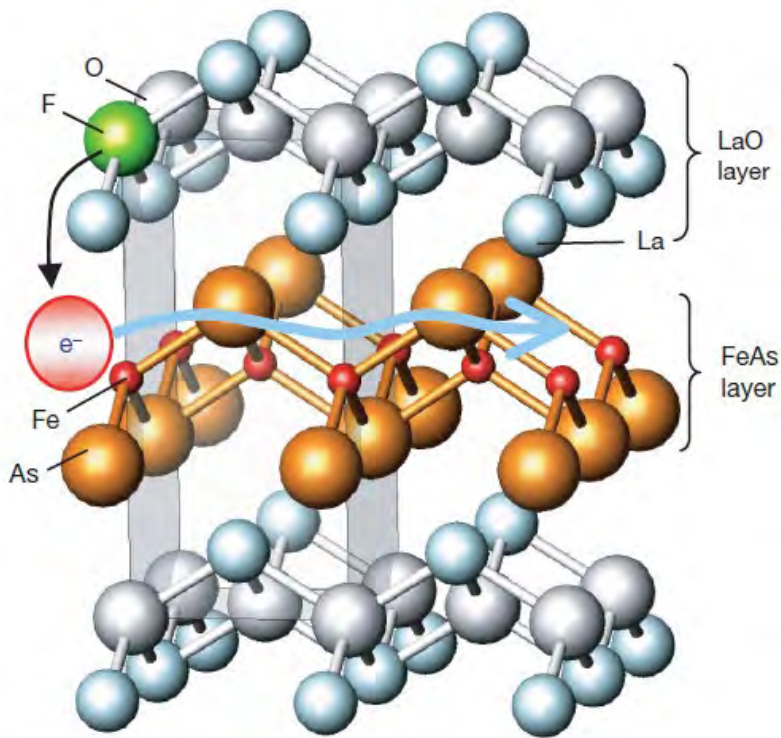
❀ 1988年1月22日日本宣布Bi-Sr-Ca-Cu-O超导材料的TC约为105 K。

❀ 1988年3月美国宣布Tl-Ba-Ca-Cu-O超导材料的 T_c 为125 K。
1993年4月发现Hg-Ba-Ca-Cu-O超导材料的TC为134 K



YBa₂Cu₃O₇ (.3) lattice





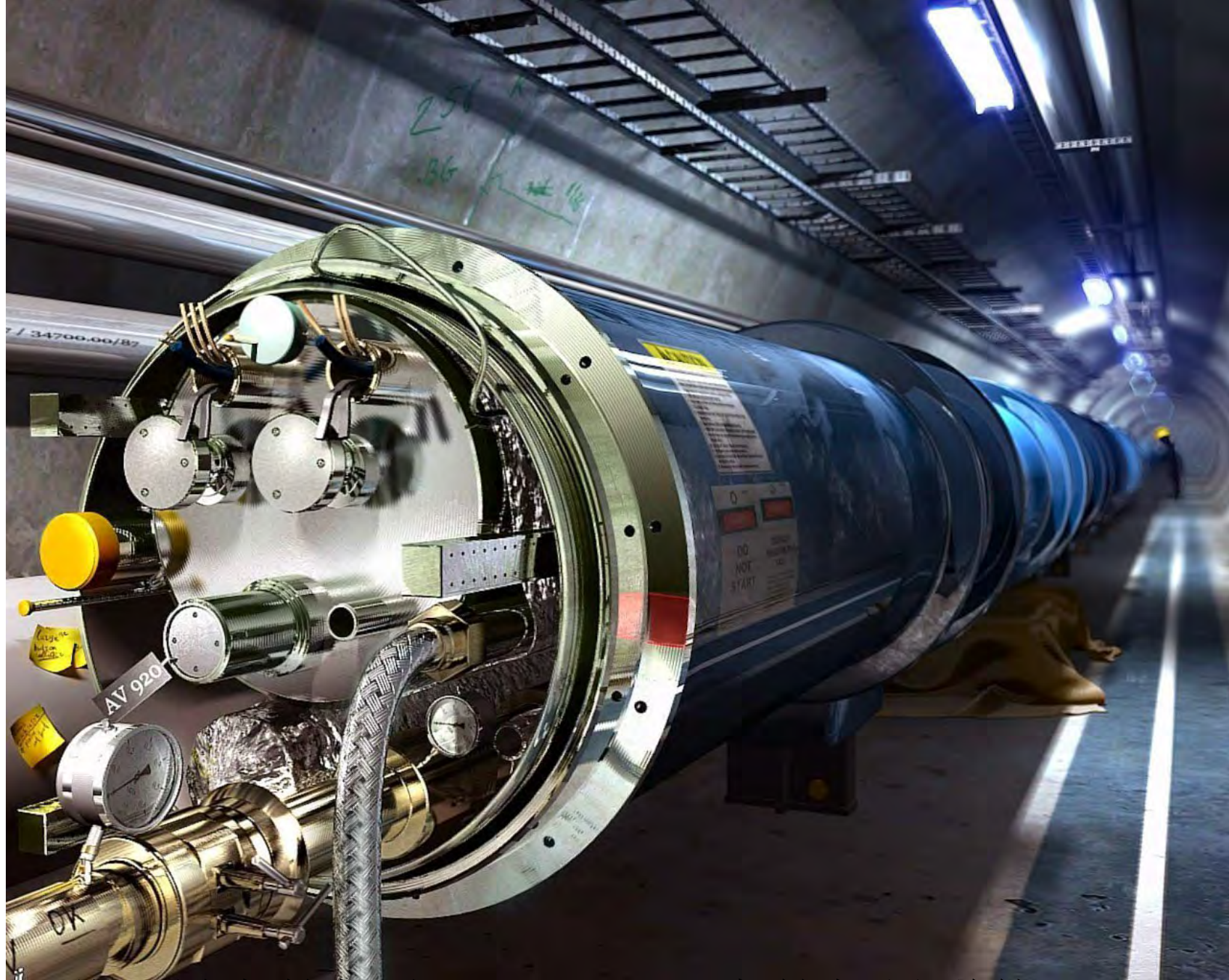
Crystal Structure of LaOFeAs

2008, International top 10

- Iron-based superconducting materials

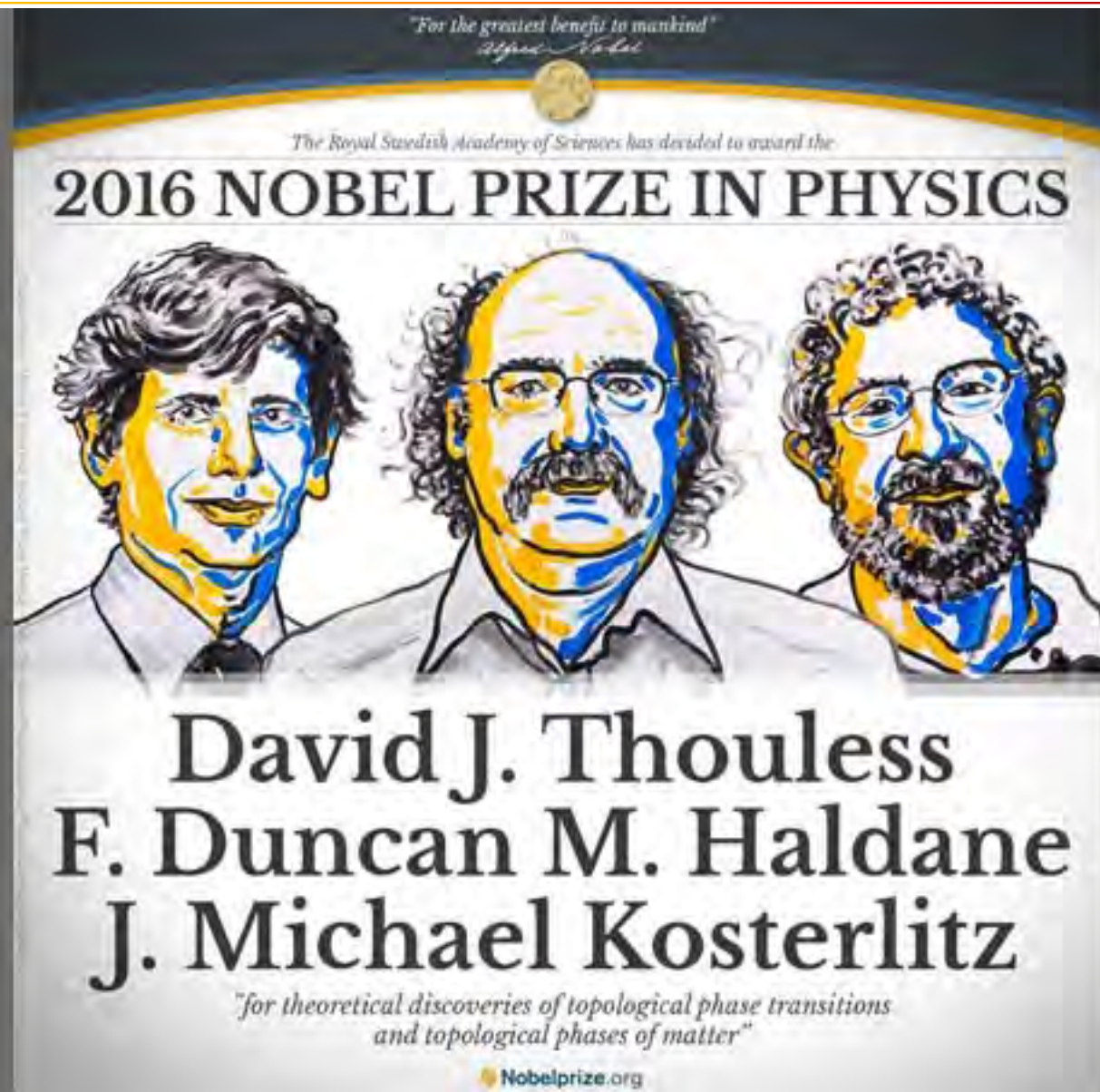
✿ 在液氮温区工作的高 T_c 超导材料的发现，为超导技术的实用开辟了广阔的前景，对科技和生产将产生深刻的影响，日本正在开发的测试磁悬浮列车；欧洲CERN正在建造的世界最大的加速器LHC中的超导磁体。2002年9月上海磁悬浮列车首次试车成功，设计时速达505km/h, 总投资30亿元，已于2003年初试运行。





世界最大的加速器CERN-LHC中的超导磁体

超导为什么没有电阻——宏观理论



2016 Nobel Prize in Physics

Title: **Topological Phase Transitions and Topological Phases of Matter**

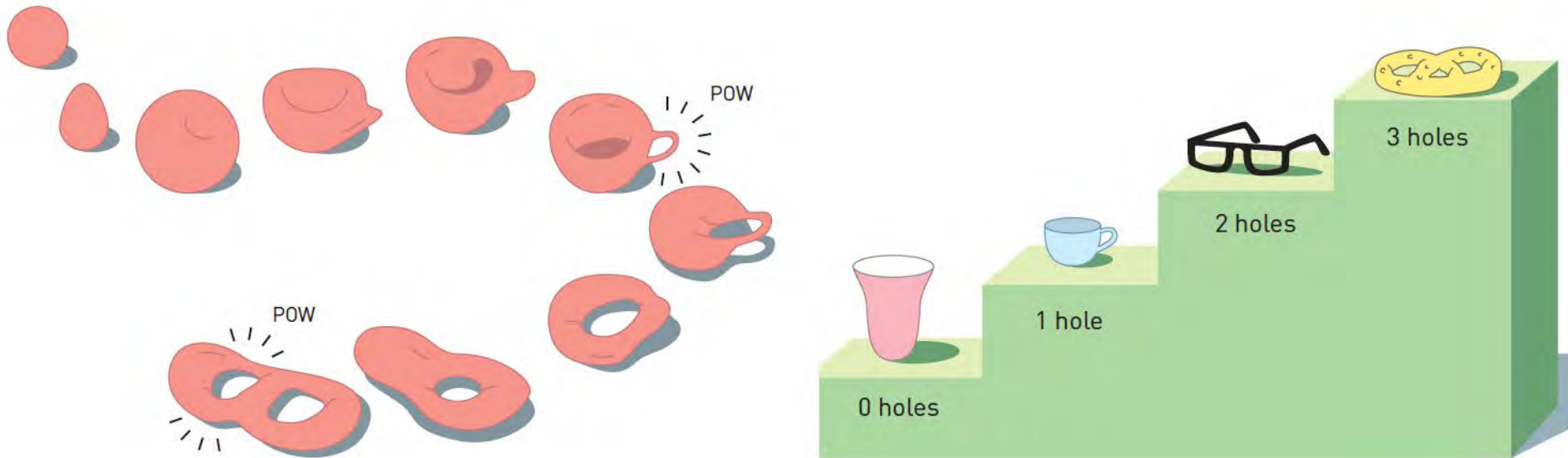
*“Together, they (Thouless and Kosterlitz) took on the problem of **phase transitions** in the **flatlands** (the former out of **curiosity**, the latter out of **ignorance**, they themselves claim).”*

*“In 1972 J. Michael Kosterlitz and David J. Thouless identified a completely new type of phase transition in two-dimensional systems where **topological defects** play a crucial role [35, 36]. Their theory applied to certain kinds of magnets and to superconducting and superfluid films, and has also been very important for understanding the quantum theory of one-dimensional systems at very low temperatures.”*

*“This insight has provided an important link **between statistical mechanics, quantum many-body physics and high-energy physics**, and these fields now **share a large body of** theoretical techniques and results.”*

Monte Carlo Simulation

Topologically distinct configurations



"Topologically distinct"— two configurations **cannot** be transformed into each other by a **continuous** deformation of the spins.

拓扑

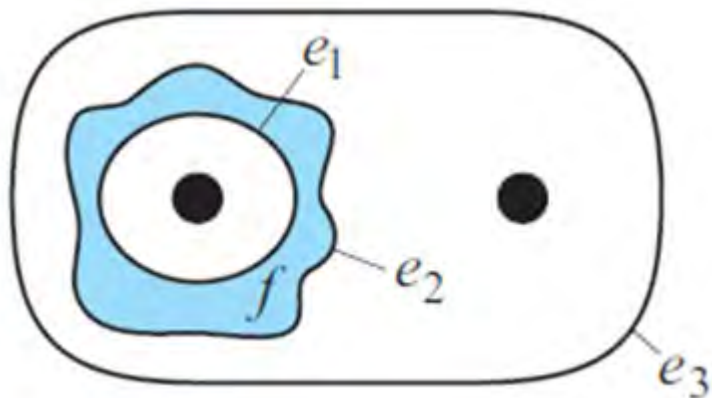


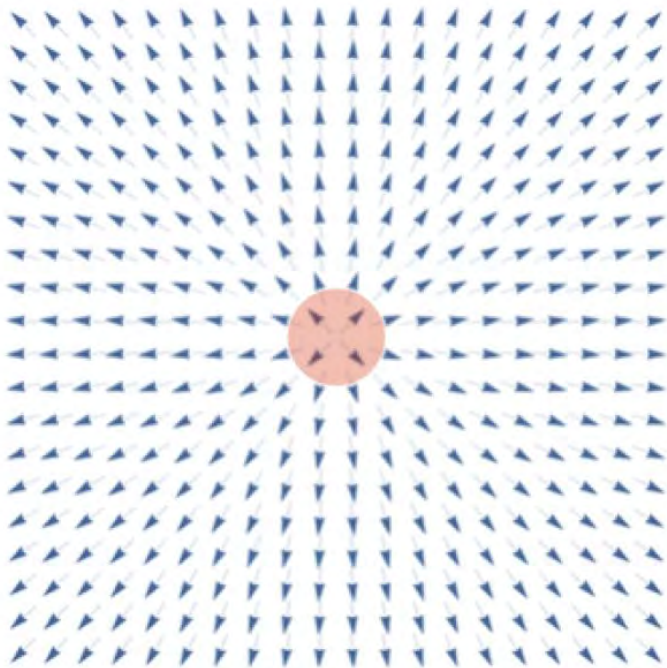
Illustration of homological
equivalence in 2D



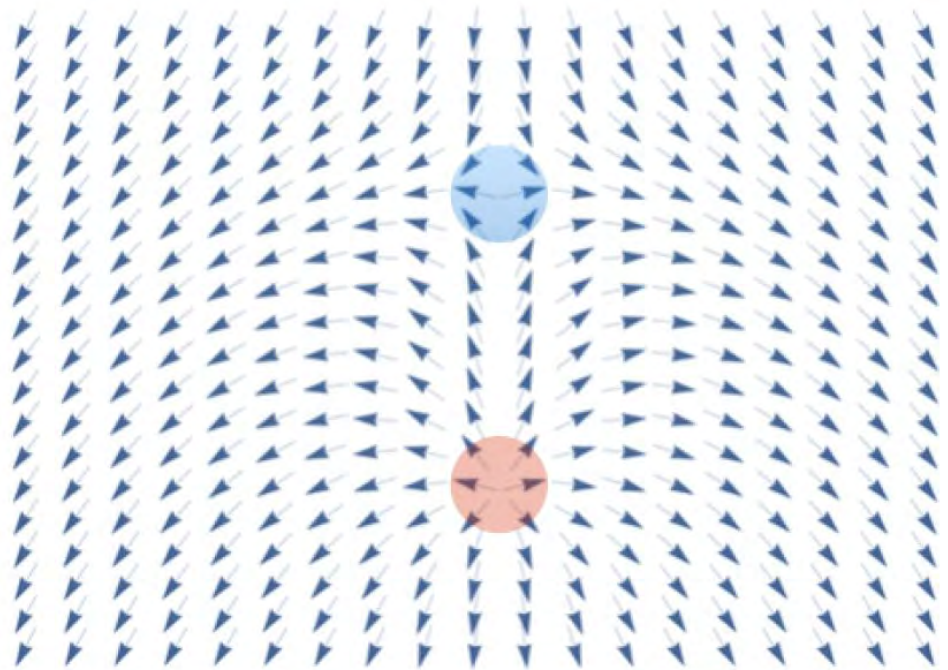
continuous deformation of a
mug into a doughnut (torus)
and back.

Topologically distinct configurations

Vorticity $v = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \theta(\vec{r})$



$$v = +1$$



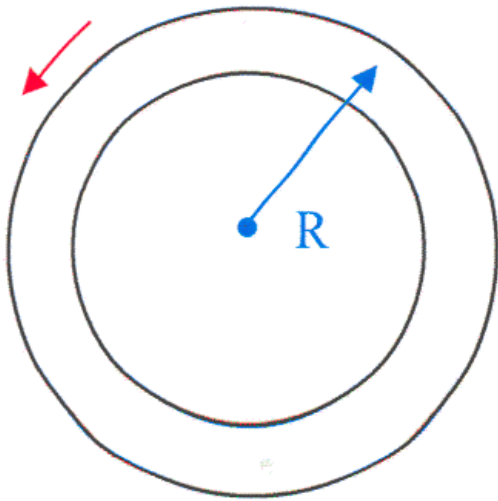
$$v = 0$$

"Topologically distinct"—two configurations **cannot** be transformed into each other by a **continuous** rotation of the spins.

Hallmarks of Superfluidity

Hess-Fairbank effect and Persistent current

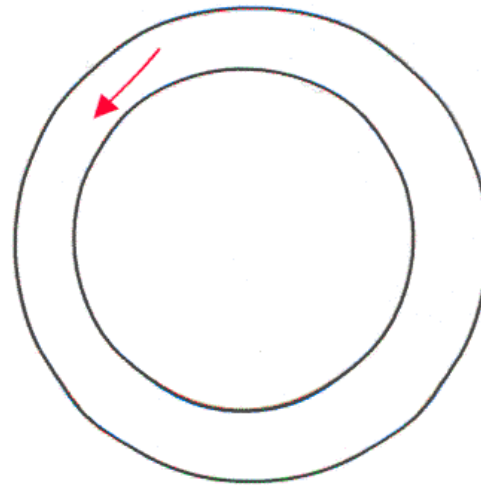
Define $\omega_c = \frac{\hbar}{mR^2} \equiv$ quantum unit of rotation (10^{-4} Hz for 1cm)



Hess-Fairbank effect

Wall rotates with $\omega \leq \omega_c$,
liquid **stationary**

Equilibrium Effect



Persistent current

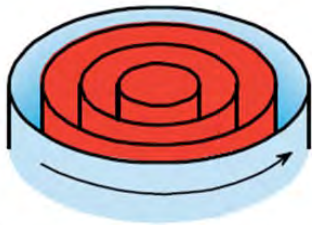
Wall at **rest**,
Liquid rotates with $\omega \geq \omega_c$,

Metastable Effect

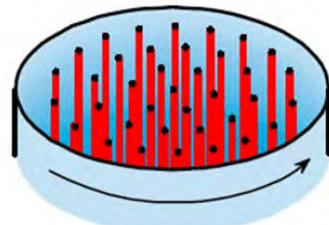
Hallmarks of Superfluidity

Quantized vortices

- ✓ Theoretical predictions of vortices in superfluid (1948, 1955), and superconductor (Abrikosov 1957)

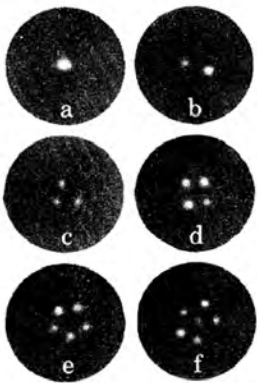


Onsager 1948, Landau–Lifshitz 1955



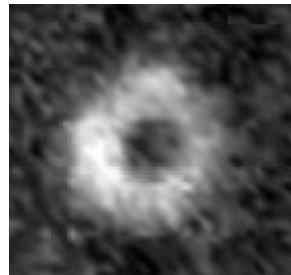
Onsager 1949, Feynman 1955

$$\oint_C \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = 2\pi\gamma \times \text{integer}$$
$$\gamma = \hbar / m$$

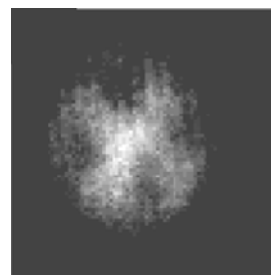


Varmchuk *et al.* 1979

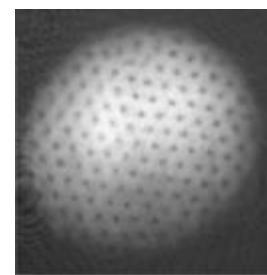
Vortices in ultracold atomic gases



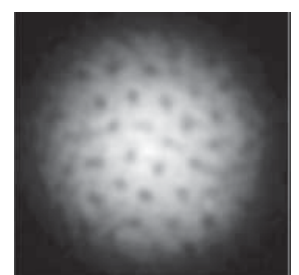
JILA, 1999



ENS, 2000



MIT, 2001



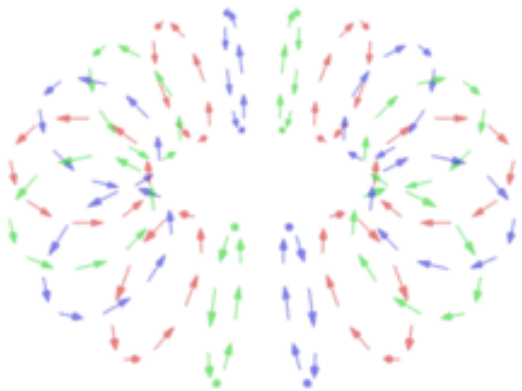
MIT, 2005

Hallmarks of Superfluidity

Vortex ring in 3D and its metastability

A sidedish (superlink) — [Crazy pool vortex](#)

- ✓ In 3D, vortices have to form a **closed ring** or an open chain **ending** at the surface.
- ✓ Vortices, vortex-rings and persistent currents are **metastable** due to angular momentum.
- ✓ Unlike classical analogue, quantum vortex has **quantized** angular momentum



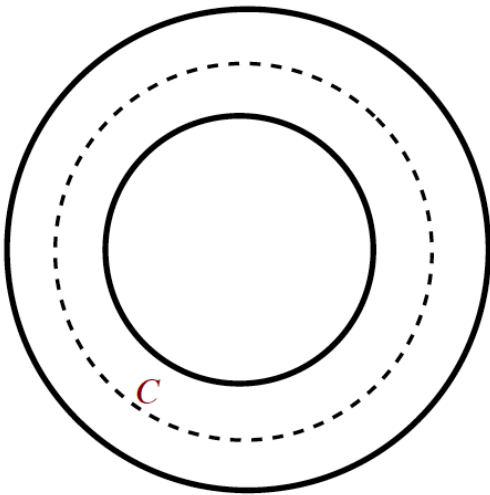
What is Superfluidity?

Modern view of superfluidity: emergent constant of motion

Superfluid is a natural low-T state of a classical complex-valued matter field, arising from an **emergent** constant of motion—i.e., **topological** order

Complex matter field: $\psi(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})| e^{i\Phi(\vec{r})}$

Superfluid velocity field: $\vec{v}_s = \gamma \nabla \Phi \quad (\gamma = \hbar/m)$



Emergent constant of motion: **quantized** circulation

$$\oint_C \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = \gamma \oint_C d\vec{l} \cdot \nabla \Phi = 2\pi\gamma \times \text{integer}$$

- ✓ leads to superfluidity
- ✓ can be destroyed *only* by **topological** defects (vortices)

近些年来，高温超导的研究成了世界各国科学家的一个热门课题，主要包括三个方面：

- ☯进一步寻找高临界参数的超导新材料
- ☯阐明高 T_c 氧化物超导体的物理机制；
- ☯开发新超导体的技术应用，如研制高 T_c 的高温氧化物超导实用线材或带材，发展制备高质量超导薄膜的技术，利用高温氧化物超导材料制造各种电子元件和器件等。