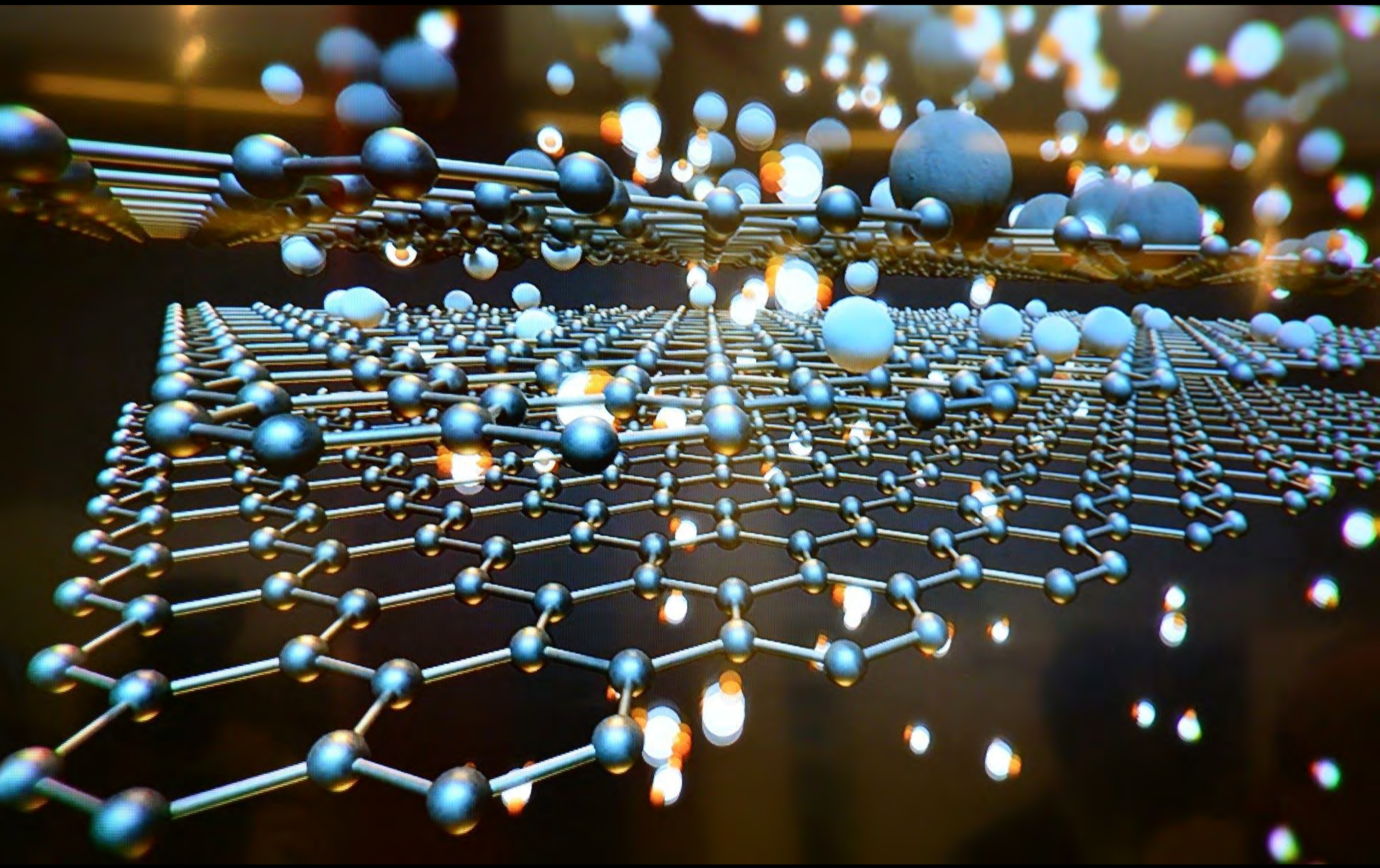
§2-5 静电场中的电介质

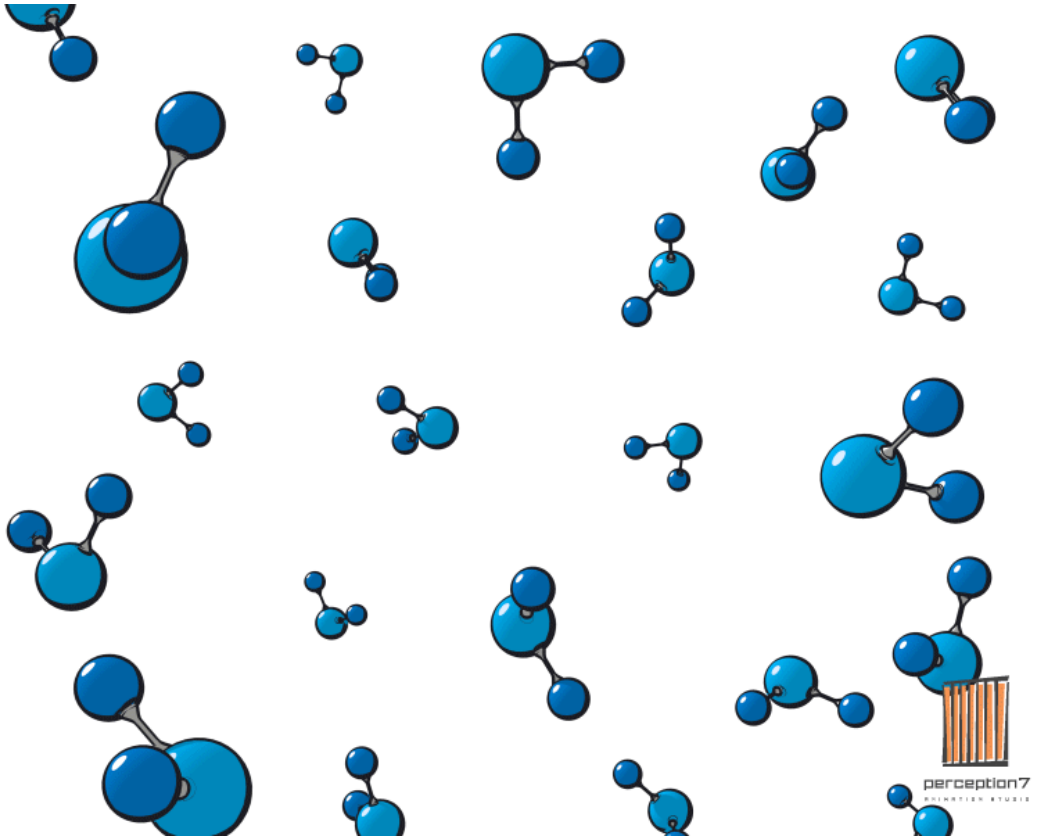


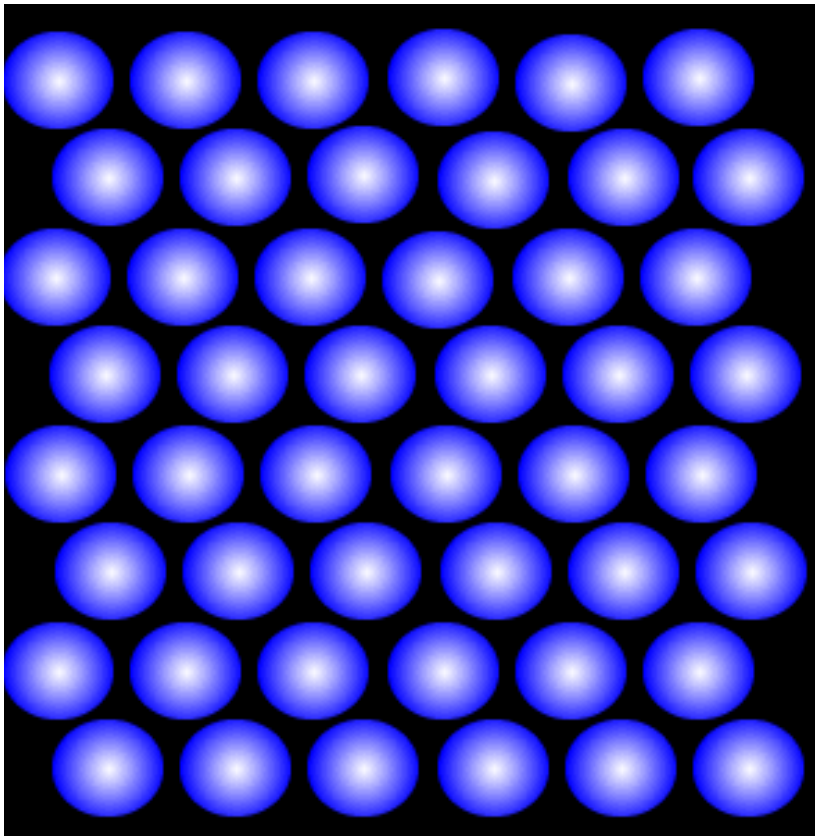
一、电介质的极化

1. 电介质（Dielectric）

绝缘介质，不导电。

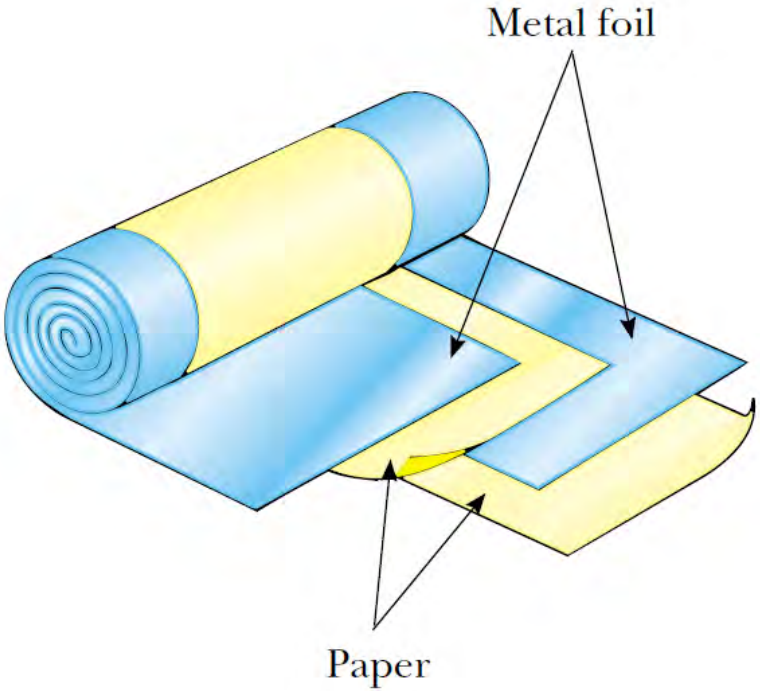
内部无自由电荷，只有约束电荷，约束在分子范围内。



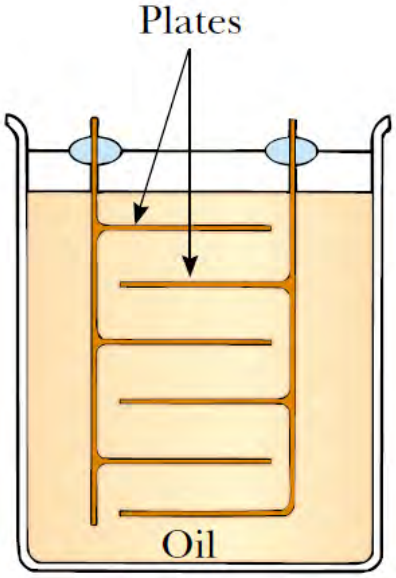


2. 电介质对于电容器的作用

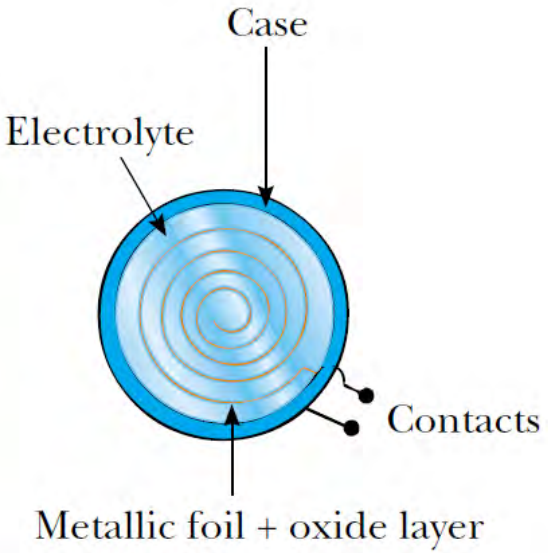
- 提供机械支撑。
- 增加最大工作电压。
- 增加电容。



管状电容器



高压电容器



电解电容器

3. 法拉第实验

- 在维持极板所带电量不变的情形下，将一块电分质板插入平行板电容器，极板间的电压读数会减小（$V < V_0$）；而当介质抽出后，读数恢复原来的大小（V_0）。

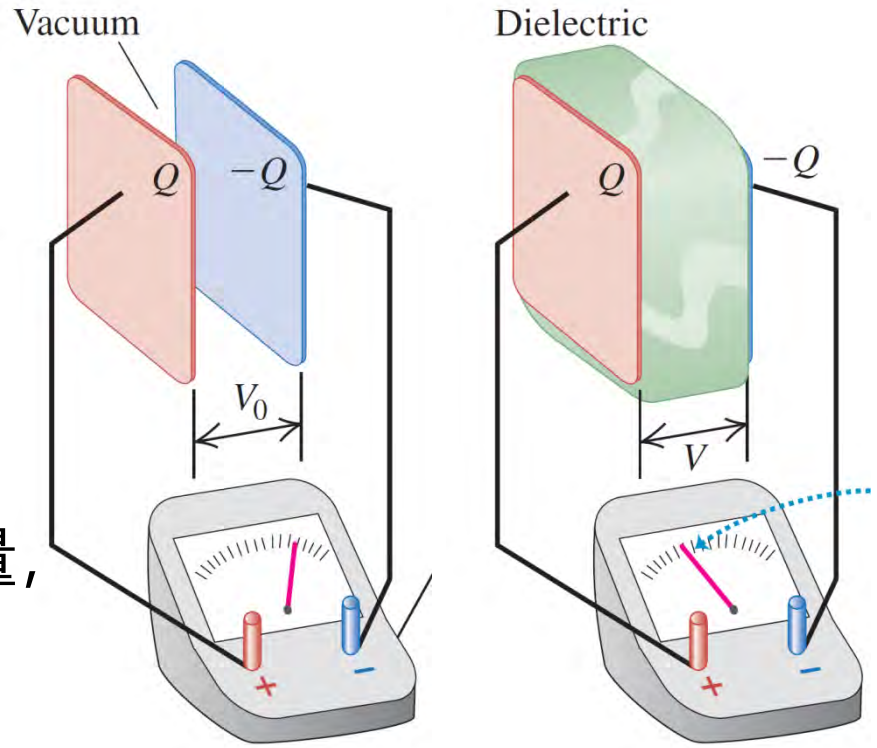
- 当电容器中有介质板时，极板间电压与极板带电量之间仍具有正比关系，因而电容的概念仍然有效。但是

$$C = \frac{Q}{V} > \frac{Q}{V_0} = C_0$$

- 当电容器中充满均匀介质时

$$\frac{C}{C_0} = \varepsilon_r$$

ε_r 仅由介质特性决定的物理量，称为介质的**相对介电常数**。



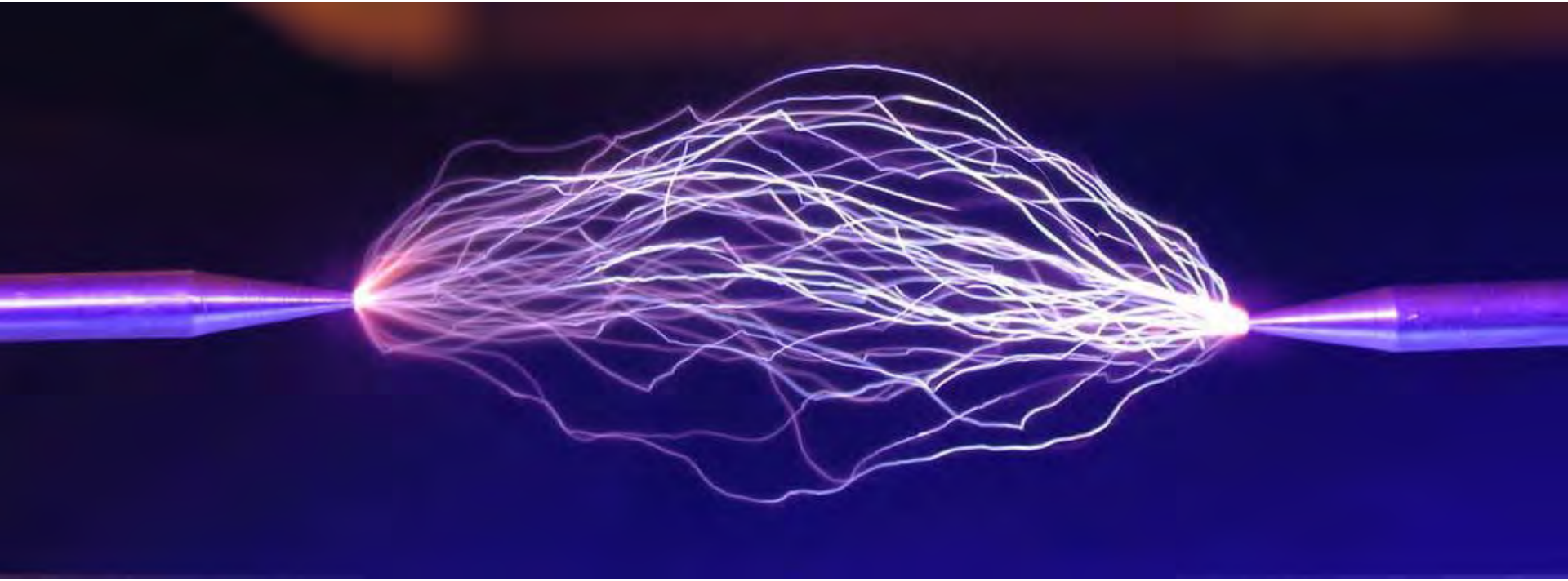
电介质	条件	ε_r	电介质	条件	ε_r
空气	气，0℃，1atm	1.00059	矿物油	液，20℃	2.24
甲烷	气，0℃，1atm	1.00088	氯化钠	固，20℃	6.12
氯化氢	气，0℃，1atm	1.0046	硫磺	固，20℃	4.0
水	气，110℃，1atm	1.0126	硅	固，20℃	11.7
水	液，20℃	80.4	聚乙烯	固，20℃	2.25-2.3
甲醇	液，20℃	33.6	瓷	固，20℃	6.0-8.0
氨	液，-34℃	22.6	石蜡	固，20℃	2.1-2.5
笨	液，20℃	2.28	玻璃	固，20℃	4.0

【注】空气在100 atm、20℃ 下的相对介电常数为 1.0548。

4. 介电强度（Dielectric strength）

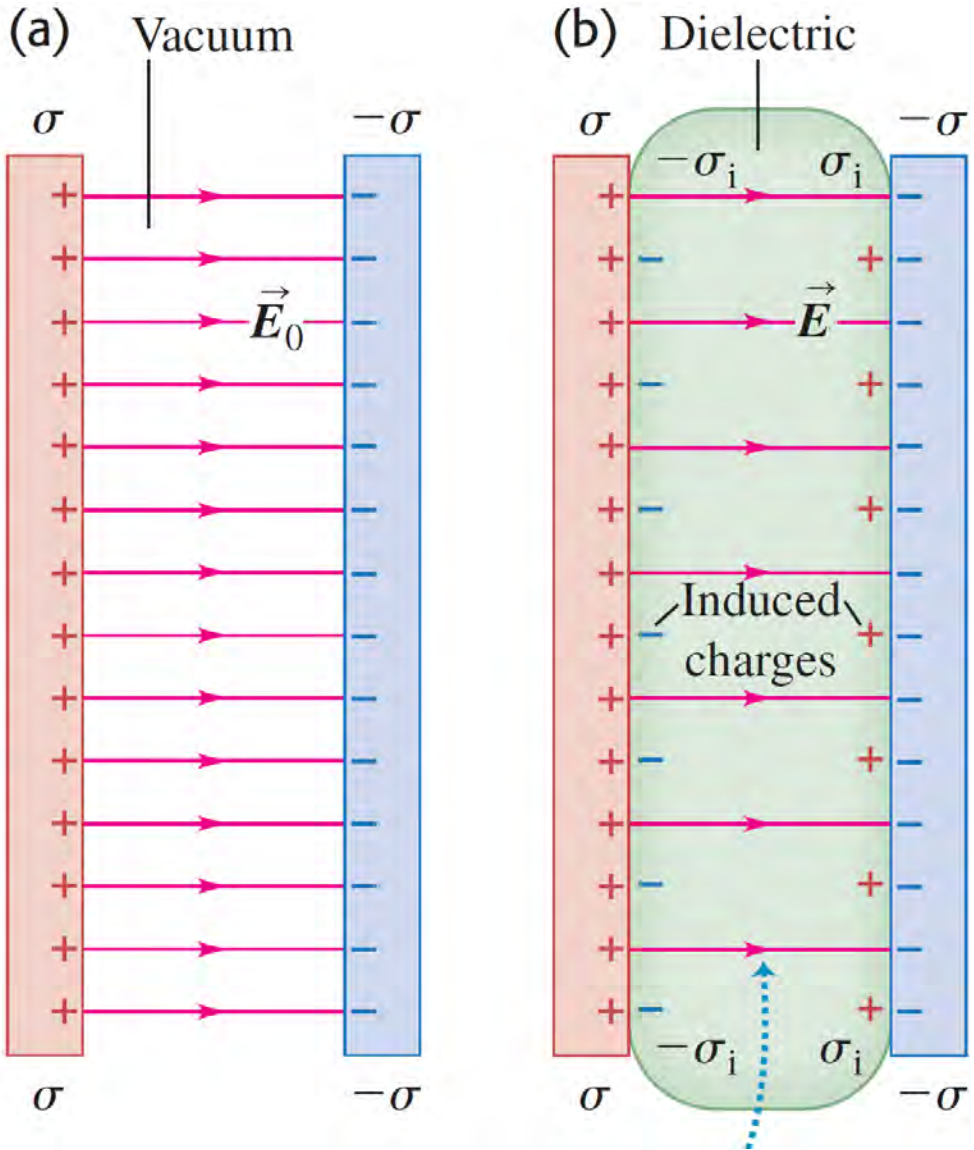
- 对于给定电介质，当介质中的电场超过一定数值，其绝缘特性会被破坏，电介质变为了导体。电场的这一临界值称为介质的**介电强度**或**击穿场强**。

材料	介电强度 (10^6 V/m)
空气	3
玻璃	9
纸	16



5. 电介质的极化（Polarization of a dielectric）

电介质在电场中出现宏观分布的约束电荷（**极化电荷**）。



二、极化的微观机制

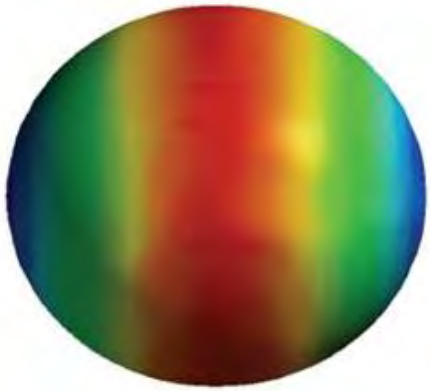
1. 原子、分子的电结构

类似于质心，定义电中性分子中正、负电荷的各自的**有效中心**：

$$\vec{r}_+ \triangleq \frac{1}{Q_+}\int \vec{r}dq_+,\ \vec{r}_- \triangleq \frac{1}{Q_-}\int \vec{r}dq_- \quad (Q_+ + Q_- = 0)$$

正负电荷中心是否重合决定了分子是否具有非零的电偶极矩：

$$\vec{p} \triangleq \int \vec{r}dq = \int \vec{r}dq_+ + \int \vec{r}dq_- = Q_+\vec{r}_+ + Q_-\vec{r}_- = Q_+(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$



H_2

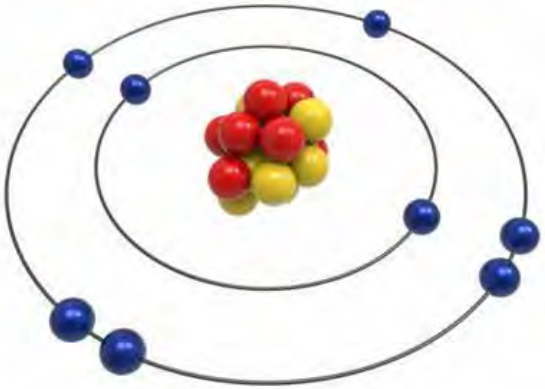
HF

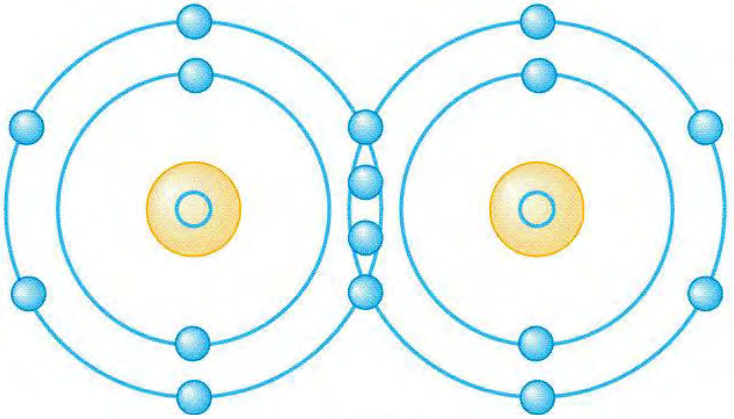
NaF

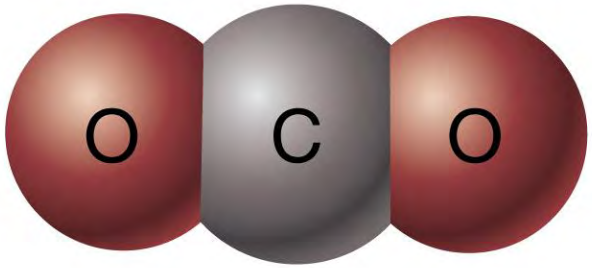
2. 无极分子与有极分子

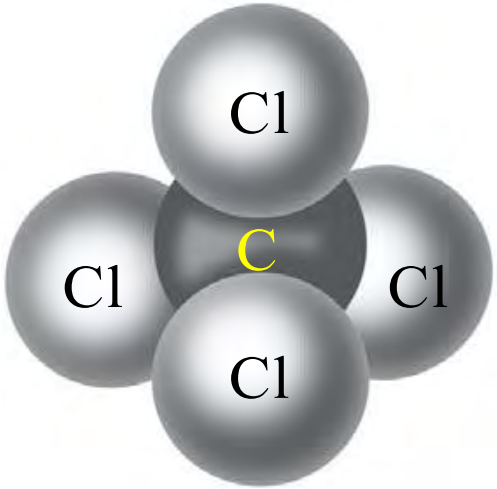
无极分子：正、负电荷中心重合。

- 如 H_2、N_2、CO_2、CCl_4 等。
- 整个分子系统的电偶极矩为零，故它们对外不产生电场。



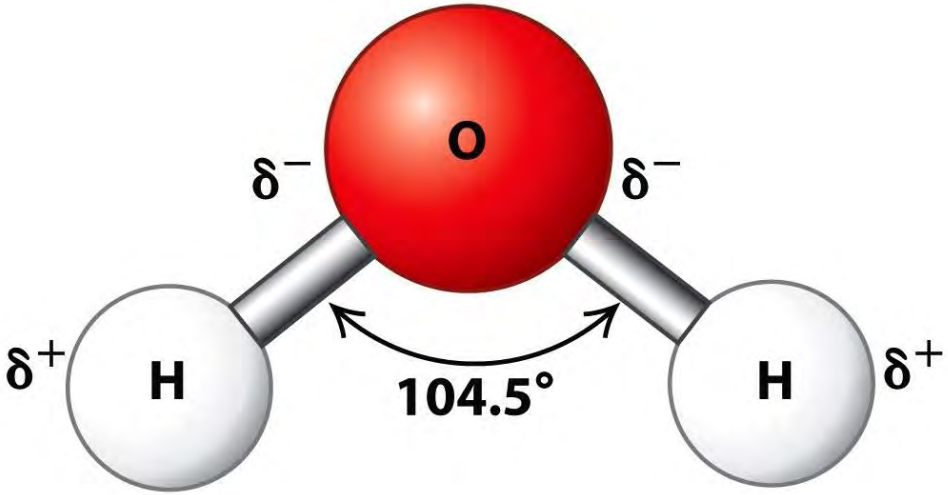


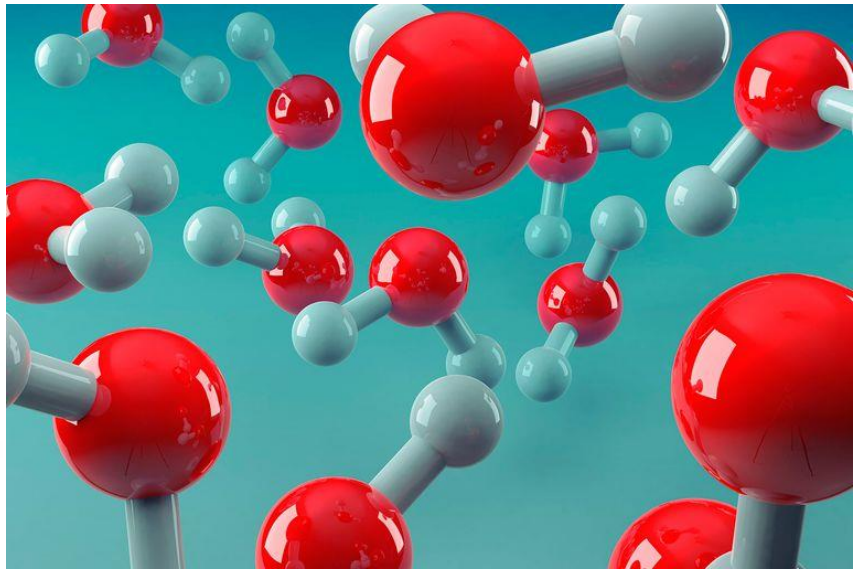


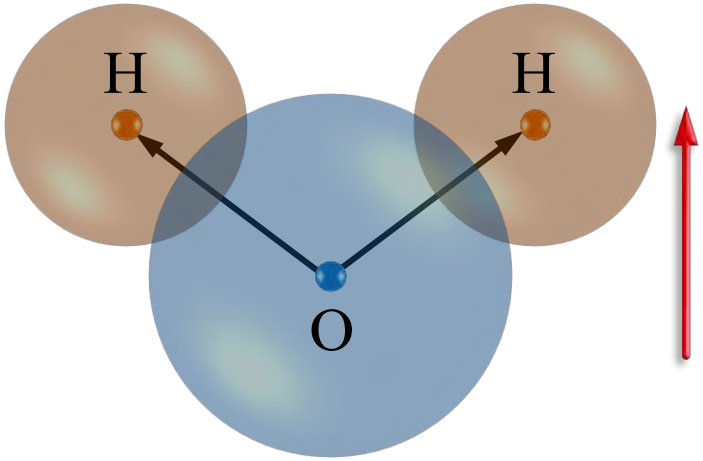


有极分子：正、负电荷中心不重合。

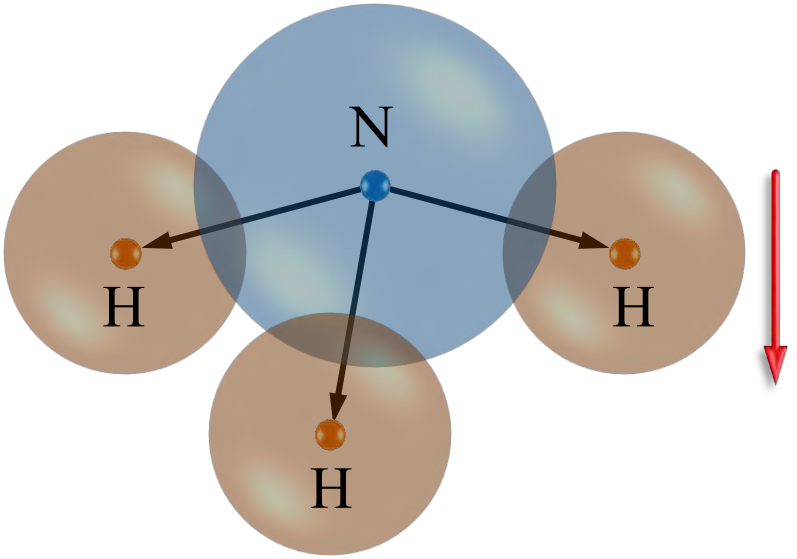
- 如 H_2O、HCl、$NaCl$、CO、NH_3 等。
- 整个分子系统的电偶极矩不为零，有极分子的电矩称为分子**固有电矩**。
- 有极分子构成的宏观电介质，尽管每个分子会产生电场，但是无外场时，由于分子电偶极矩取向随机，因此，电介质对外并不会激发电场。



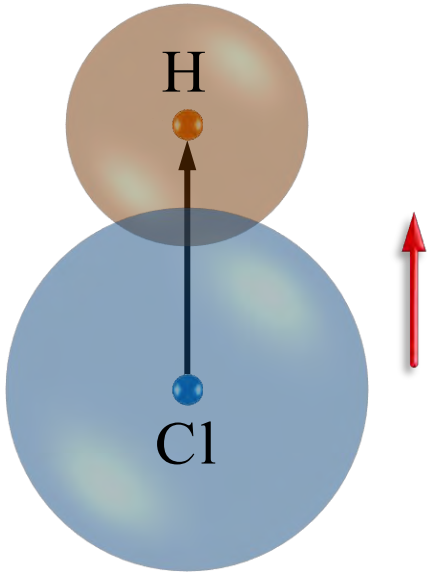




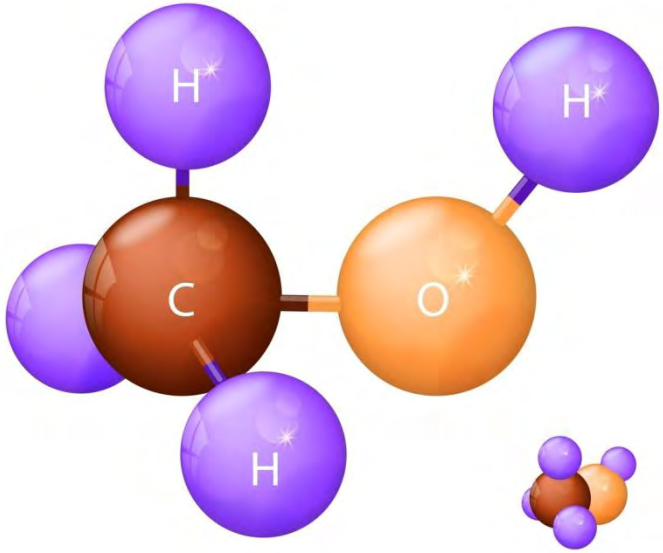
$p = 6.13 \times 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m}$



$p = 4.77 \times 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m}$



$p = 3.43 \times 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m}$

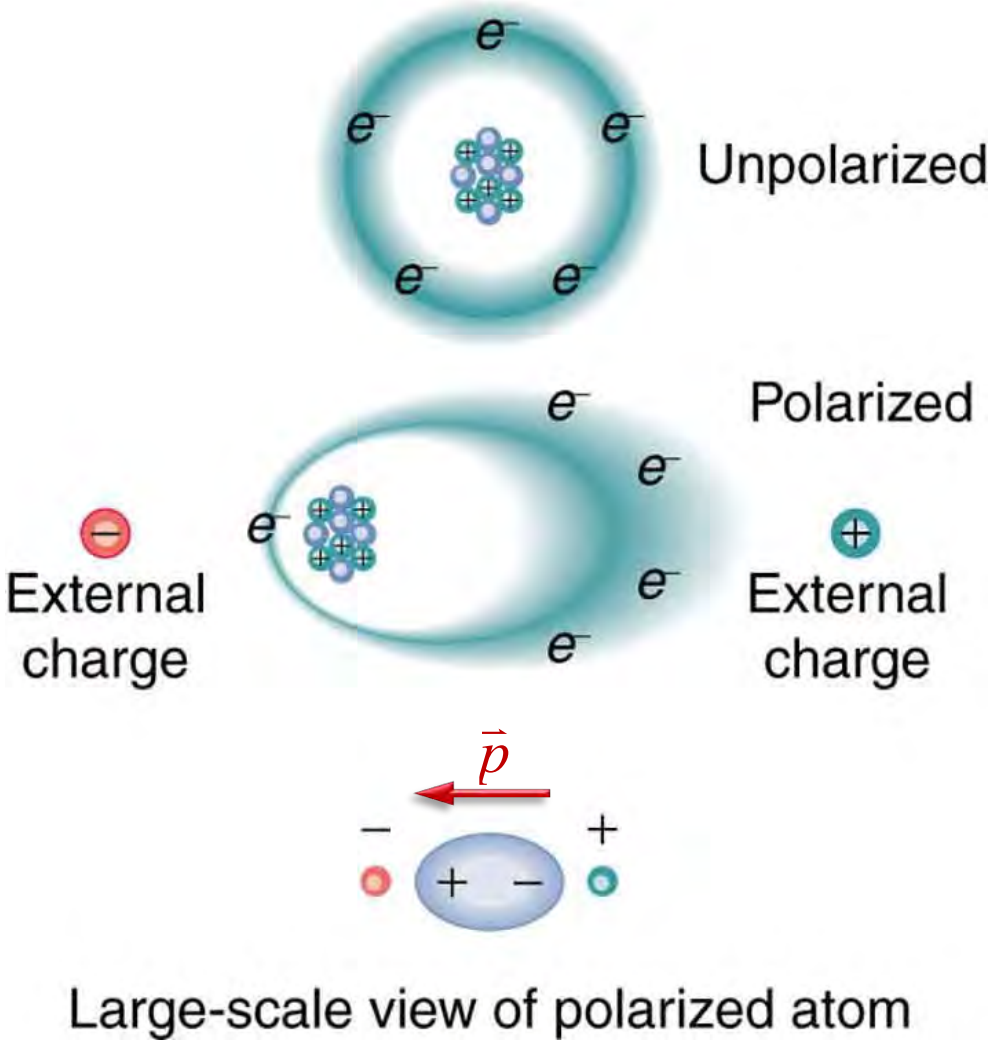


$p = 5.37 \times 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m}$

3. 无极分子的极化机制

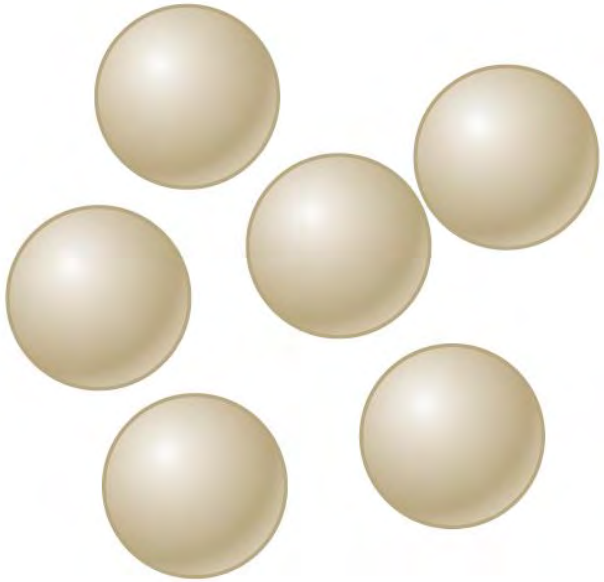
- 由无极分子组成的电介质，因为每个分子都无电性，故整个电介质不产生电场。

- 当电介质处在外电场中时，正负电荷中心被拉开一定的距离形成一个电偶极子，具有一定的电矩（**诱导电偶极矩**），电矩的方向与外电场的方向相同，外电场越强，感应电矩越大。

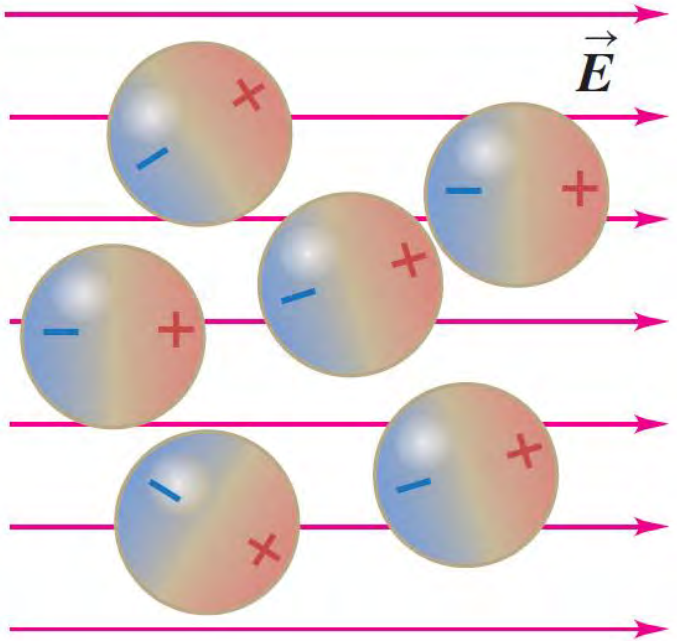


- 由于诱导电矩是正负电荷在外场作用下发生微小位移的结果，所以无极分子组成的电介质的极化称为**位移极化**。

【注】由于原子核的质量比电子质量大得多，无极分子在电场作用下，其原子核实际上并未移动，感应电矩几乎完全是因为电子在外场作用下发生位移的结果，因此无极分子组成的电介质的极化称为电子位移极化。



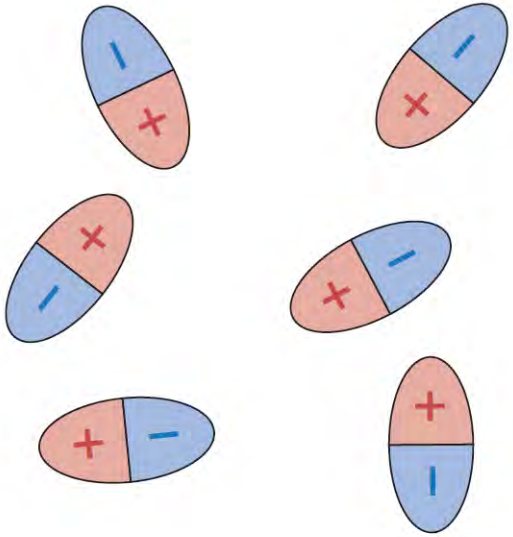
无外场时



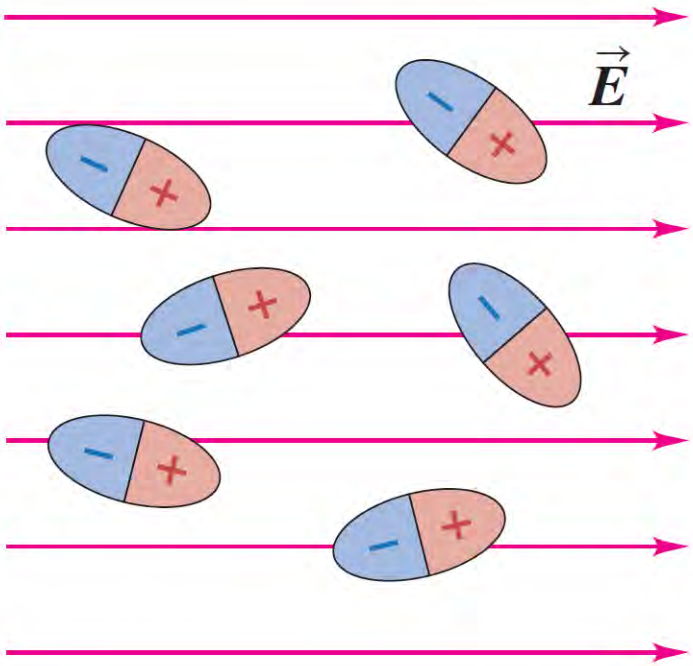
有外场时

4. 有极分子的极化机制

- 无电场时，介质中分子电偶极矩的总和为零。
- 有电场时，分子电偶极矩大体沿电场方向排列；外场越强，排列越整齐。
- 介质极化是由于在外场作用下分子固有电偶极矩方向的偏转造成的，故谓之**取向极化**。

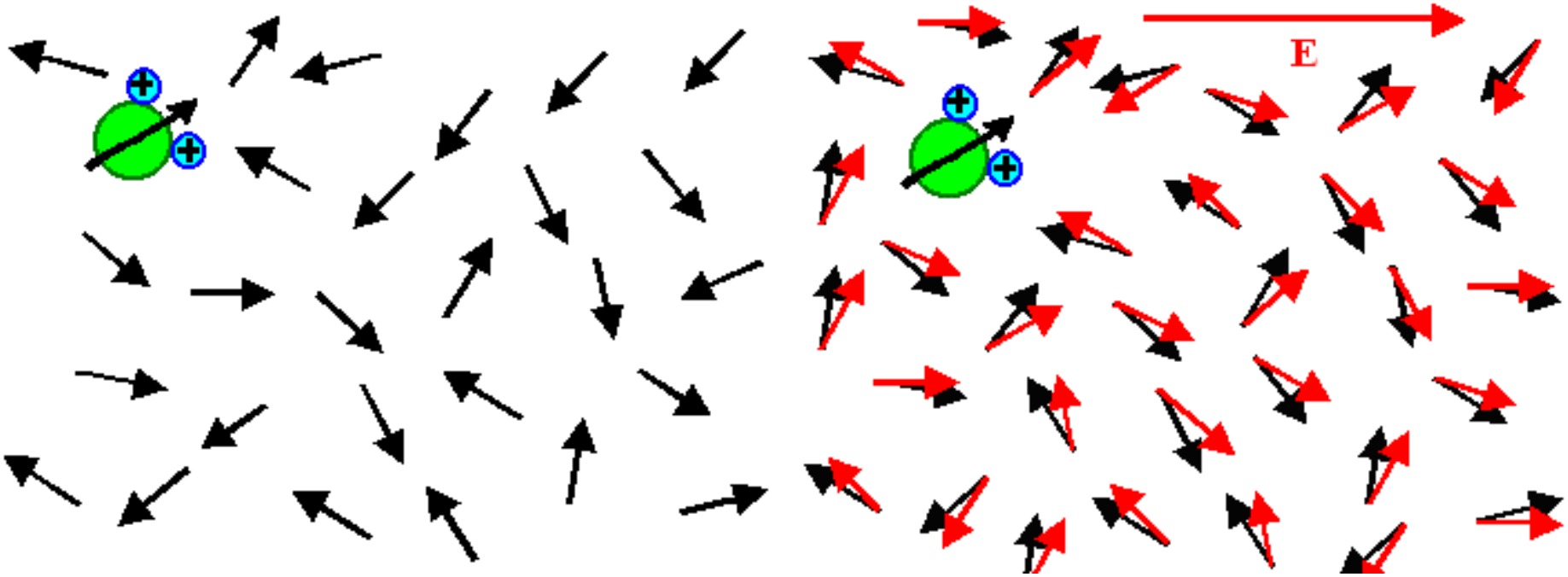


无外场时



有外场时

- 电介质极化的程度不仅与每个分子的电矩的大小有关，而且依赖于各分子电矩排列的整齐程度。



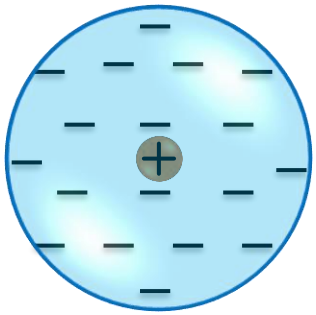
【例】氢原子的极化。

- 模型简化

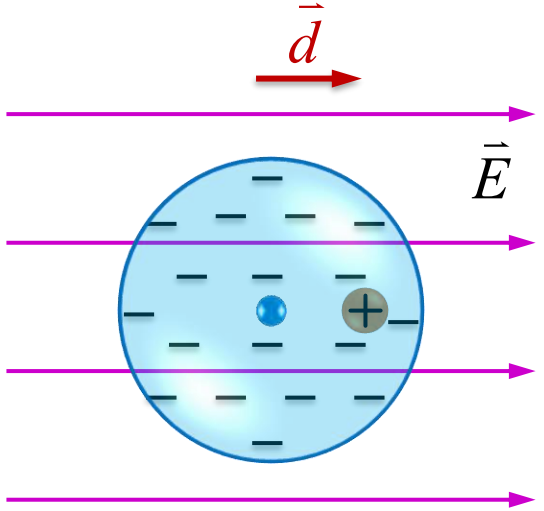
(1) 设负电荷 e 均匀分布于半径为 $a = 0.53$ Å 的球内

(2) 假设外场不太强

(3) 假设有外场时负电荷分布不变，仍均匀分布于球内



无外场时



有外场时

- 达到静电平衡时，核受力平衡，从而均匀分布于球内的负电荷在核处产生的电场与外场大小相同，方向相反：

$$E=\frac{ed}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \longrightarrow \boxed{p=ed=4\pi\varepsilon_0 a^3 E=\alpha\varepsilon_0 E}$$

其中

$$\alpha \triangleq 4\pi a^3 = 1.87\times10^{-30}\ \mathrm{m}^3$$

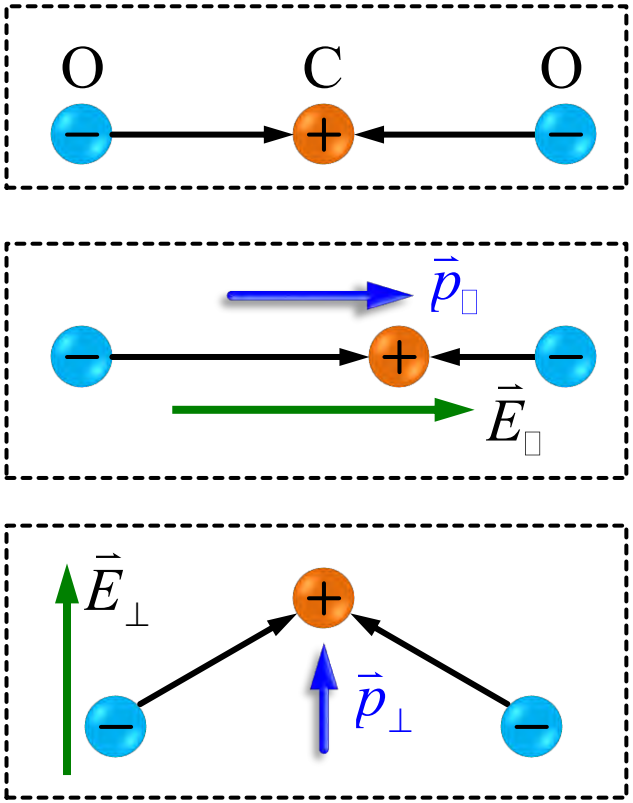
称为**氢原子的极化率**（实验测量值为 $8.38\times10^{-30}\ \mathrm{m}^3$）。

$$\begin{cases} E=10^6\ \ \mathrm{V/m} \longrightarrow p\sim10^{-35}\ \ \mathrm{C\cdot m}, \quad d/a\sim10^{-6} \\ d=0.1\ \text{埃} \longrightarrow p\sim10^{-30}\ \ \mathrm{C\cdot m}, \quad E\sim10^{11}\ \ \mathrm{V/m} \end{cases}$$

【例】CO_2 分子的极化（假设外场很弱）

- 同样大小的外电场，如果方向不同，诱导的电偶极矩不同

$$\begin{cases} \vec{p}_{\parallel} = \alpha_{\parallel}\varepsilon_0\vec{E}_{\parallel}, & \alpha_{\parallel} = 5.1\times10^{-29}\ \mathrm{m}^3 \\ \vec{p}_{\perp} = \alpha_{\perp}\varepsilon_0\vec{E}_{\perp}, & \alpha_{\perp} = 2.3\times10^{-29}\ \mathrm{m}^3 \end{cases}$$

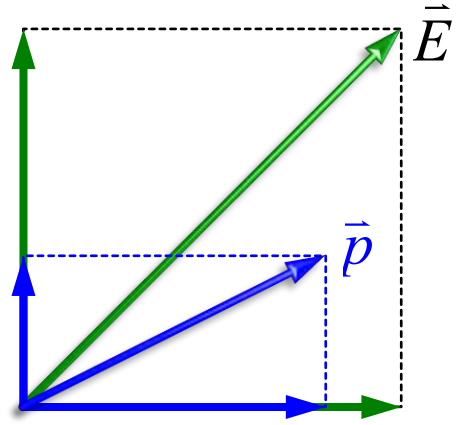


- 诱导电偶极矩通常并不与外电场平行

$$\vec{p} = \vec{p}_{\parallel} + \vec{p}_{\perp} = \alpha_{\parallel}\varepsilon_0\vec{E}_{\parallel} + \alpha_{\perp}\varepsilon_0\vec{E}_{\perp}$$

- 对于一般的分子，在外电场较弱时，诱导电偶极矩与外电场呈线性关系

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$



5. 几点说明

- 即使是有极分子组成的电介质，在电场作用下，分子也能出现诱导电矩，不过一般来说，其效应比位移极化弱很多。

无极分子可视为**似弹性电偶极子**；

有极分子可视为**似刚性电偶极子**。

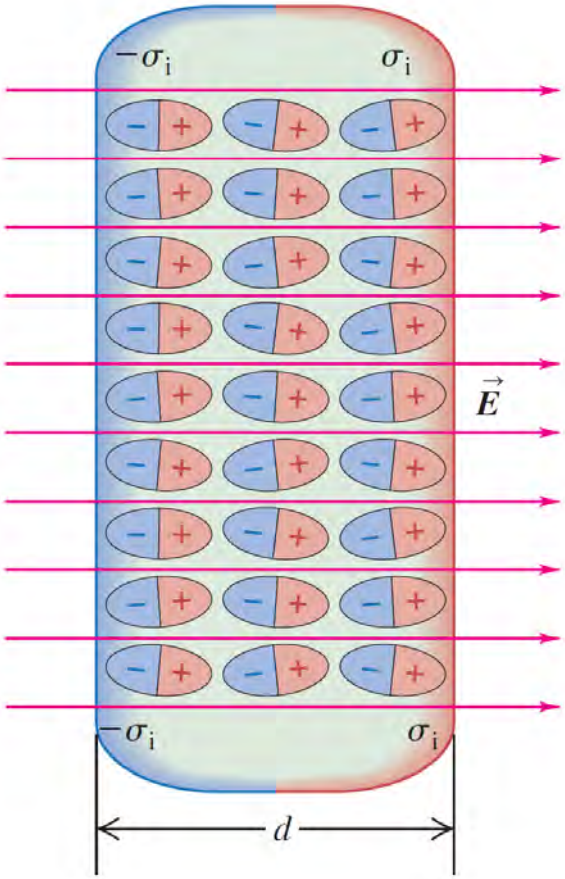
- 有些电介质是离子晶体离子晶体在电场作用下，正负离子将发生位移从而使介质极化，这种极化称为**离子位移极化**。

- 电介质极化的实际过程是相当复杂的，而且原子或分子系统是一个量子力学系统，只有用量子力学，才能够对原子系统作出更为准确的描述。

三、电极化强度

1. 电场中的电介质

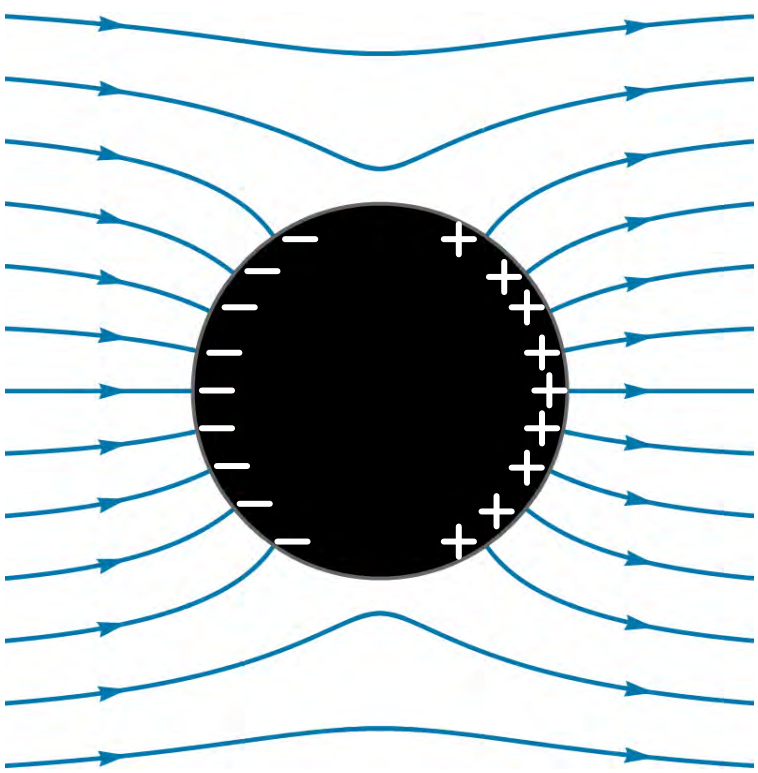
- 处于外场中的电介质，它的原子或分子因受到外电场作用发生位移极化或取向极化，产生附加电场，附加电场又会对原子或分子中的电荷产生作用，进一步改变极化的程度，这种相互作用、相互影响直到达到静电平衡为止。

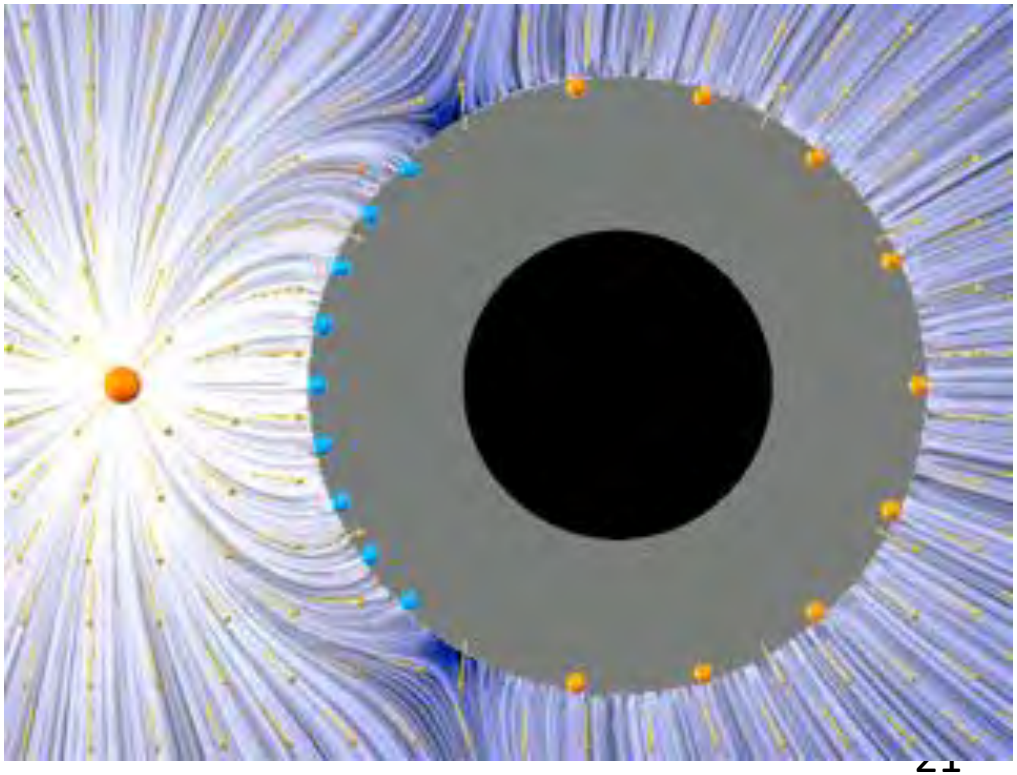


- 达到静电平衡时已经极化了的电介质等效于大量大体上沿着电场方向排列电偶极子的集合。
- 电介质极化的程度不仅与每个分子的电矩的大小有关，而且依赖于各分子电矩排列的整齐程度。

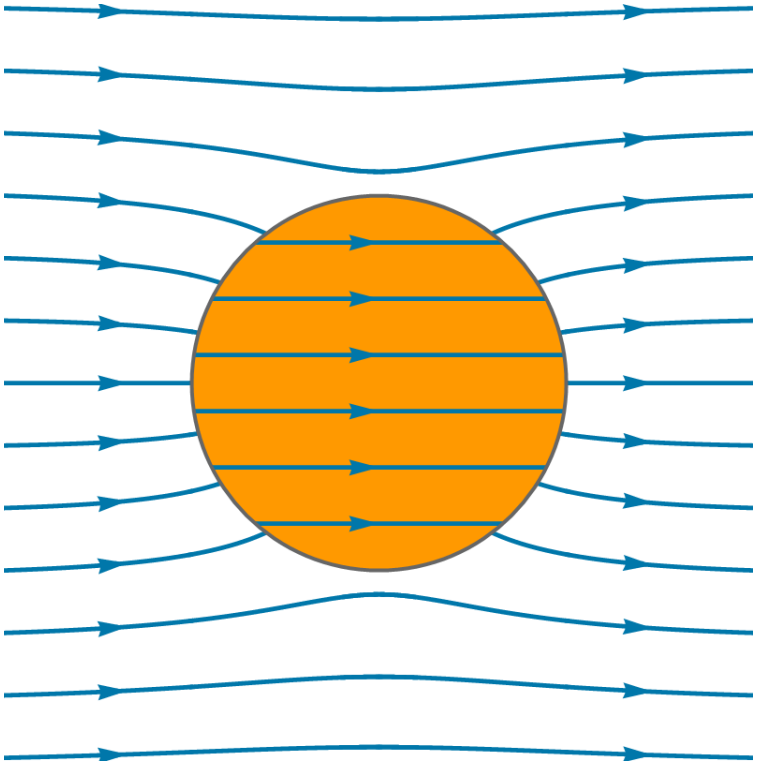
电场中的导体与电介质比较

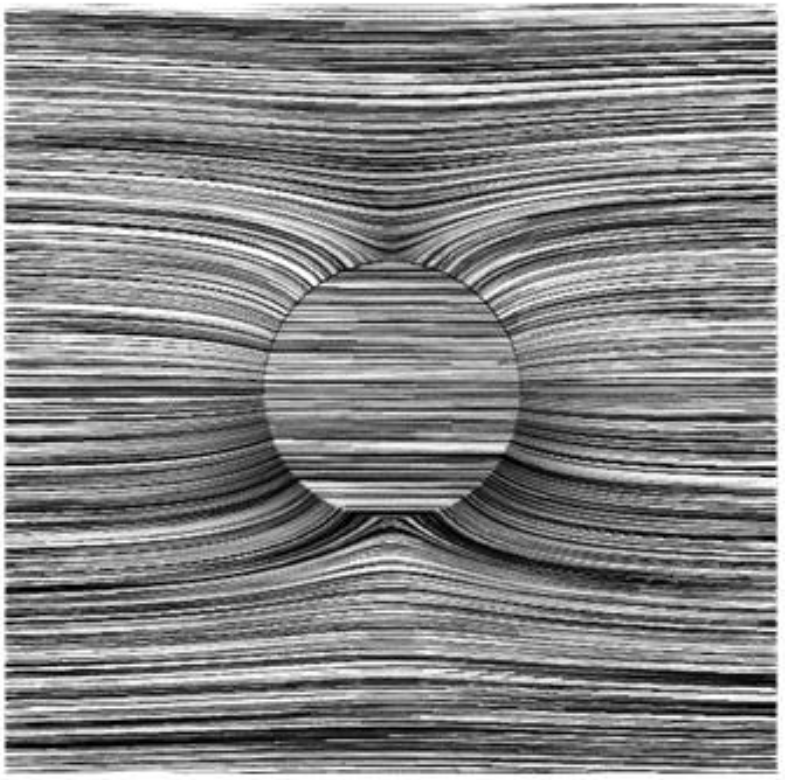
- **导体：**内部有大量可自由移动电荷（载流子）
- 外电场诱导自由电荷重新分布，在导体表面形成宏观的感应电荷分布。达到静电平衡时，感应电荷激发的电场在导体内部完全抵消外场。





- **电介质：**所有电荷束缚于原子/分子，不能自由移动。
- 外电场诱导出分子电矩或使分子固有电矩定向排列，电荷的这种微观运动在电介质表面和/或内部形成宏观的极化电荷分布。达到静电平衡时，极化电荷激发的电场在电介质内部部分抵消外场。





- 极化产生的电荷起源于原子或分子的极化，因而总是牢固地束缚在介质上，它与导体上的自由电荷不同，既不可能从介质的一处转移到另一处，也不可能从一个物体传递给另一个物体，若介质与导体接触，极化电荷亦不会与导体上的自由电荷相中和，因此往往称**极化电荷**为**束缚电荷**。
- 通常，用摩擦等方法使绝缘体带电，绝缘体上的电荷也被束缚在绝缘体内，因而也是一种束缚电荷，但与极化电荷不同，它并非起源于极化，因而可能与自由电荷中和，实际上它是一种**束缚在绝缘体上的自由电荷**。
- 极化电荷是在外场作用下产生的，没有外场作用就不会有极化电荷（某些驻电体除外）。

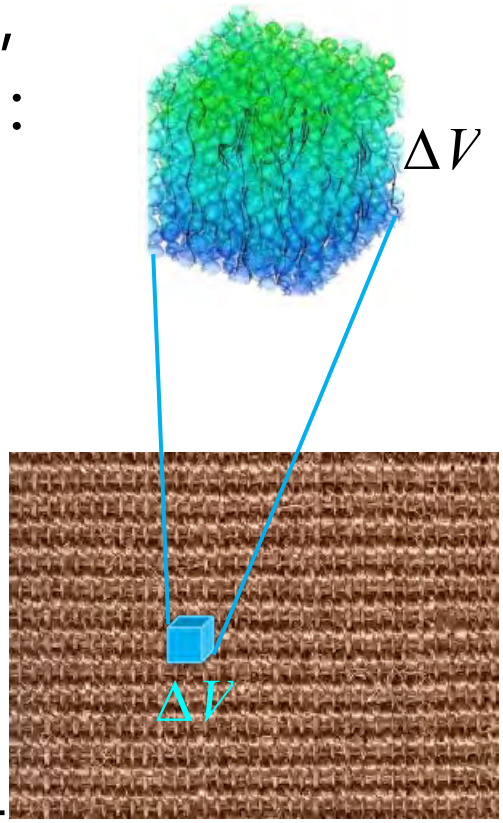
电荷是否为束缚（极化）电荷是由其产生的机制定义的。

2. 极化强度（the density of polarization ）

为描写电介质的极化状态，引入**电极化强度** $\boldsymbol{P}$，
它定义为介质内单位体积中分子电矩的矢量和：

$$\vec{P} \triangleq \frac{\sum \vec{p}_{分子}}{\Delta V}$$

【注】无介质处， $\boldsymbol{P}=0$。



- 单位： $\mathbf{C\cdot m^{-2}}$ （与面电荷密度相同）
- $\boldsymbol{P}$ 反映分子电偶极矩大小及其有序程度。
- 在宏观小、微观大区域 ΔV 内，每个分子可视为具有相同的（等效或平均）电偶极矩

$$\vec{P} = n\vec{p}_0 = nq\vec{l} \quad \text{where } n \triangleq \frac{\Delta N}{\Delta V}$$

3. 极化电荷

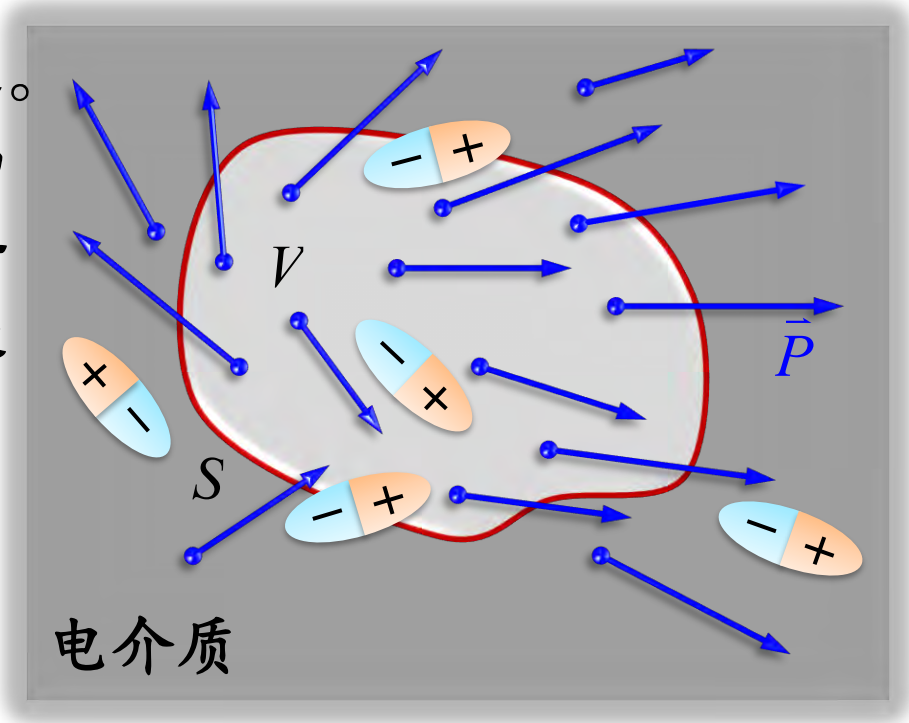
$P(r)$ 能描述束缚电荷的宏观分布？

只要由 $P(r)$ 能确定任一区域内有多少束缚电荷。

在介质内任意划出一个以闭曲面 S 为边界的区域 V，V 内有多少束缚电荷能描述束缚电荷的宏观分布？

分子电偶极子整体电中性。如果某个分子完全在 V 的内部或外部，那么该分子对 V 的束缚电荷代数和没有贡献。

只有跨越边界 S 的分子才对 V 内的束缚电荷有贡献。



如何确定有多少分子电偶极子跨出边界 S

只要知道由每个面元 dS 处跨出去的电偶极子的个数。

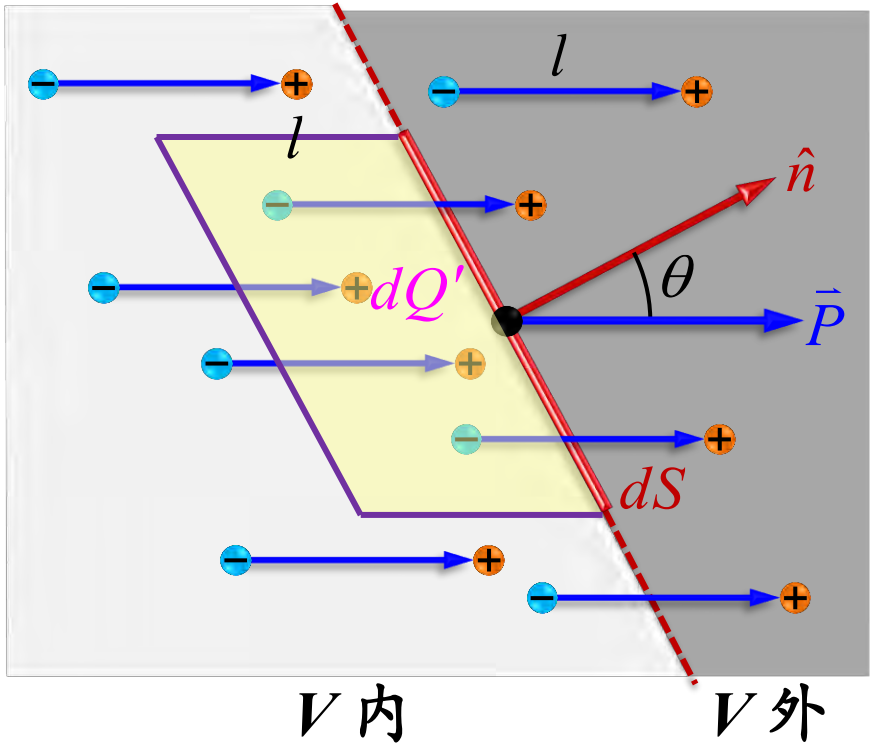
有多少电偶极子由面元 dS 跨出去

位于底为 dS、高为 $l\left|\cos\theta\right|$ 的柱形区域 dV 内的分子数。

由于跨越边界 dS 而留在区域 V 内的束缚电荷电量的绝对值为

$$\left|dQ'\right| = nqdV = nqldS\left|\cos\theta\right|$$

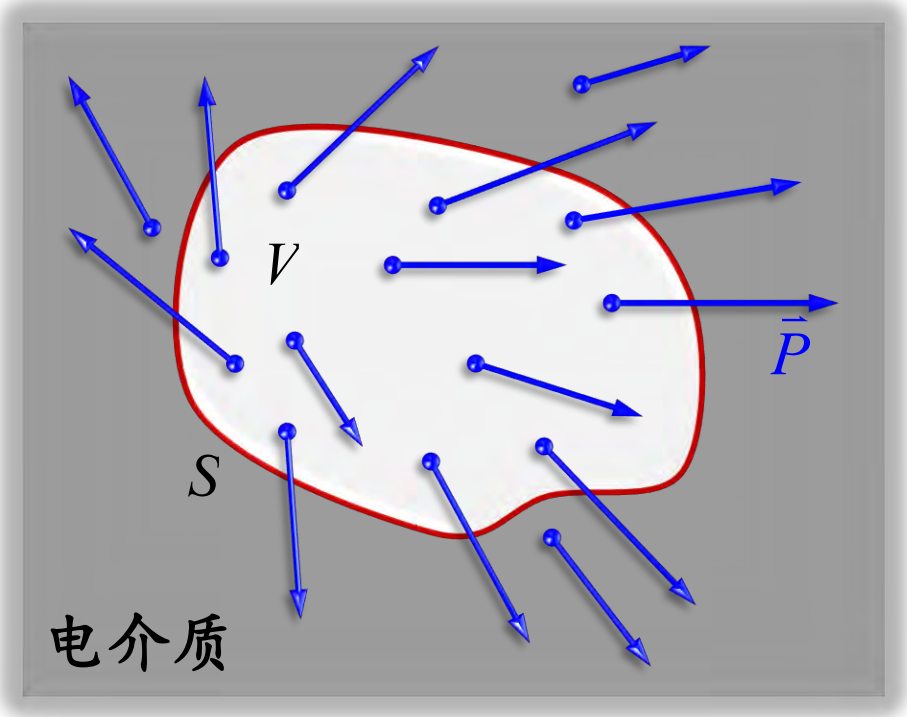
$$\rightarrow \left|dQ'\right| = PdS\left|\cos\theta\right|$$



如何确定束缚电荷的正负？

$$\begin{cases} \cos\theta > 0 \longrightarrow dQ' < 0 \\ \cos\theta < 0 \longrightarrow dQ' > 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow dQ' = -\vec{P}\cdot d\vec{S}$$



任一区域 V 内所包围的束缚电荷（即极化电荷）的净电量等于穿过区域边界 $S=\partial V$ 的极化强度通量的负值：

$$Q' = -\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

电极化强度 P 可以定量描述介质中宏观的束缚电荷分布。

4. 极化电荷的体密度

由数学上的高斯定理，可得极化电荷的体密度与极化强度的关系为：

$$\rho' = -\nabla \cdot \vec{P}$$

在直角坐标系下，有

$$\rho' = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right)$$

负极化电荷是电极化强度矢量场的源头

- 如果电介质内各点的极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$ 的大小和方向都相同，则称介质是**均匀极化**的。

【注】对于均匀极化的介质，

其内部无极化电荷分布；

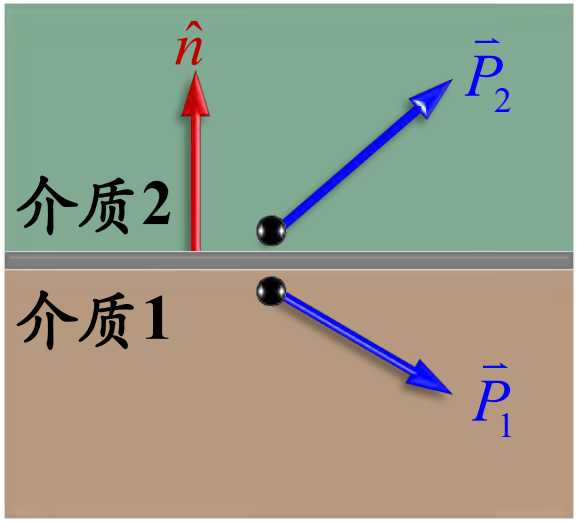
极化电荷只能以面电荷形式出现在介质表面。

- 极化体电荷只**可能**出现在极化非均匀处。

【注】介质内没有极化体电荷，并不必然意味着 $\boldsymbol{P}$ 为恒量。

5. 极化电荷的面密度

在介质与介质交界面或介质与真空的交界面处，
通常会出现面分布的极化电荷。



穿过扁平盒子的通量为

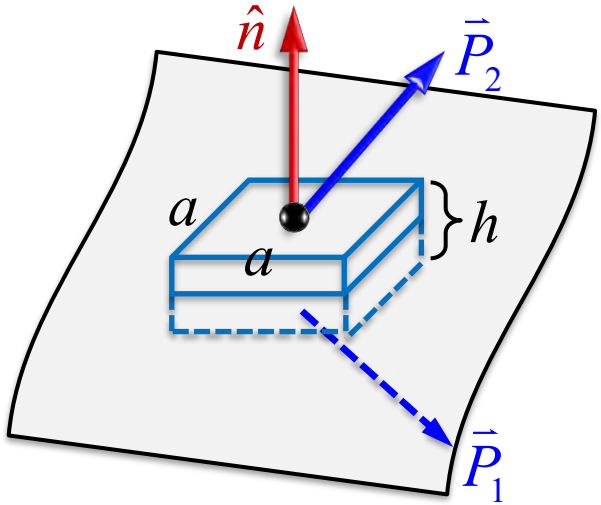
$$\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_{上}} \vec{P}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_{下}} \vec{P}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_{侧}} \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

$$\approx \vec{P}_2\cdot\left(a^2\hat{n}\right) + \vec{P}_1\cdot\left(-a^2\hat{n}\right) + \left(Pah\right)$$

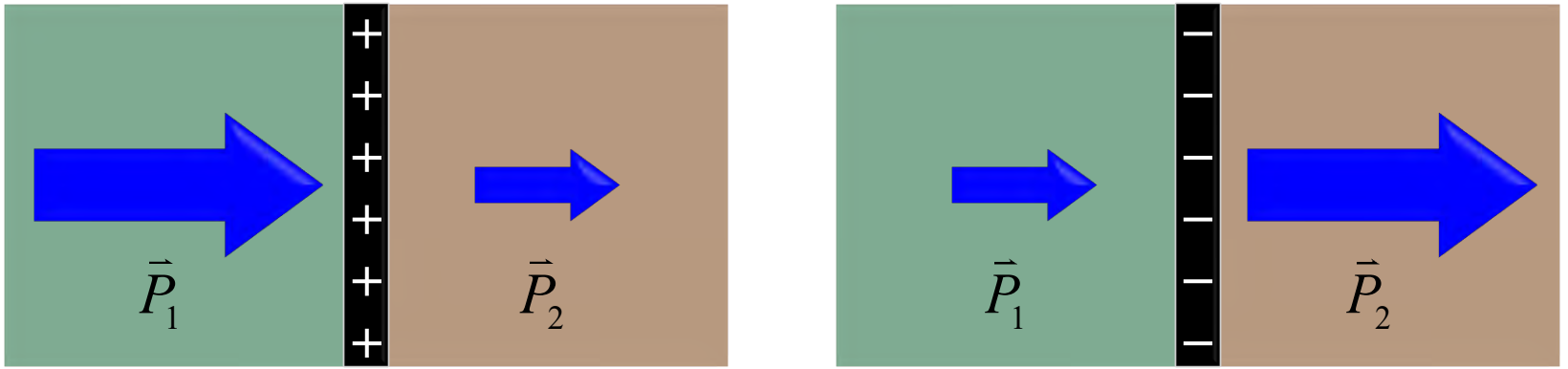
盒内的极化电荷为

$$Q' \approx \sigma' a^2 + \left(\rho' a^2 h\right)$$

$$\rightarrow \quad \sigma' = -\hat{n}\cdot\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) = P_{1n} - P_{2n}$$



- 若 $P_{1n} > P_{2n}$，则 $\sigma' > 0$，即交界面上有正的极化电荷。
- 若 $P_{1n} < P_{2n}$，则 $\sigma' < 0$，即交界面上有负的极化电荷。
- 若 $P_{1n} = P_{2n}$，则 $\sigma' = 0$，即法向分量在交界面处连续时，交界面上无极化电荷。

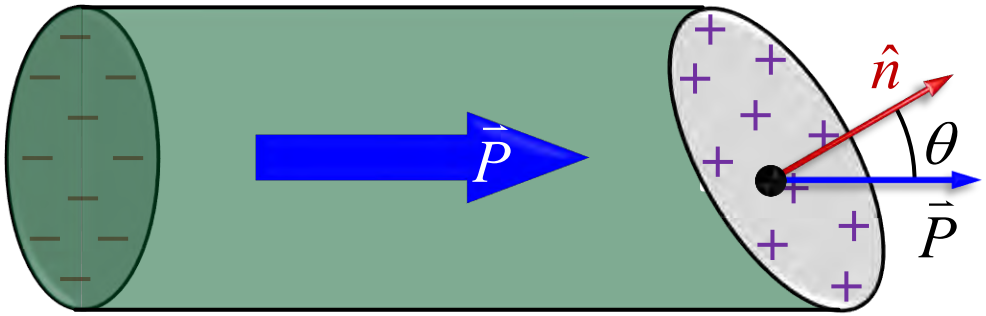


极化强度相当于一个大电矩，其头部为正电尾部为负电。

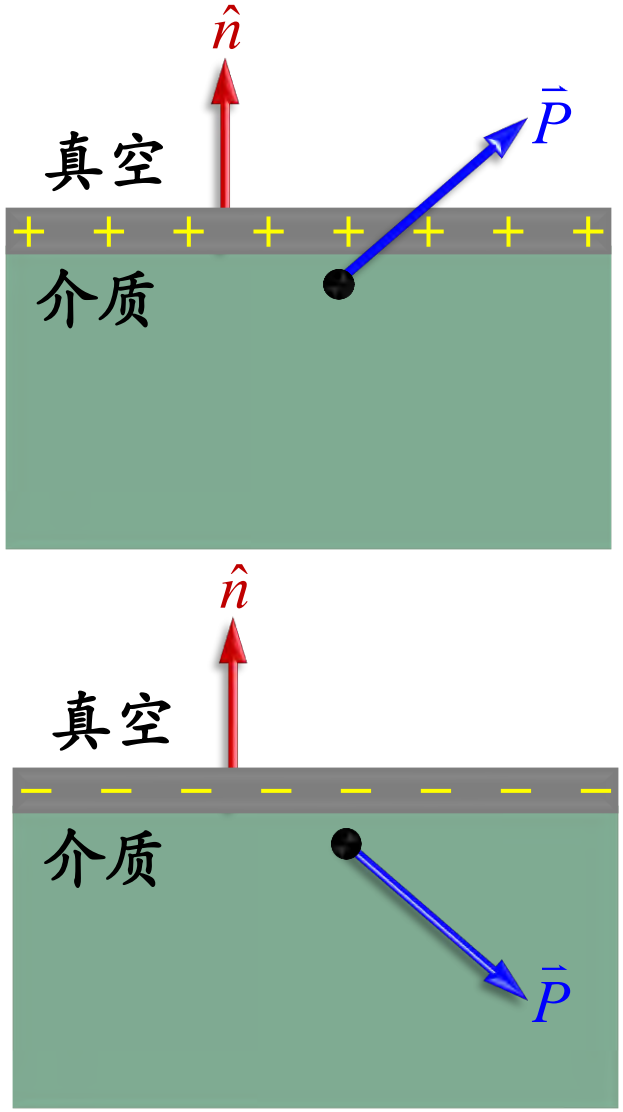
- 如果第二种介质为真空，则 $\boldsymbol{P}_2 = 0$，令 $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}$，得到

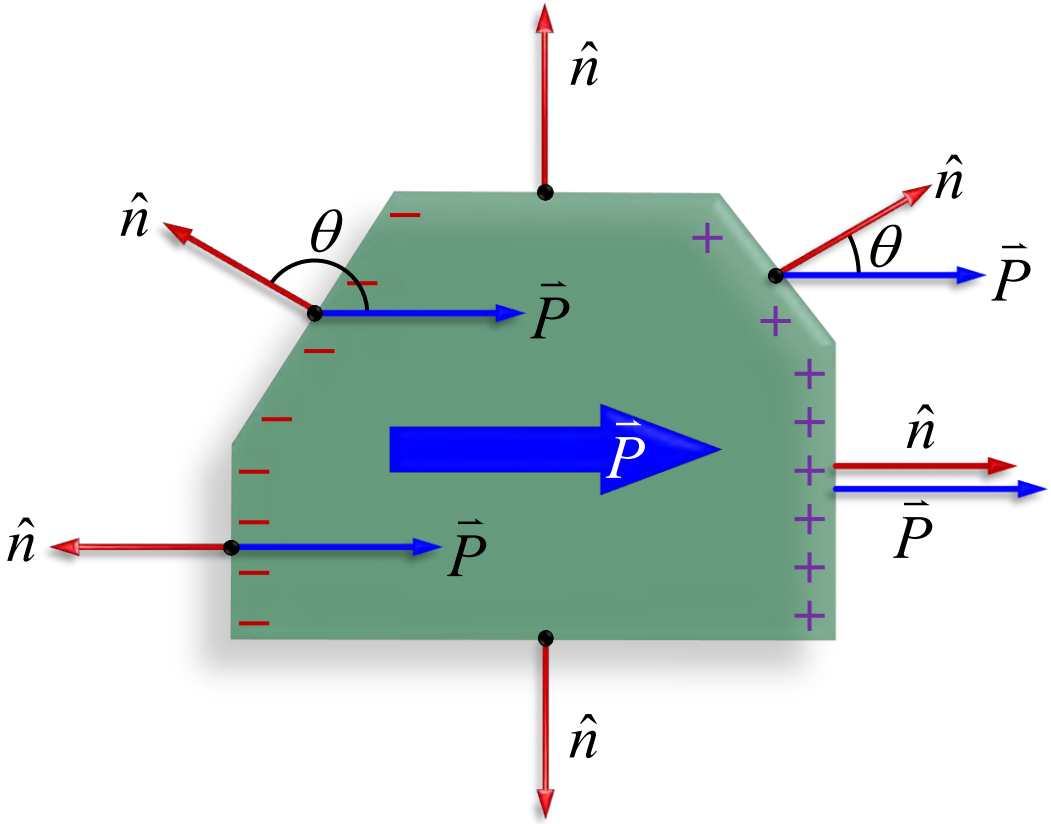
$$\sigma' = \hat{n} \cdot \vec{P} = P_n$$

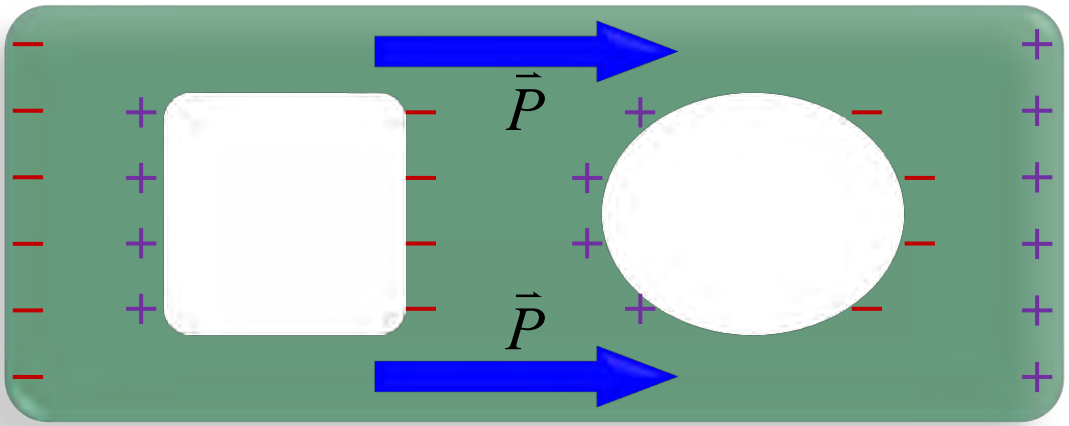
其中，$\boldsymbol{n}$ 指向介质外部。



$\sigma' = -P$　　$\sigma' = +P\cos\theta$



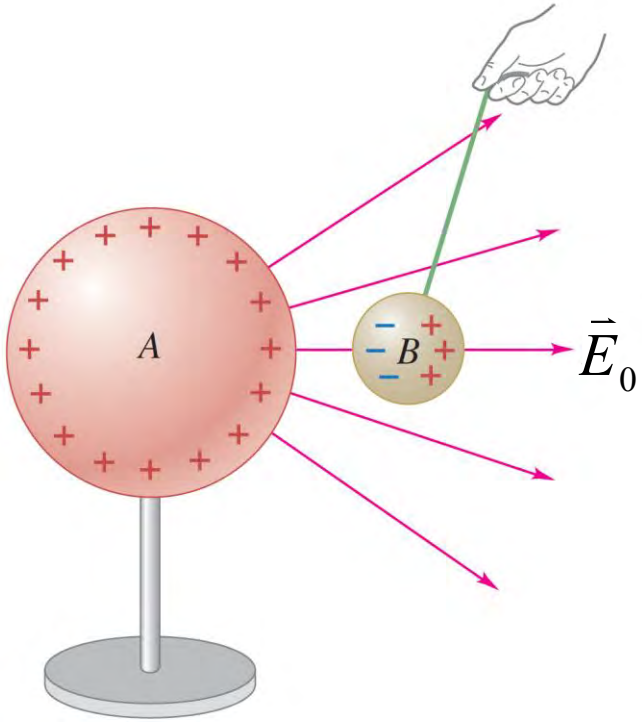

$\hat{n}$
$\hat{n}$
θ
$\vec{P}$
$\hat{n}$
θ
$\vec{P}$
$\vec{P}$
$\hat{n}$
$\vec{P}$
$\hat{n}$
$\vec{P}$
$\hat{n}$


$\vec{P}$
$\vec{P}$

6. 退极化场

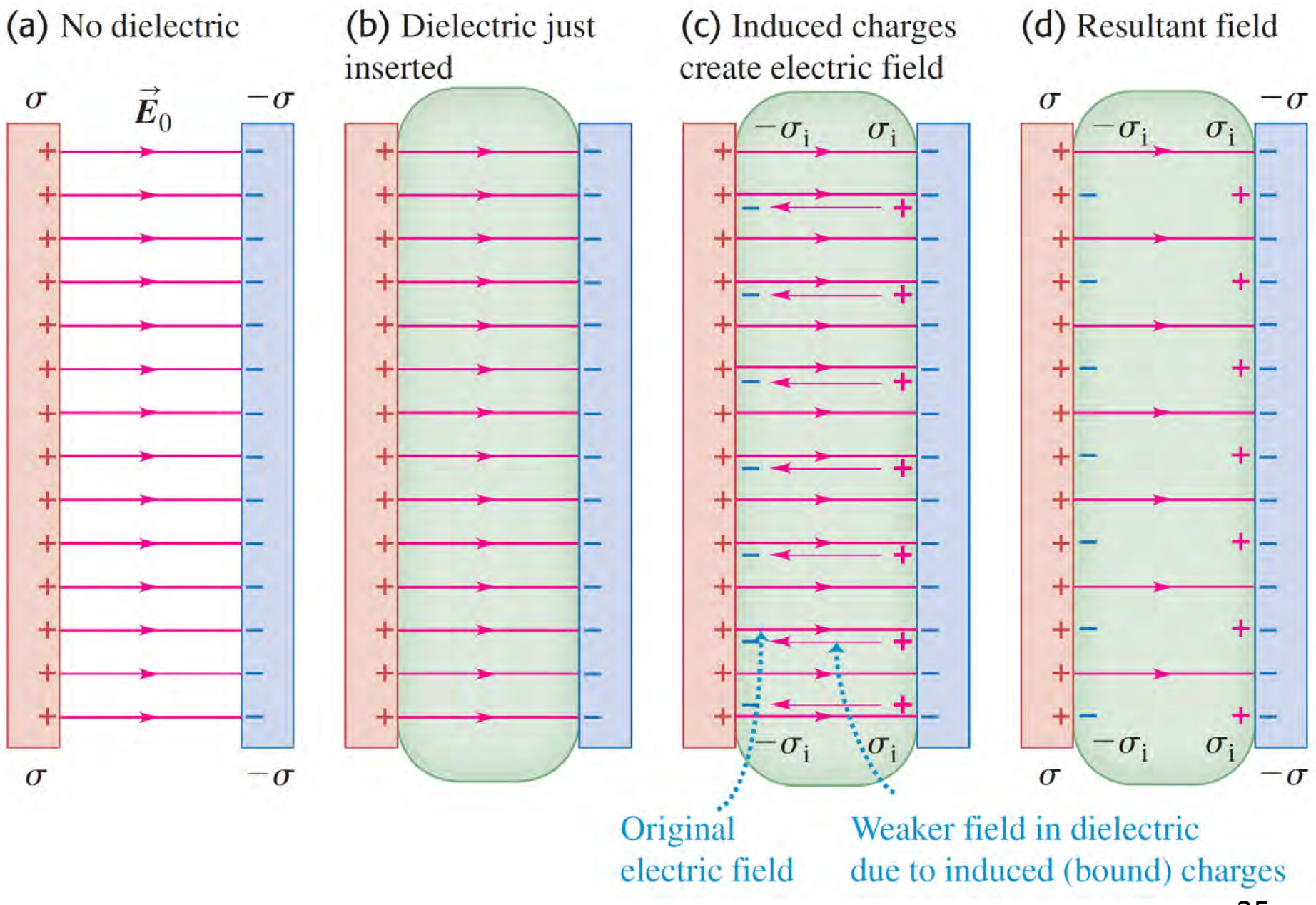
电介质在外电场 E_0 中极化，出现极化电荷，极化电荷将产生电场 E'，空间任一点的电场由两者叠加而成：

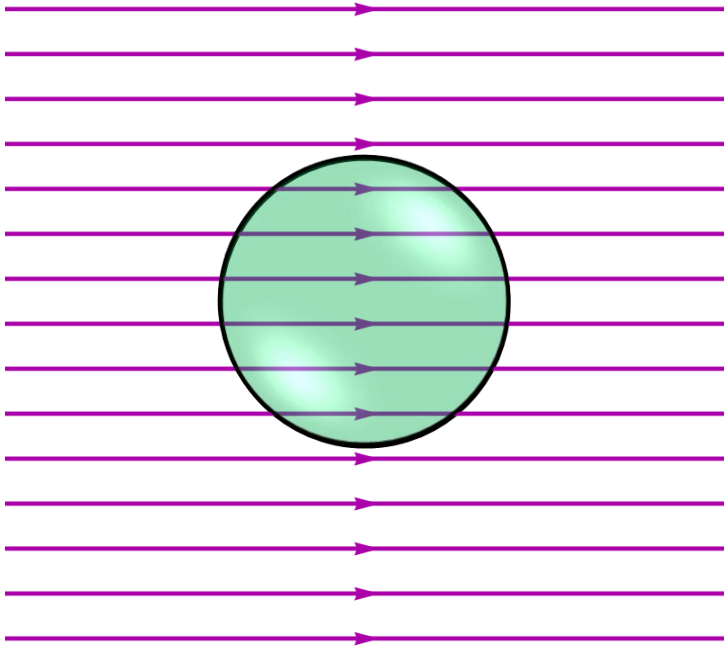
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

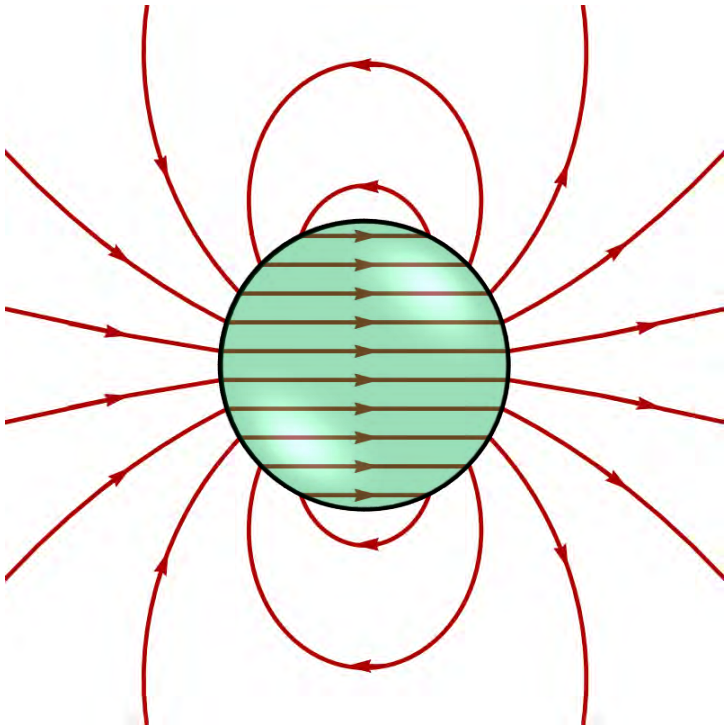


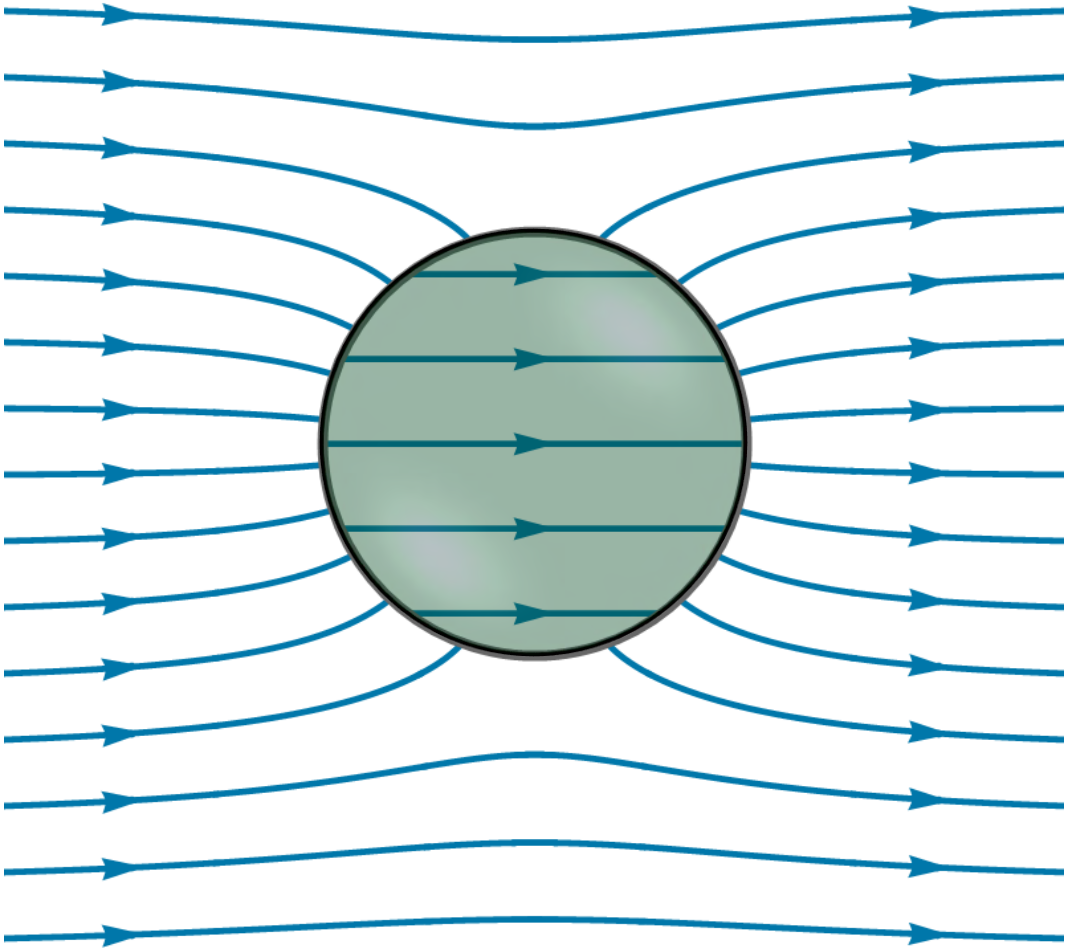
- 极化电荷在介质以外空间产生的电场很复杂。

- 在电介质内，极化电荷产生的电场总是与外场方向相反，故总电场随之减弱，极化强度亦减弱，故称**退极化场**。


(a) No dielectric
(b) Dielectric just inserted
(c) Induced charges create electric field
(d) Resultant field
$\vec{E}_0$
σ
$-\sigma$
$-\sigma_i$
σ_i
Original electric field
Weaker field in dielectric due to induced (bound) charges







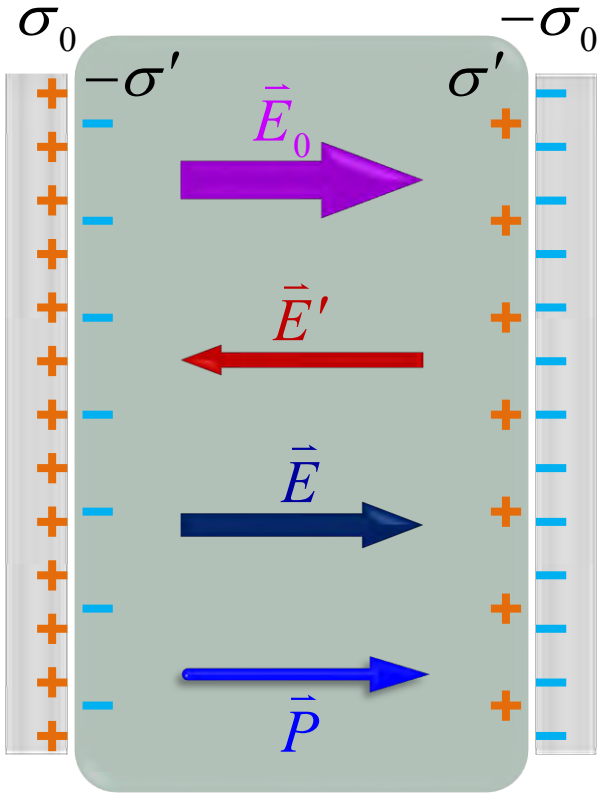
6. 介电常数

平行板电容器中的电介质：

$$\pm\sigma' = \pm P$$

$$\rightarrow E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$



实验表明：维持电量不变，在极板之间充满均匀电介质后，则电压变为原来的 $1/\varepsilon_r$ ，从而有：

$$V = \frac{V_0}{\varepsilon_r} \quad \rightarrow \quad \vec{E}_0 = \varepsilon_r \vec{E}$$

介质中的总电场为：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \varepsilon_r \vec{E} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\begin{cases} \chi & \text{介质的极化率} \\ \varepsilon_r = 1 + \chi & \text{相对介电常数} \\ \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r & \text{介电常数} \end{cases}$$

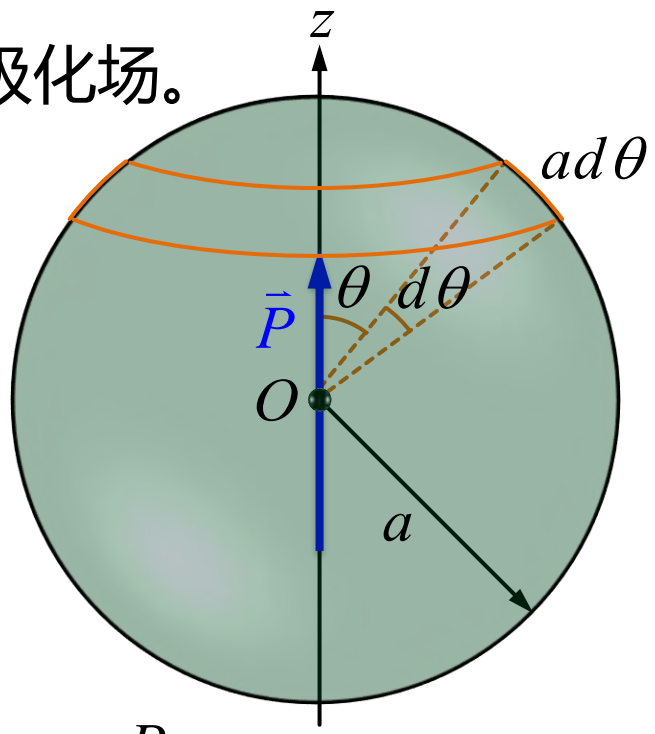
充满介质后的电容为：

$$C = \frac{Q_0}{V} = \varepsilon_r \frac{Q_0}{V_0} = \varepsilon_r C_0$$

【例】均匀极化电介质球在球心处的退极化场。

【解】球面上的极化电荷面密度为

$$\sigma' = \hat{r} \cdot \vec{P} = P\cos\theta$$



由于对称性，球心只有 z 分量，由于

$$dQ' = \sigma' dS = P\cos\theta \cdot a^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

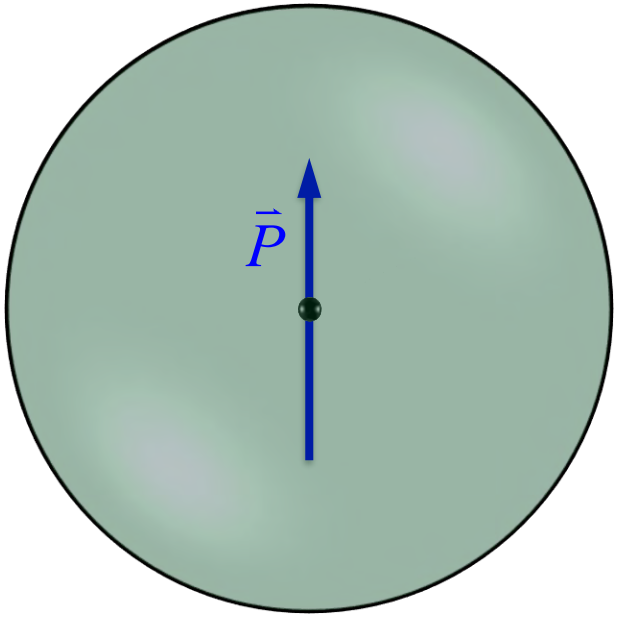
从而球心处的电场

$$dE'_z = dE'\cos(\pi - \theta) = -\frac{dQ'}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\cos\theta = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\cos^2\theta d\theta d\phi$$

$$\rightarrow \quad E'_z = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = -\frac{P}{3\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}}$$

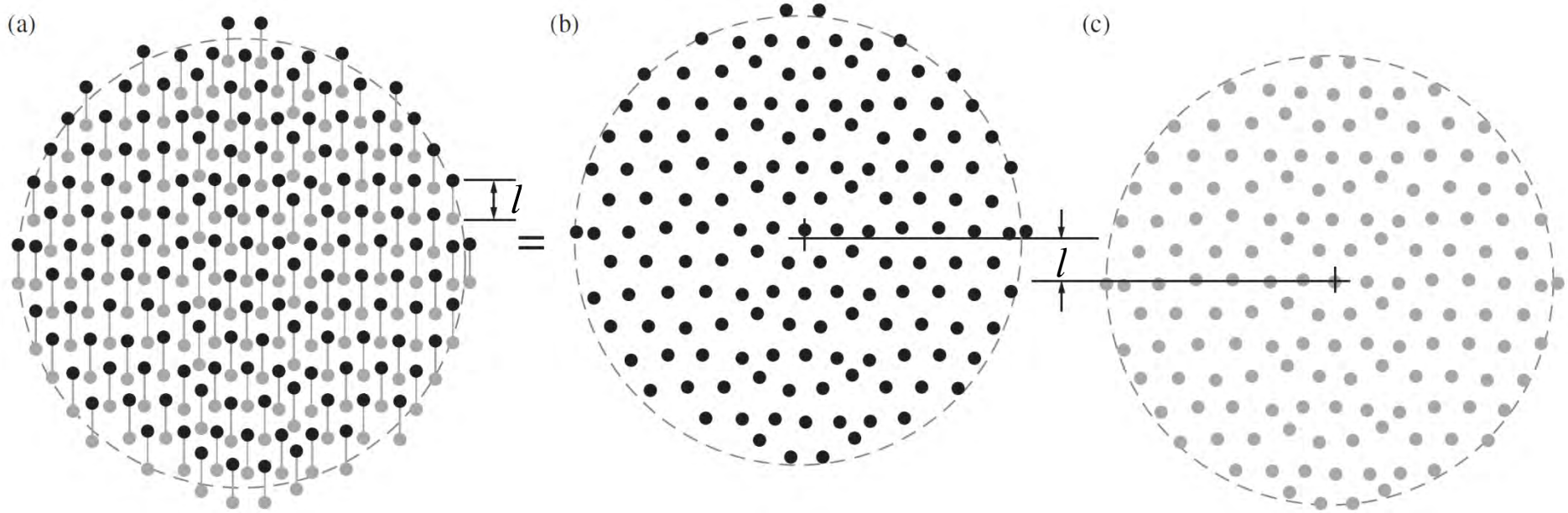
将极化介质球视为由电偶极子 $p_0 = ql$ 构成，单位体积的电偶极子数为 n。退极化场为两个球心错开一微小距离 l 的均匀带电球的电场的叠加，带电量分别为



$$\pm Q = \pm \frac{4\pi a^3}{3} nq$$

$$\vec{p} = \frac{4\pi a^3}{3}\vec{P} = \frac{4\pi a^3}{3} nq\vec{l} = Q\vec{l}$$

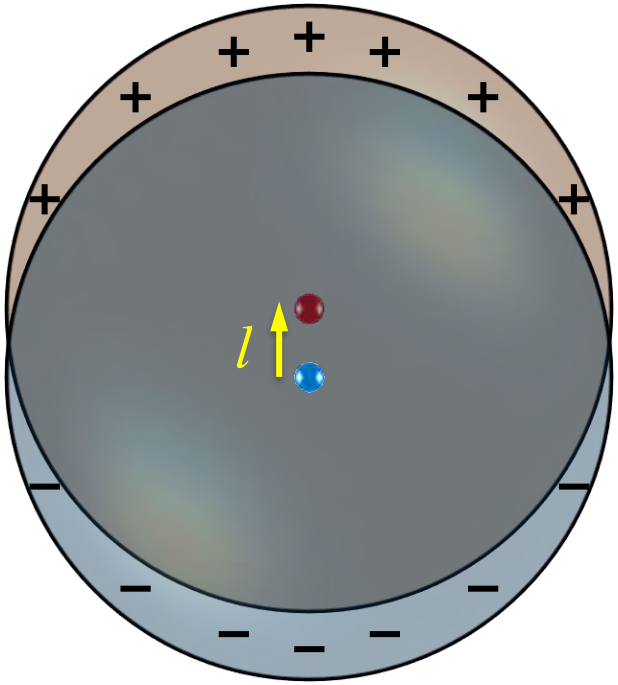
介质球的总电偶极矩



介质球内（两球重叠区域）的电场为

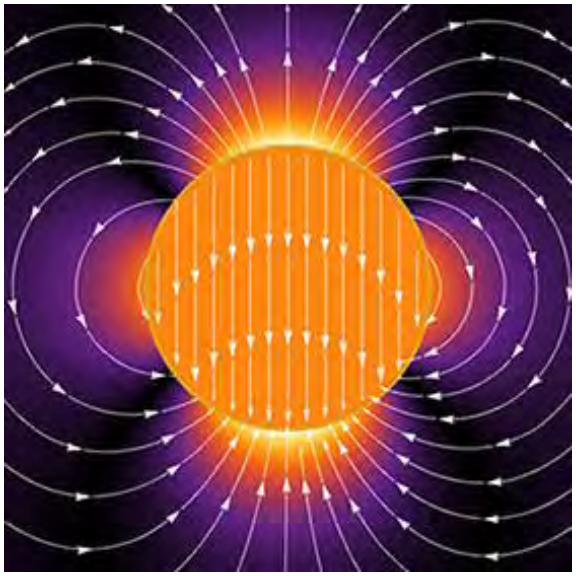
$$\vec{E}_1' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(\vec{r}_+ - \vec{r}_-\right) = -\frac{Q\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

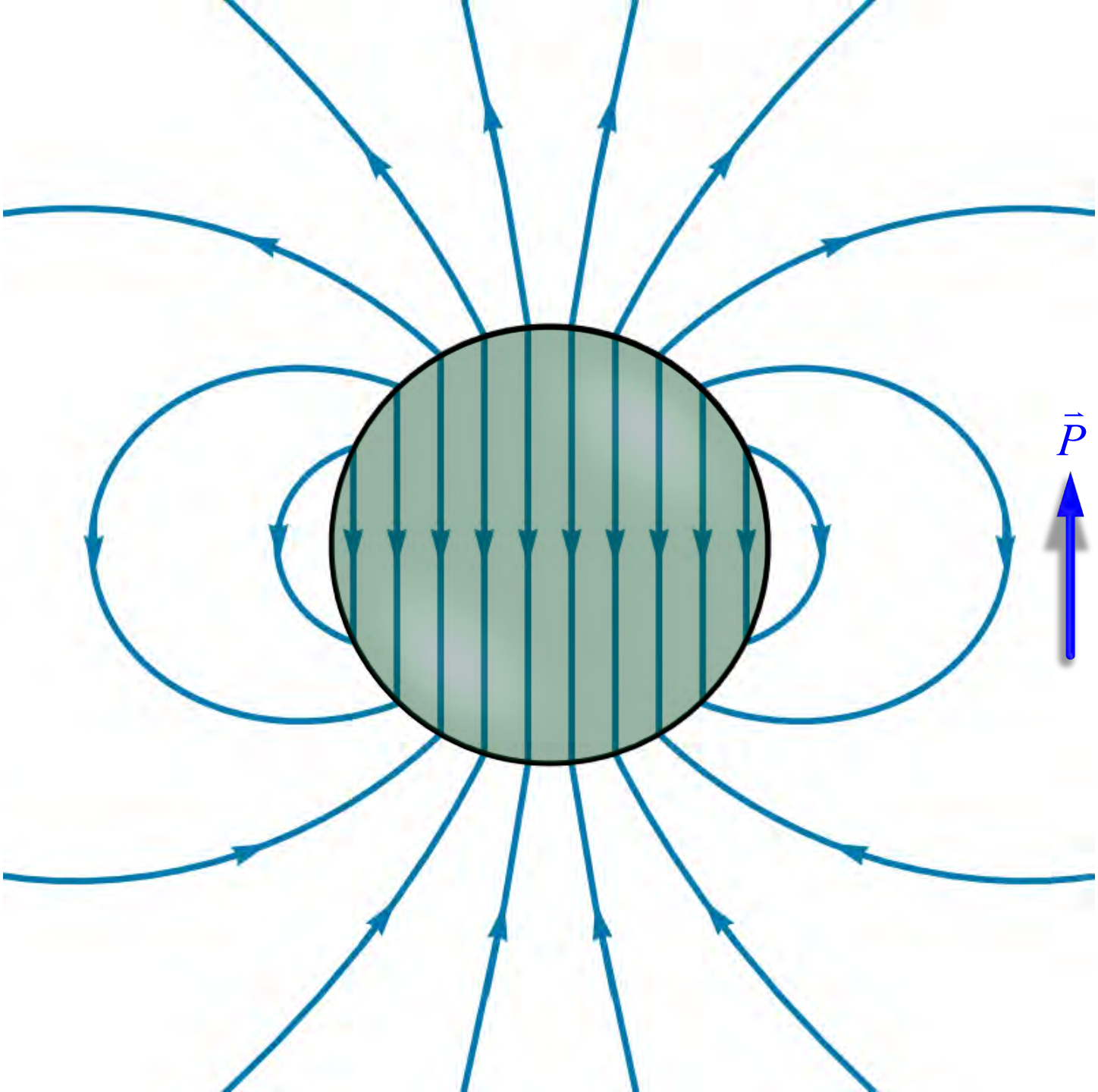
$$\rightarrow \quad \vec{E}_1' = -\frac{nq\vec{l}}{3\varepsilon_0} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}, \qquad (r < a)$$



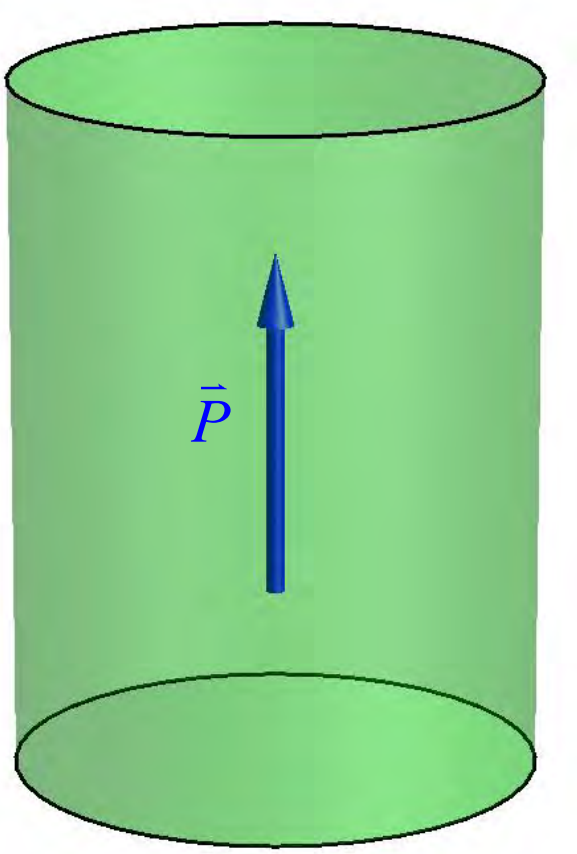
介质球外的电场为相距为 l 的一对点电荷 $\pm Q$ 产生的电场的叠加，即位于球心处的理想电偶极子 $\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{l}$ 所产生的电场：

$$\rightarrow \quad \vec{E}_2' = \frac{3\left(\vec{p}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \qquad (r > a)$$




$\vec{P}$

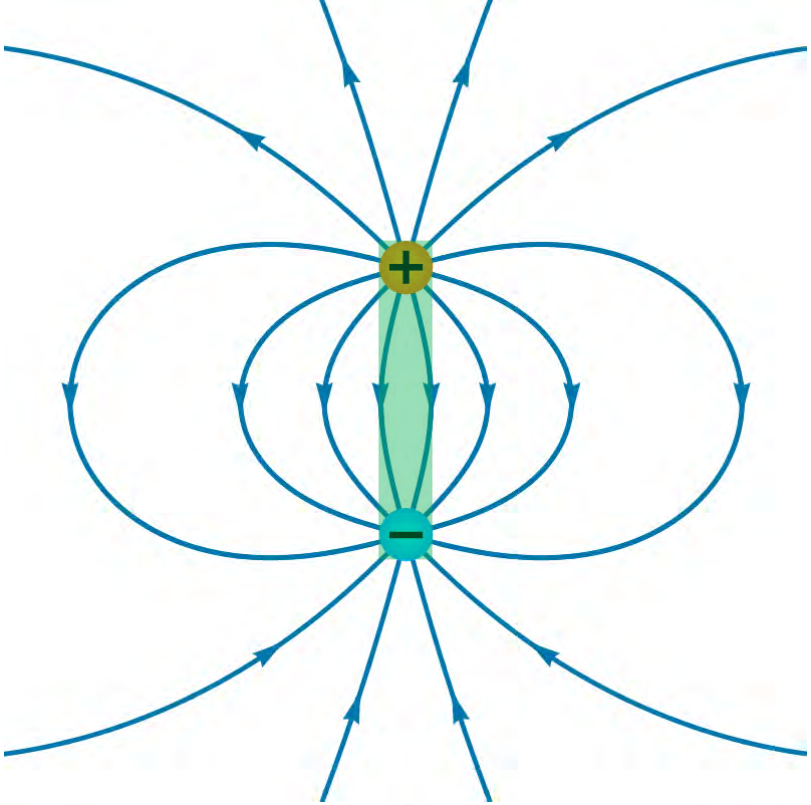
【例】半径 a、长 b 的电介质圆柱沿轴向均匀极化，极化强度为 P 。试求极化电荷分布以及退极化场。



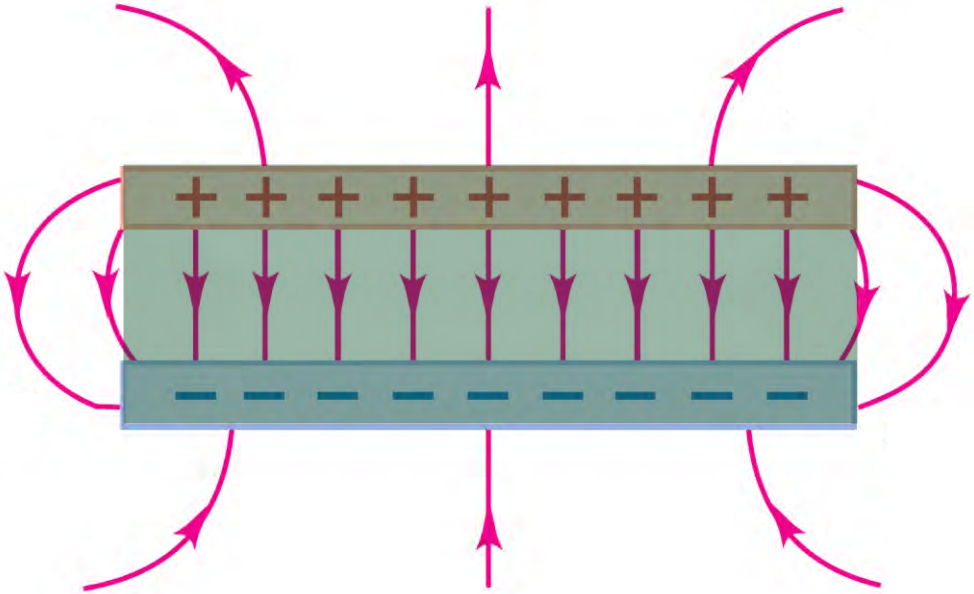
【解】极化电荷只以面密度形式存在于介质圆柱上下底面：

$$\sigma'_{上} = +P, \qquad \sigma'_{下} = -P$$

退极化场即是半径为a、相距为 b、面密度分别为 $+\boldsymbol{P}$ 和 $-\boldsymbol{P}$ 的两个均匀带电圆盘产生的场。



$a \ll b$



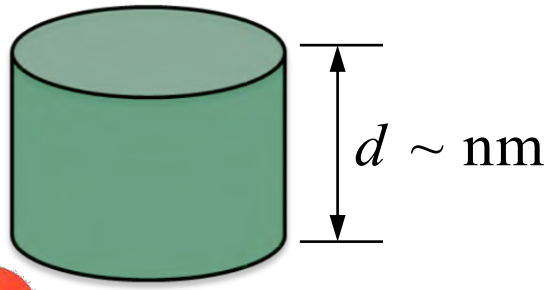
$a \gg b$

四、介质中的电场的含义

在**宏观电磁学**中：

- 介质中的**极化电荷**分布指的并非（真正的）微观电荷分布——电子、原子核等；而是**宏观束缚电荷分布**——包含大量微观电荷、宏观上又足够小的区域内的平均值。
- **介质中的电场**指的并非（真正的）微观电场 $E_{微观}$——极不均匀，而是**宏观电场**——微观电场在包含大量微观电荷、宏观上又足够小的区域内的平均值。

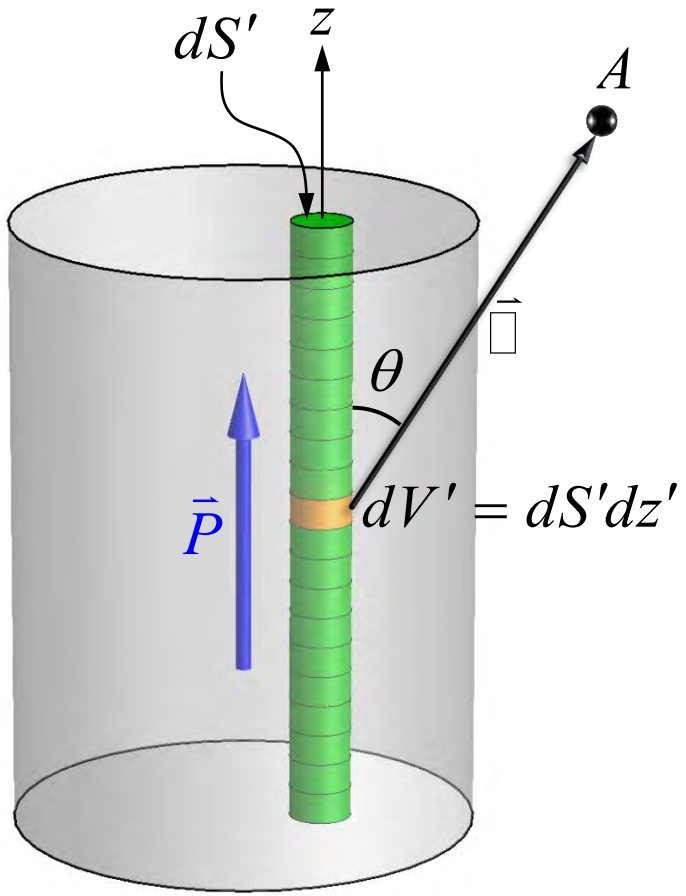
$$\vec{E} \triangleq \left\langle \vec{E}_{微观} \right\rangle = \frac{1}{V} \iiint_V \vec{E}_{微观} \, dV$$



为什么极化后的介质在介质内、外产生的电场等于极化电荷产生的电场

1. 均匀极化介质圆柱在介质外的电场

对于介质外一点 A，由于分子与 A 点的距离远大于分子尺度，因此 A 点的电势就是每一个分子电偶极子（可视为理想电偶极子）所贡献的电势之和。



- 分子电偶极子 $\boldsymbol{p}_0$ 在 A 点产生的电势

$$\varphi_p = \frac{\vec{p}_0 \cdot \hat{\mathrm{R}}}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}^2}$$

- dV' 内的电偶极子在 A 点产生的电势

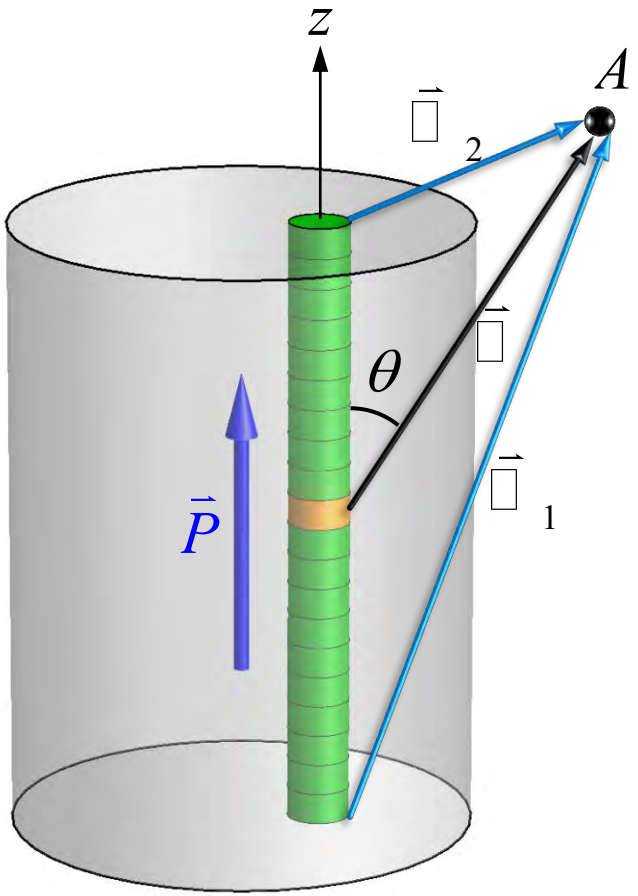
$$d\varphi = \frac{\vec{p}_0 \cdot \hat{\mathrm{R}}}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}^2}\left(n dV'\right) = \frac{\vec{P} \cdot \hat{\mathrm{R}}}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}^2} dV' = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta dS'dz'}{\mathrm{R}^2}$$

- 将介质圆柱划分为很多细长圆柱，某一细长圆柱在 A 点产生的电势为

$$d\varphi = \frac{PdS'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\cos\theta dz'}{\mathrm{R}^2}$$

$$= \frac{PdS'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathrm{R}_1}^{\mathrm{R}_2}\frac{-d\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2}$$

$$\rightarrow\quad d\varphi = \frac{PdS'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_2}-\frac{1}{\mathrm{R}_1}\right)$$



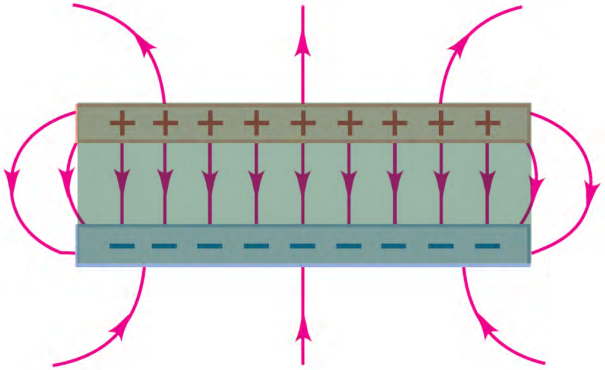
细长圆柱产生的电势是两个点电荷($\pm P\,\mathrm{d}S'$)的电势之和。

均匀极化圆柱在介质外的电场等于面电荷密度分别为 $+P$ 和 $-P$ 的两个带电圆盘产生的电场。

2. 均匀极化的介质圆柱在介质内的宏观电场

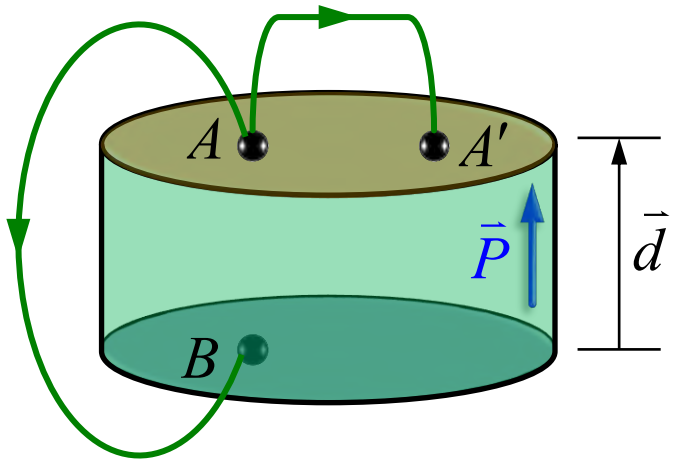
考察一个扁平的均匀极化的介质圆柱（高约几个nm）：

- 柱外的电场由面面度分别为 $+P$ 和 $-P$ 的两个带电圆盘产生，与面电荷密度为 $\pm P$ 的（真空）平行板电容器相同。



因而，沿着柱外的一条路径作线积分必然得到

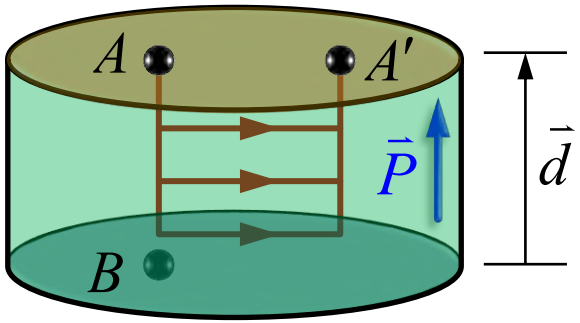
$$\begin{cases} V_{AA'} = \varphi_A - \varphi_{A'} = \int_A^{A'} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ V_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \dfrac{Pd}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

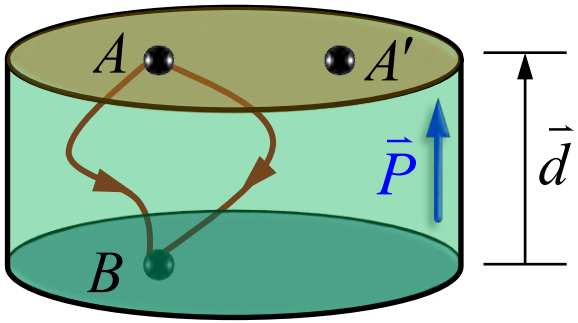


- 静电场是无旋场，沿着任何一条路径（无论介质内、外）积分必然给出相同的结果，所以

$$V_{AA'}=0=\int_{A}^{A'}\vec{E}_{\text{微观}}\cdot d\vec{l}$$

$$V_{AB}=\frac{Pd}{\varepsilon_0}=\int_{A}^{B}\vec{E}_{\text{微观}}\cdot d\vec{l}$$





因而，微观电场的平均值垂直于 ***P*** 的分量必然为零，且

$$V_{AB}=-\left\langle\vec{E}_{\text{微观}}\right\rangle\cdot\vec{d}=\frac{Pd}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad\vec{E}\triangleq\left\langle\vec{E}_{\text{微观}}\right\rangle=-\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

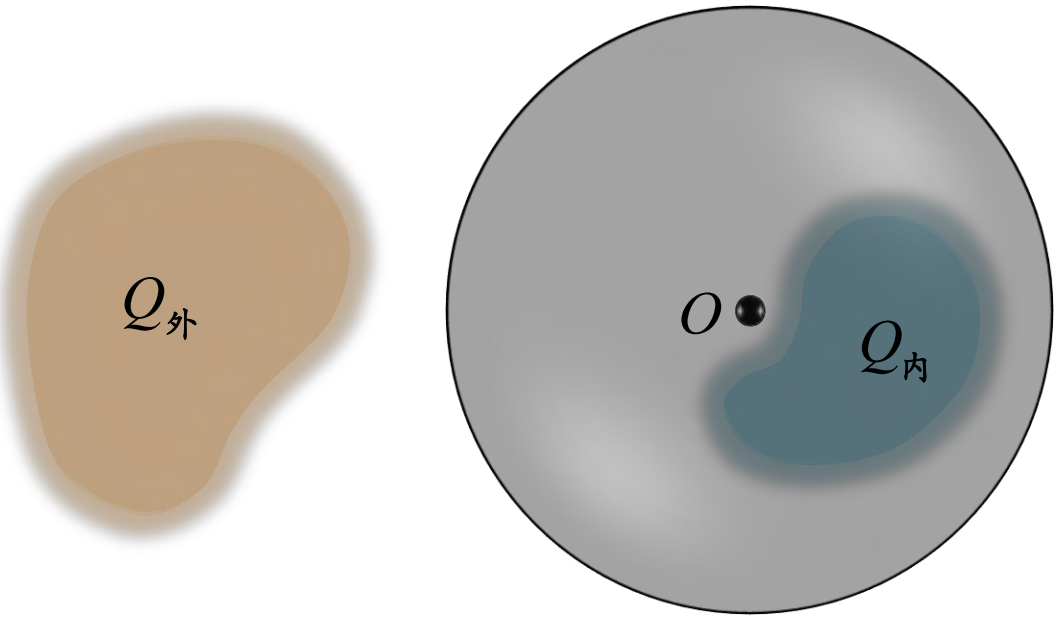
3. 再议介质内部的电场

任意电荷分布产生的电场在球体内的平均值等于以下两项之和：

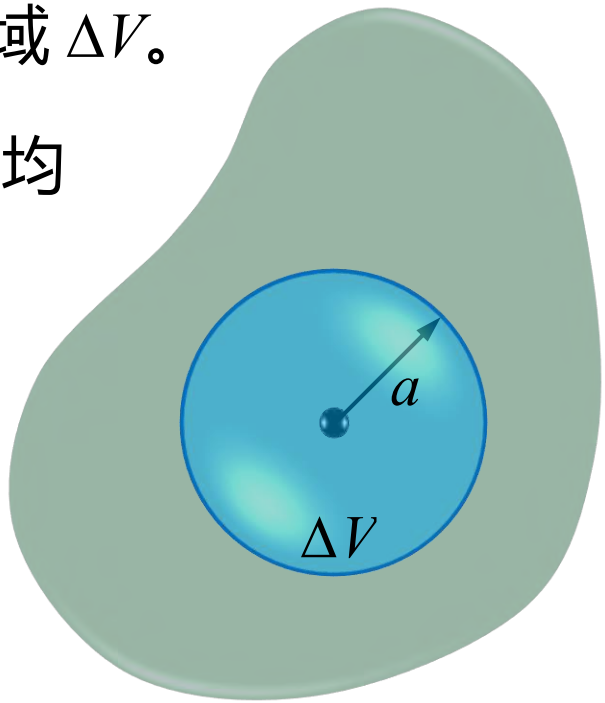
（1）球外电荷在球心处产生的电场；

（2）电偶极子 p 置于球面上与其相切处（赤道上）时在球心处产生的电场，其中 p 是球内电荷相对于球心的电偶极矩。

$$\langle \vec{E} \rangle_{r\le a} = \vec{E}_{外}(O) - \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}, \quad \vec{p} \triangleq \int_{r\le a} \vec{r}\,dq = \sum_{r\le a} q_k \vec{r}_k$$



考察介质内一个微观大、宏观小的球形区域 ΔV。



- ΔV 外部的电荷产生的电场在球内的平均值等于在球心处的电场。

  由于ΔV 外部的电荷与球心距离远大于分子尺度，因而该平均值也就等于宏观电荷分布在球心处产生的电场。

- ΔV 内部的总电偶极矩为 $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi a^3 \vec{P}$

  ΔV 内部的电荷产生的电场在球内的平均值 $-\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$

  即该平均值也等于球内的宏观束缚电荷分布在球心处产生的电场。

介质内、外的宏观电场

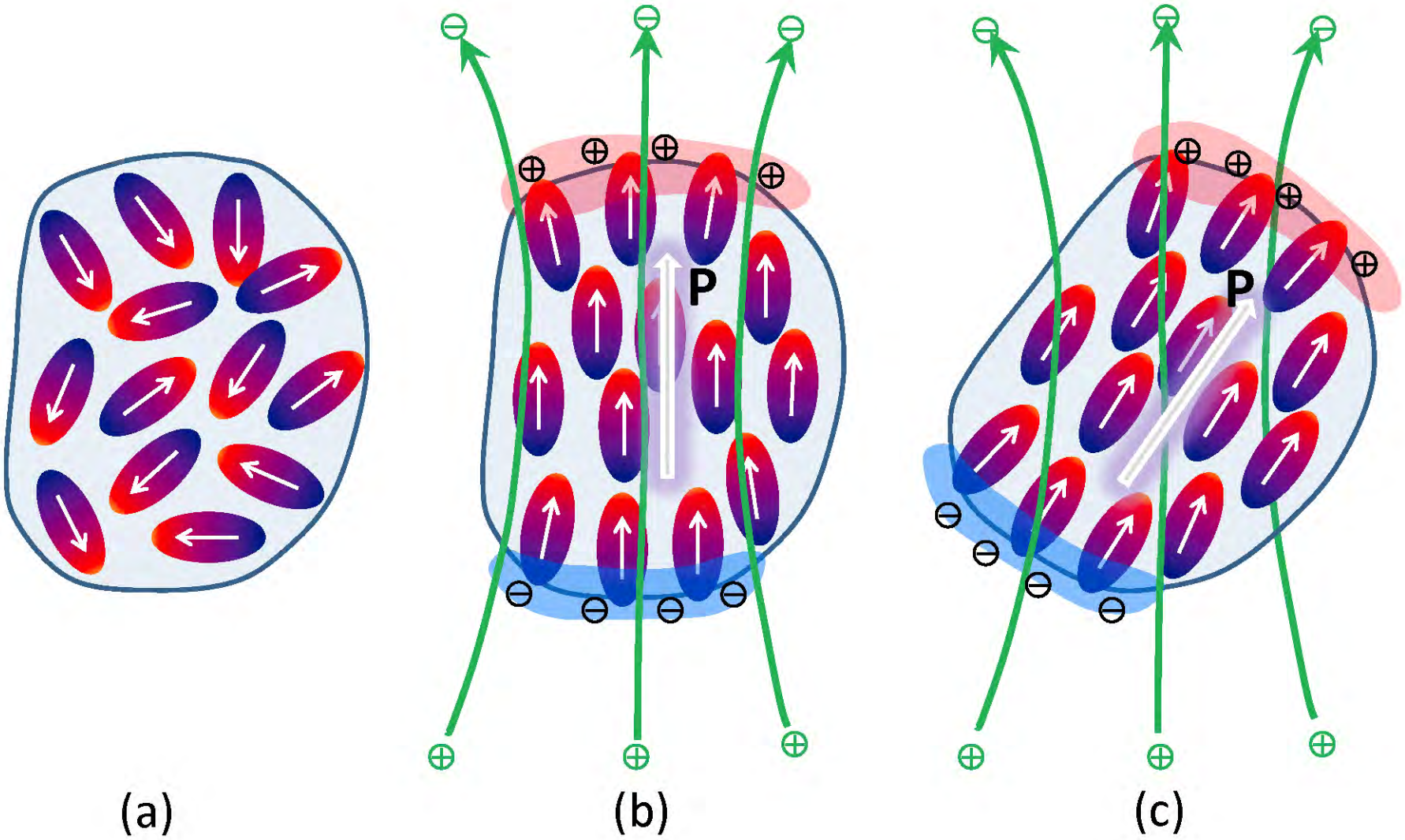
由 自由电荷 以及 宏观束缚电荷

按照 真空中的库仑定律 以及 叠加原理 产生。

介质内、外的宏观电场

满足真空中的 高斯定理 与 环路定理 。

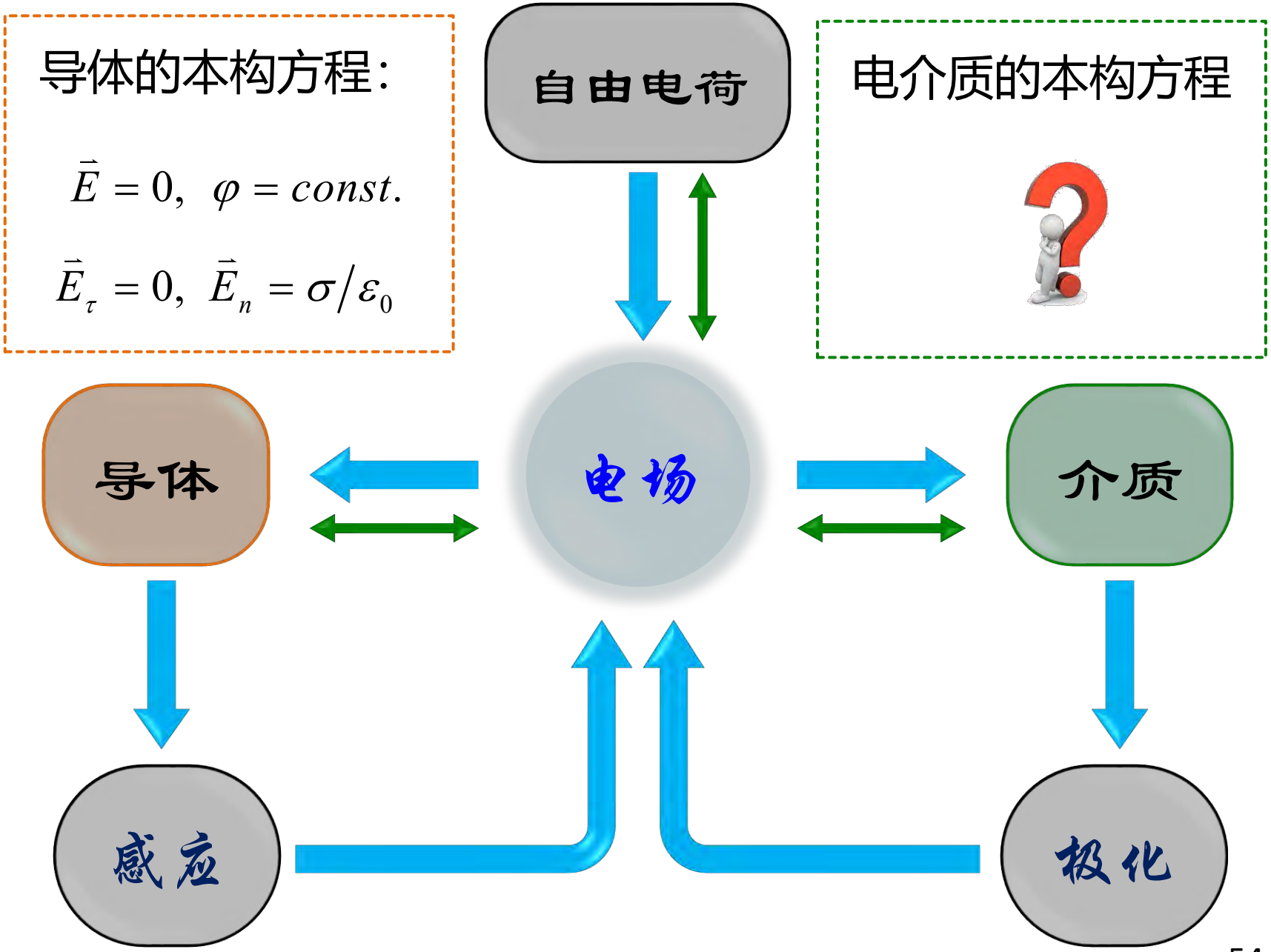
五、电介质的极化规律



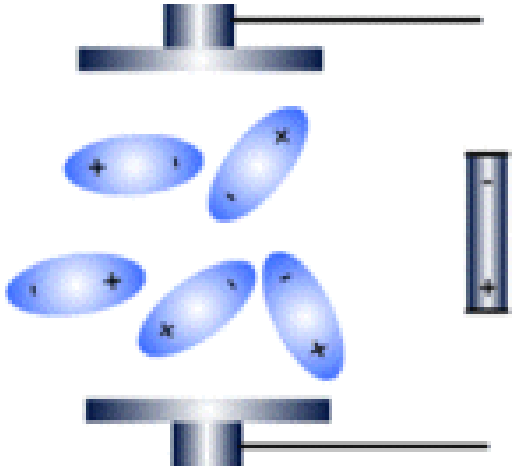
导体的本构方程：

$$\vec{E} = 0, \quad \varphi = const.$$

$$\vec{E}_\tau = 0, \quad \vec{E}_n = \sigma/\varepsilon_0$$

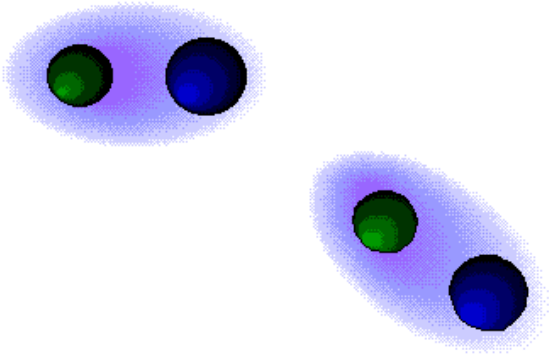


- 当极化达到稳定后，介质中有确定的场强 E 和极化强度 P，极化强度 P 和介质中的场强 E 存在一定的联系，即 $P \sim E$。



- 在宏观电磁学中，无法从理论上建立 P 与 E 的联系，这种关系只能通过实验来建立。

- 对于一些简单的电介质，统计物理和固体物理能根据介质极化的微观特性，从理论上建立 P 与 E 的关系。



1. 各向同性电介质

当场强不太强时，大多数电介质的极化强度 P 与介质中的场强 E 大小成正比，方向相同，即介质的**本构方程**为

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \left(\varepsilon_r = 1 + \chi\right)$$

此类电介质就称为是**各向同性**的。

- 气体、大部分液体以及许多非晶体和某些晶体，都是各向同性的介质。
- 无量纲量 χ 称为介质的**极化率**，它反映了介质极化难易的程度，对于不同的介质，极化率是不同。
- 对于**均匀介质**，介质内各处的物理性质都相同，极化率是与位置无关的常数；而对**非均匀介质**，极化率与位置有关。

$$\chi = \chi\left(\vec{r}\right) = \chi\left(x, y, z\right)$$

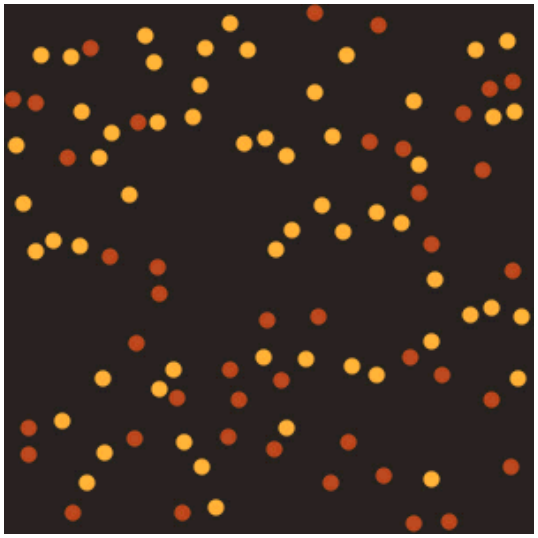
各向同性电介质本构关系的理论推导

- 一个电偶极子在电场 $\boldsymbol{E}$ 中具有的势能：

$$U = -\vec{p}_0 \cdot \vec{E} + C = -p_0 E \cos\theta + C$$

- 由于分子的热运动以及由此引起的分子间碰撞，每个电偶极子的方向未必恰好和电场方向完全一致。事实上，电偶极矩的方向在空间中呈现一定的分布。据统计物理学的基本原理，在温度为 $\boldsymbol{T}$ 时，电场中的电偶极子具有某个势能的几率服从波耳兹曼（Boltzman）分布：

$$\exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right)$$



- 选外电场的方向（z 轴）作为参考方向，则平均偶极矩

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{\int \vec{p}_0 e^{-U/k_B T} d\Omega}{\int e^{-U/k_B T} d\Omega}, \qquad (d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi)$$

显然，$\boldsymbol{p}_0$ 的 x 分量和 y 分量的平均值为零，于是上式变为：

$$\langle \vec{p} \rangle = \hat{z}\left[\hat{z} \cdot \langle \vec{p} \rangle\right] = \hat{z} p_0 \frac{2\pi \cdot \int_0^{\pi} \exp\left(\frac{p_0 E}{k_B T}\cos\theta\right) \cos\theta \sin\theta d\theta}{2\pi \cdot \int_0^{\pi} \exp\left(\frac{p_0 E}{k_B T}\cos\theta\right) \sin\theta d\theta}$$

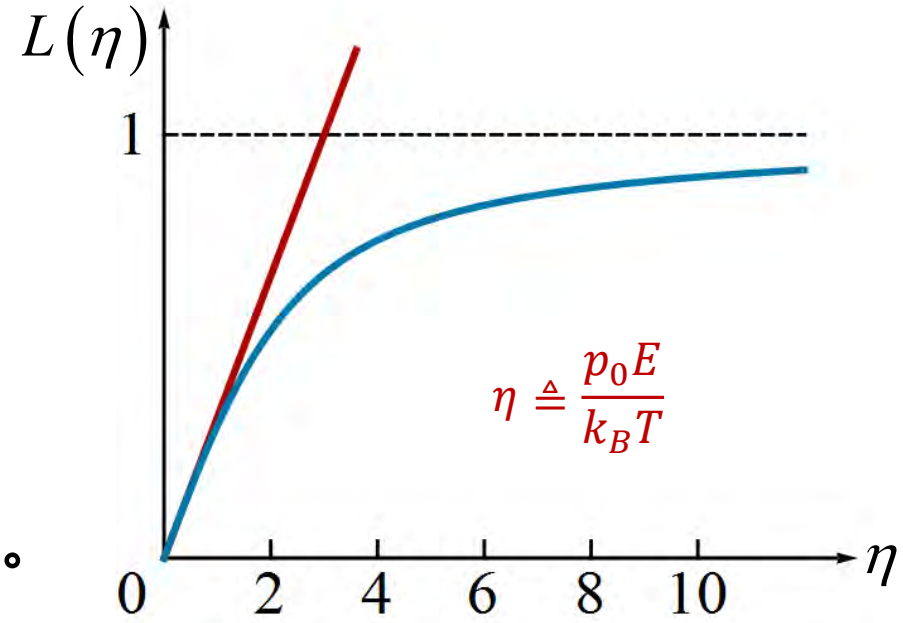
$$\rightarrow \frac{\langle \vec{p} \rangle}{p_0} = \hat{z} \frac{\int_{-1}^{+1} u e^{\eta u} du}{\int_{-1}^{+1} e^{\eta u} du} = \hat{z} \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \int_{-1}^{1} e^{\eta u} du$$

$$u \triangleq \cos\theta$$
$$\eta \triangleq \frac{p_0 E}{k_B T}$$

由此给出：

$$\frac{\langle \vec{p} \rangle}{p_0} = \hat{z}\left(\coth\eta - \frac{1}{\eta}\right)$$

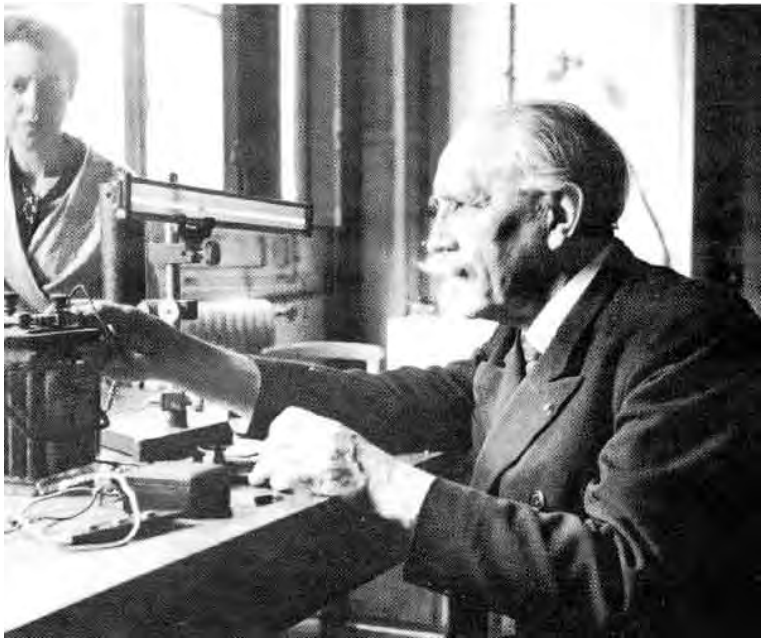
括号中的函数称为朗之万函数。



在通常温度下，场强不太强时，$\eta << 1$，所以

$$\langle \vec{p} \rangle = p_0 \frac{p_0 E}{3k_B T}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = n\langle \vec{p} \rangle = \chi\varepsilon_0 \vec{E}$$

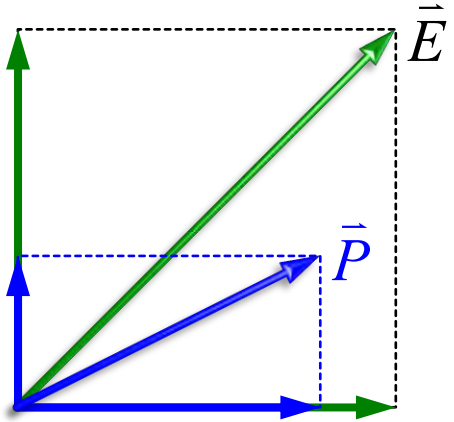


Paul Langevin

第五届索尔维会议（1927年）

2. 各向异性电介质

- 有些晶体，构成晶体的原子在空间有规则地排列，晶体的物理性质与方向有关：沿某个方向，介质较易极化，沿另一方向，介质较难极化，这种晶体称为**各向异性介质**。



- 当电场 E 不是很强时，P 与 E 仍是线性关系，本构关系为

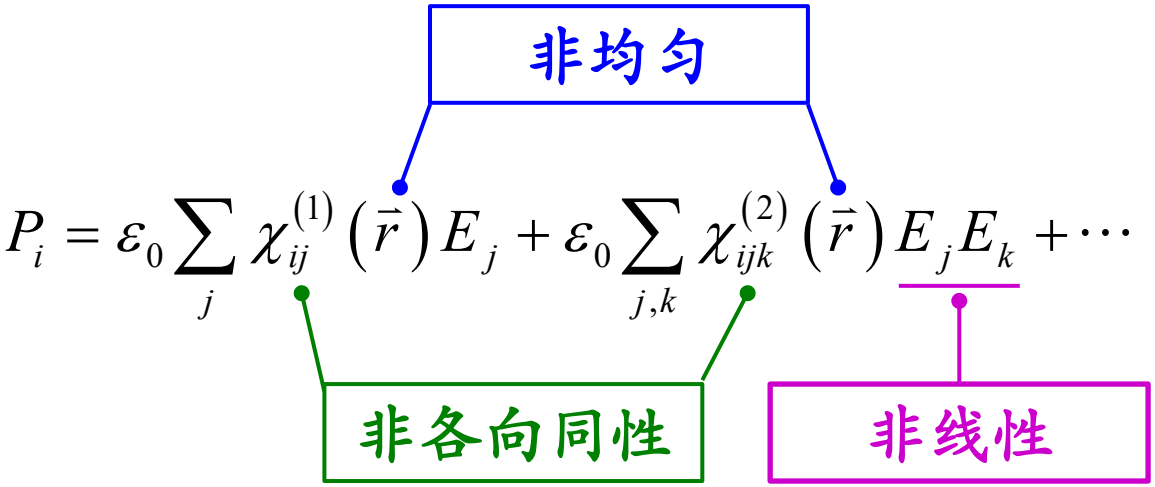
$$\vec{P} = \vec{\vec{\chi}} \cdot \varepsilon_0 \vec{E}$$

其中，χ 称为介质的**极化率张量**，它是一个对称张量。上式写成分量形式为

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

3. “三非”介质

当场强非常大时，$\boldsymbol{P}$ 不仅与 $\boldsymbol{E}$ 有关，还与 E^2、 E^3 等有关，这时 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 成非线性关系。$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 成非线性关系的介质称为**非线性介质**。非线性介质的物态方程一般可表示为



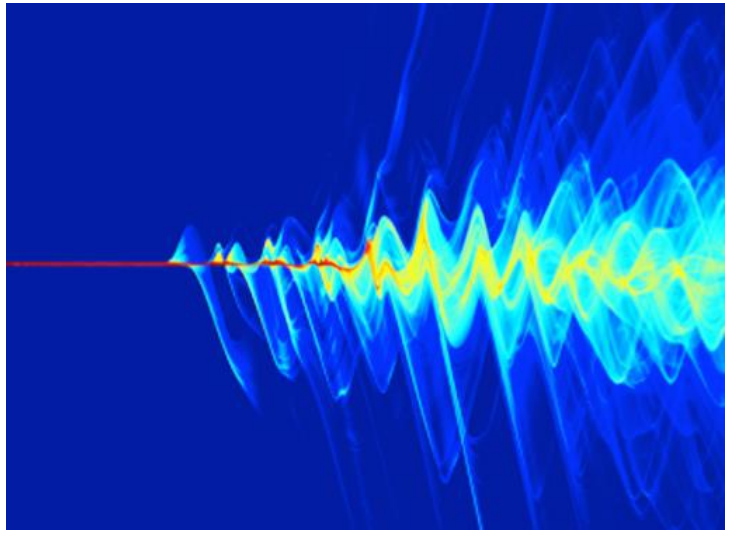
$\chi_{ij}^{(1)}$ 一阶极化率

$\chi_{ijk}^{(2)}$ 二阶极化率

阶数越高，其值越小。

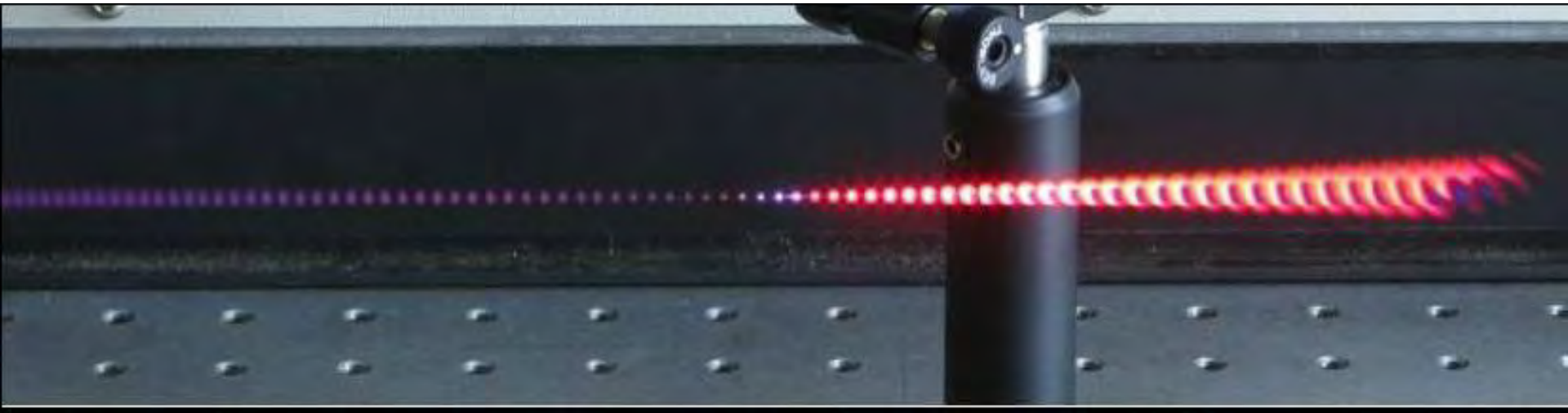
- 若 E_a 为原子内部的平均场强，则各阶极化率满足关系

$$\frac{\chi^{(2)}}{\chi^{(1)}}=\frac{\chi^{(3)}}{\chi^{(2)}}=\cdots=\frac{1}{E_a}$$



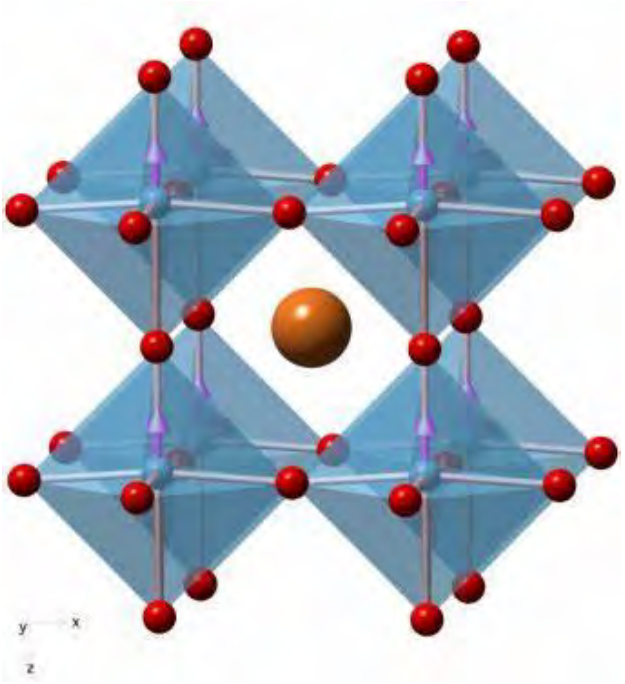
- $E_a \sim 10^{10}\ \mathrm{V/m}$。当 $E \ll E_a$ 时，所有的非线性项可以忽略。

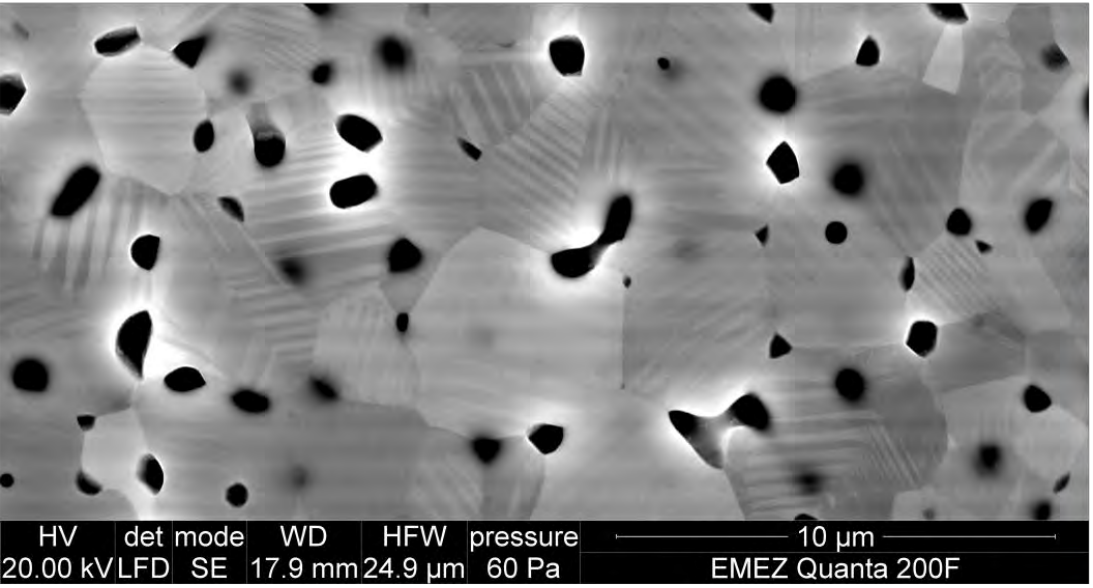
【注】从激光问世后，由于激光很强，激光的电矢量可与 E_a 相比拟，故高阶极化不能忽略，与这些非线性项相对应介质将产生许多非线性光学效应，这就形成了一门新学科——**非线性光学**。

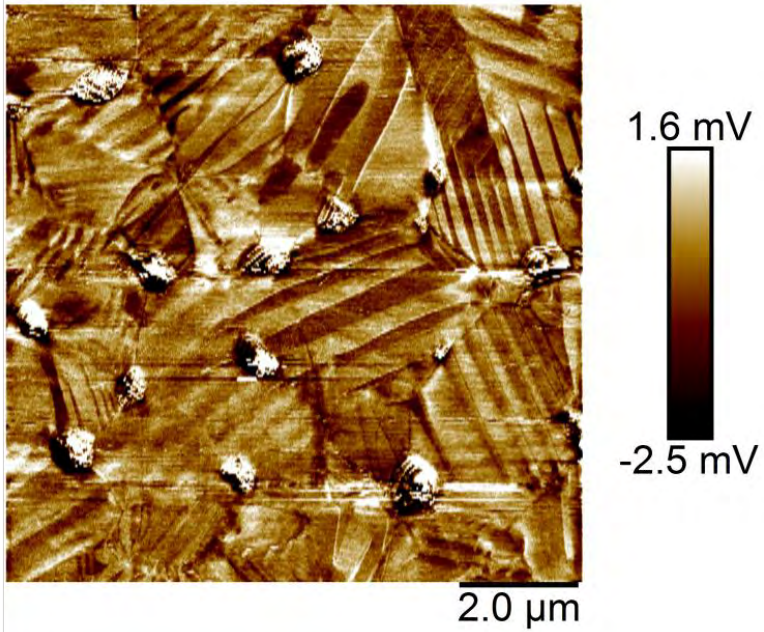


4. 铁电体（Ferroelectrics）介质

有一些电介质如钛酸钡（$BaTiO_3$）、酒石酸钾钠等，它的极化规律非常复杂，存在**滞后现象**：极化状态与极化历史有关。

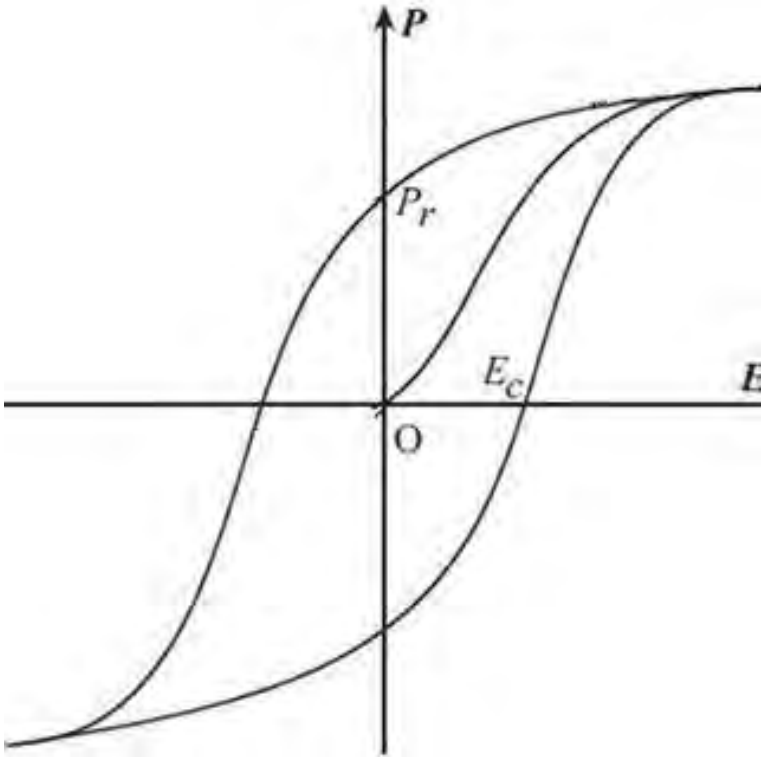


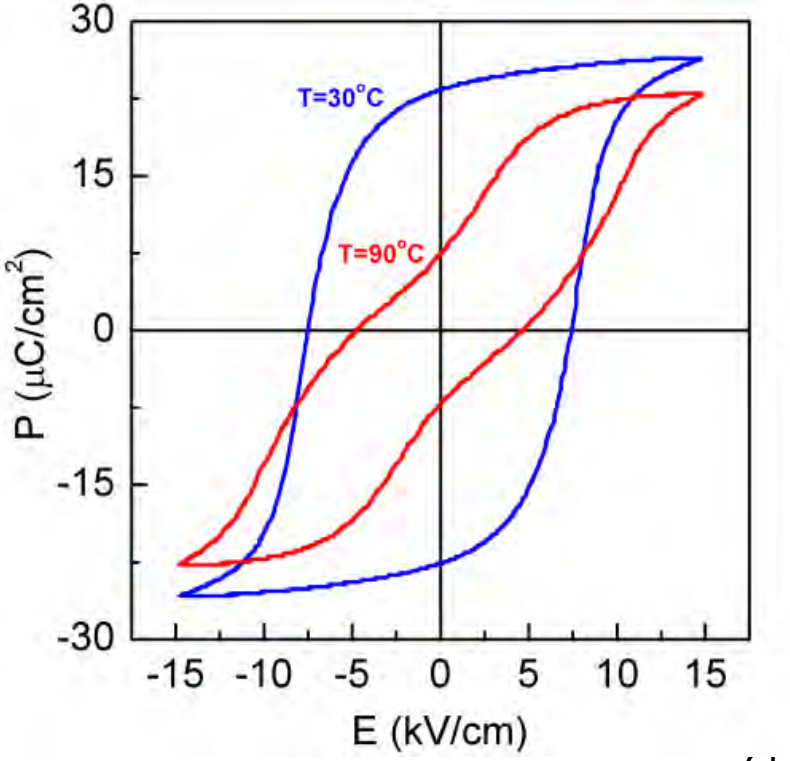




- 极化强度 P 随外场的变化非线性，呈**电滞回线**，有**剩余极化强度**。χ 非常大，并随 E 变化。

- 每一种铁电材料都有一个转变温度，称为**居里温度**。当温度低于居里点时，材料呈铁电性；当温度高于居里点时，材制的性质与一般电介质相同，如钛酸钡的居里温度为120℃。





5. 压电效应

- 1880年法国科学家居里兄弟发现压电效应。

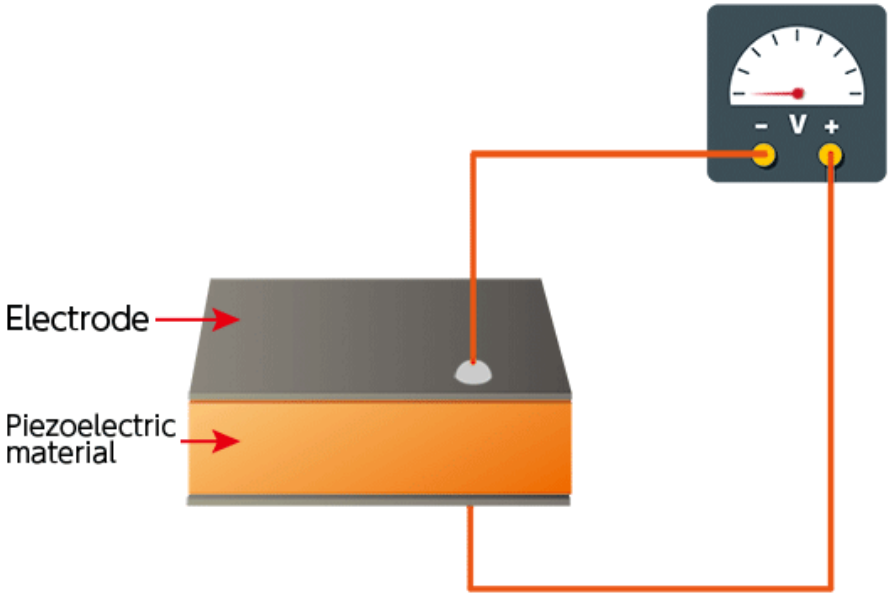
  弟弟：皮埃尔•居里

  哥哥：雅克斯•居里

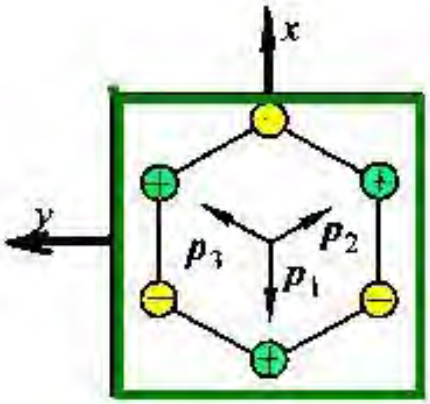
- 皮埃尔•居里和夫人于1898年一年之内发现了钋（Po）和镭（Ra）两种新元素，获得了1903年度诺贝尔物理学奖。居里夫人1911年又因放射化学方面的成就获得诺贝尔化学奖。

- 1894年，福克特（Voigt）更严谨地定出晶体结构与压电性的关系，他发现32种晶类（class）具有压电效应。第一次世界大战期间，朗之万（Langevin）第一次利用石英晶体制成了声纳，用于探测海洋深度。

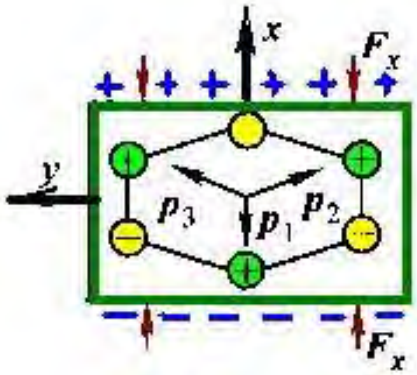
- 某些各自异性的晶体在机械力作用下发生形变时，晶体的表面上会出现极化电荷。这种现象称为**压电效应**。



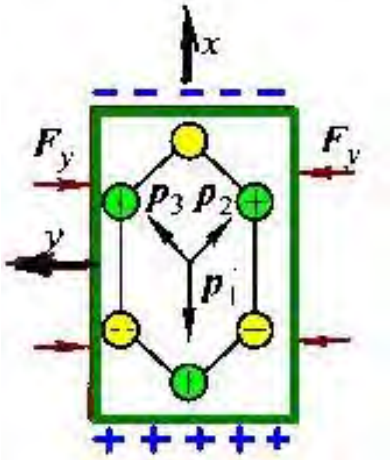
- 铁电体具有压电效应，但有压电效应的介质不一定是铁电体，如石英晶体是压电体，但不是铁电体。石英是一种 SiO_2 的晶体，其压电效应与其内部结构有关。



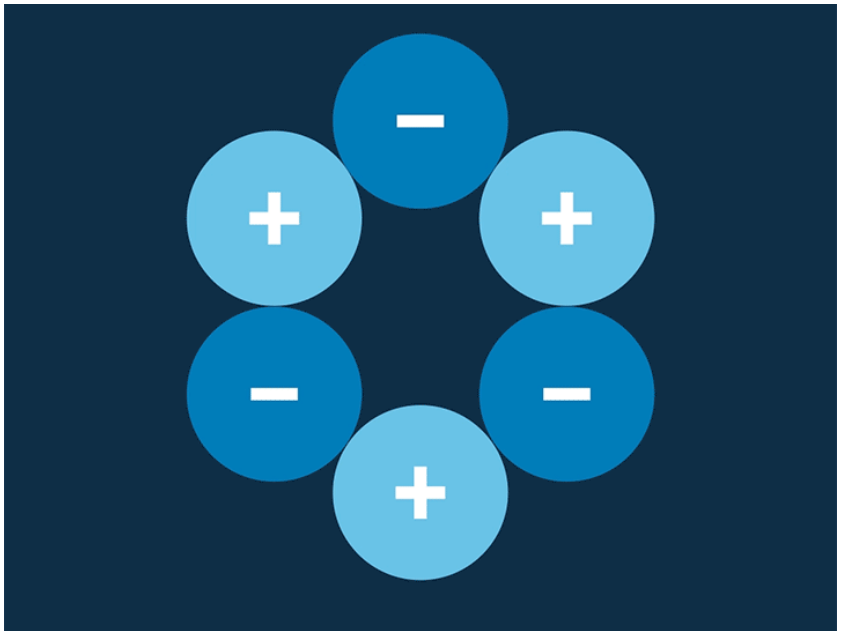
$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$



$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \parallel \hat{x}$

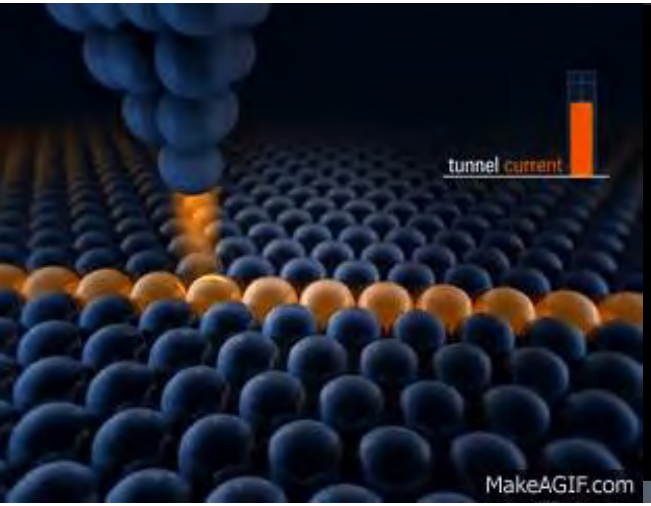


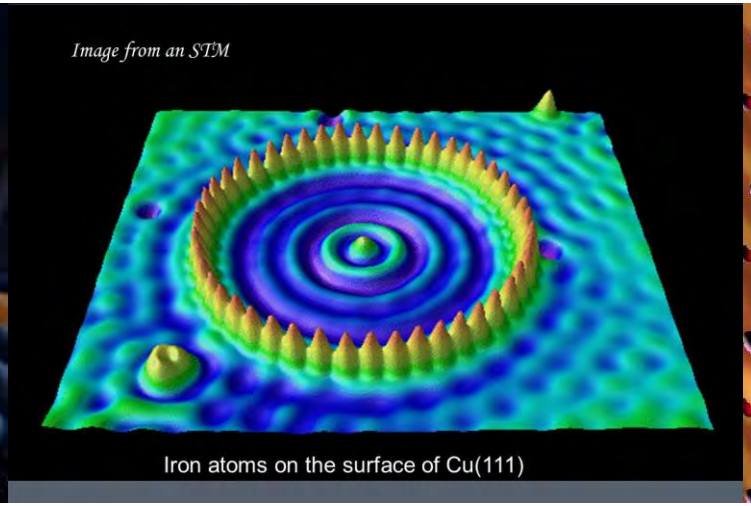
$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \parallel -\hat{x}$

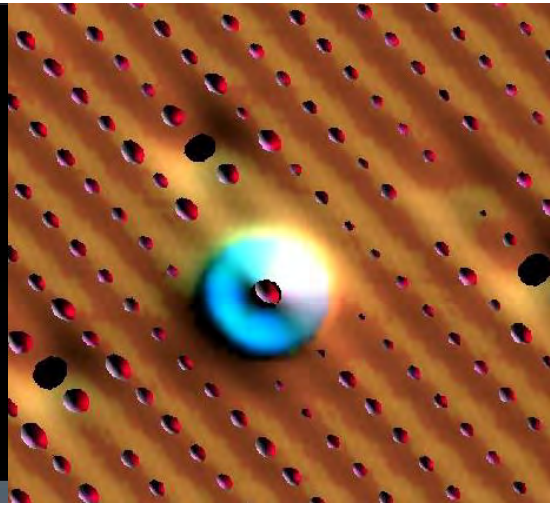


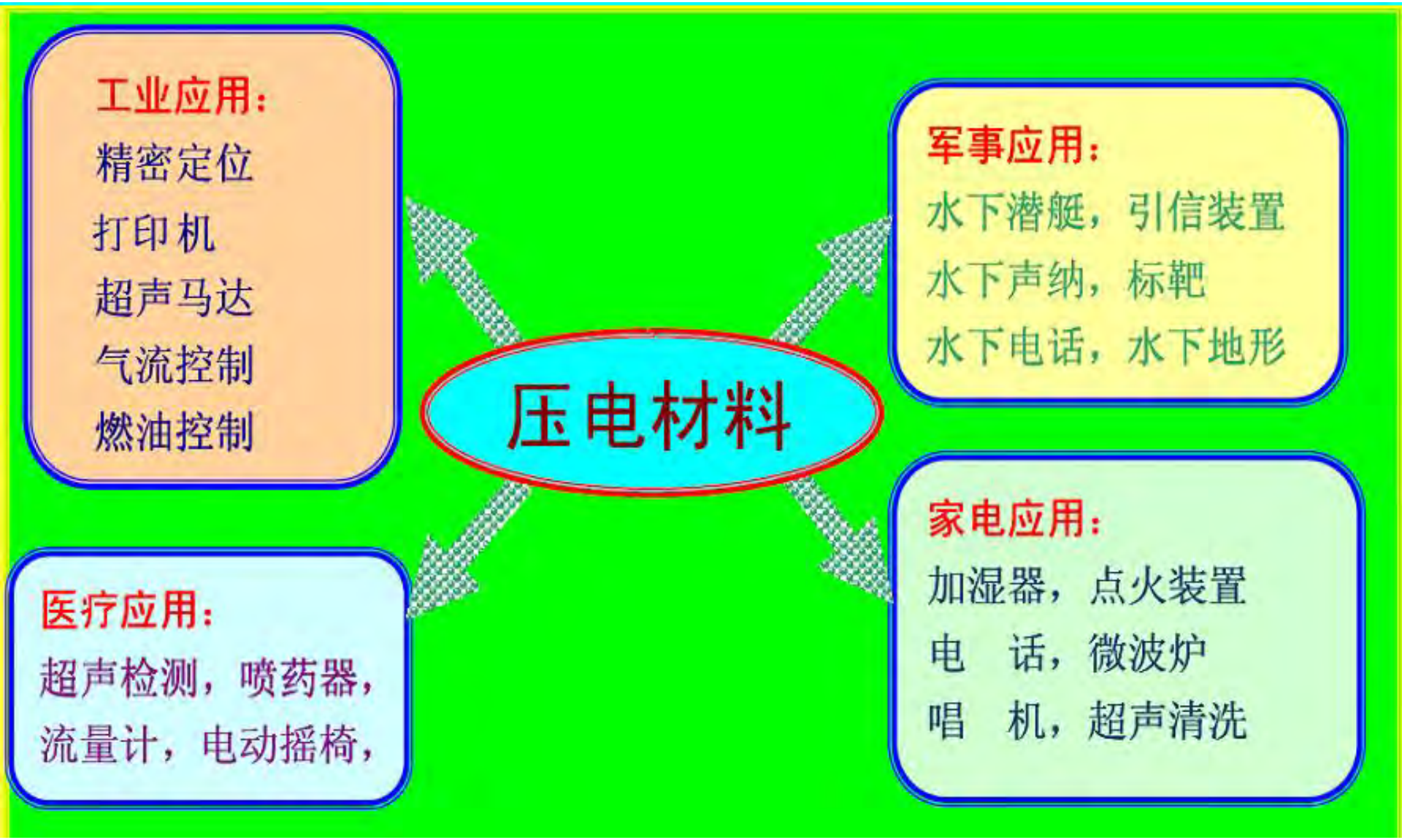
- 1986年诺贝尔奖的扫描隧道显微镜STM中探头移动步长100Å—1000Å，由**电致伸缩（逆压电效应）**完成的。

- 晶片的固有振荡频率由尺寸大小决定，在外场作用可获得稳定的电振荡，稳定度达 10^{-13} 量级（电子表、石英钟、军事通讯、精密电子仪表）。



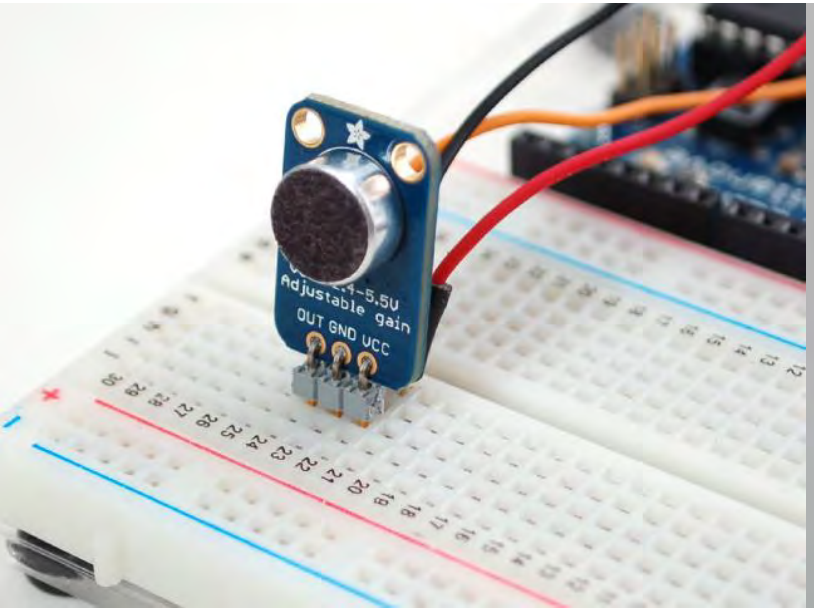


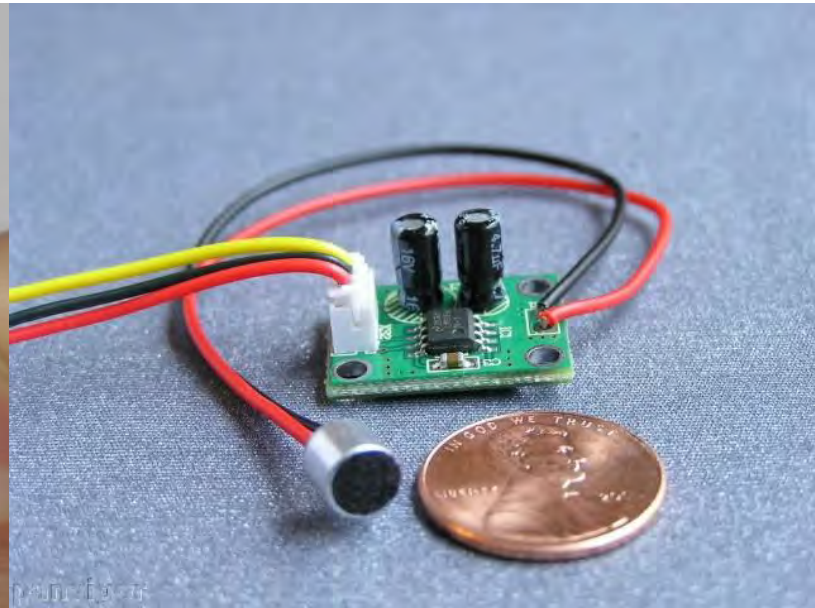



工业应用：
精密定位
打印机
超声马达
气流控制
燃油控制
军事应用：
水下潜艇，引信装置
水下声纳，标靶
水下电话，水下地形
压电材料
医疗应用：
超声检测，喷药器，
流量计，电动摇椅，
家电应用：
加湿器，点火装置
电　话，微波炉
唱　机，超声清洗

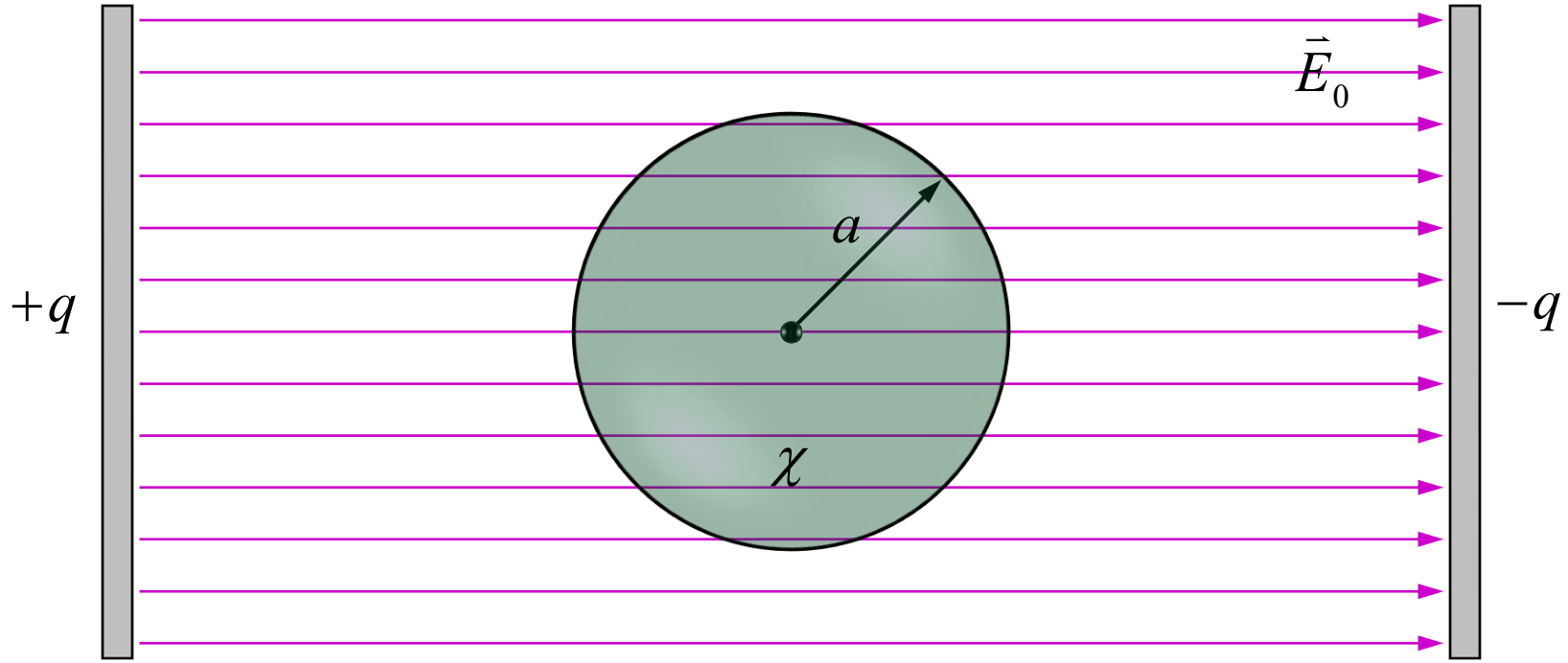
6. 永电体或驻极体电介质

- 1922年就为日本物理学家江口元太郎发现。
- 石蜡熔解成液态后加强场使其极化后凝固，撤去外场后，石蜡将保留有极化特性，固态石蜡表面保持有极化电荷。
- 驻极体具有长期保持电荷的功能，它可以产生很强的电场。
- 驻极体薄膜制成的话筒已商品化，如一般录音机中用的话筒就是以驻极体为探头的话筒。





【例】在两均匀带等量异号电荷的无限大平面导体板之间，放一均匀的介质球，球的半径为 a，极化率为 χ，求球内的场强。假定介质球离两平板都相当远，球处在场中时，带电板上的电荷仍然均匀分布，即自由电荷单独产生的场仍是均匀场。

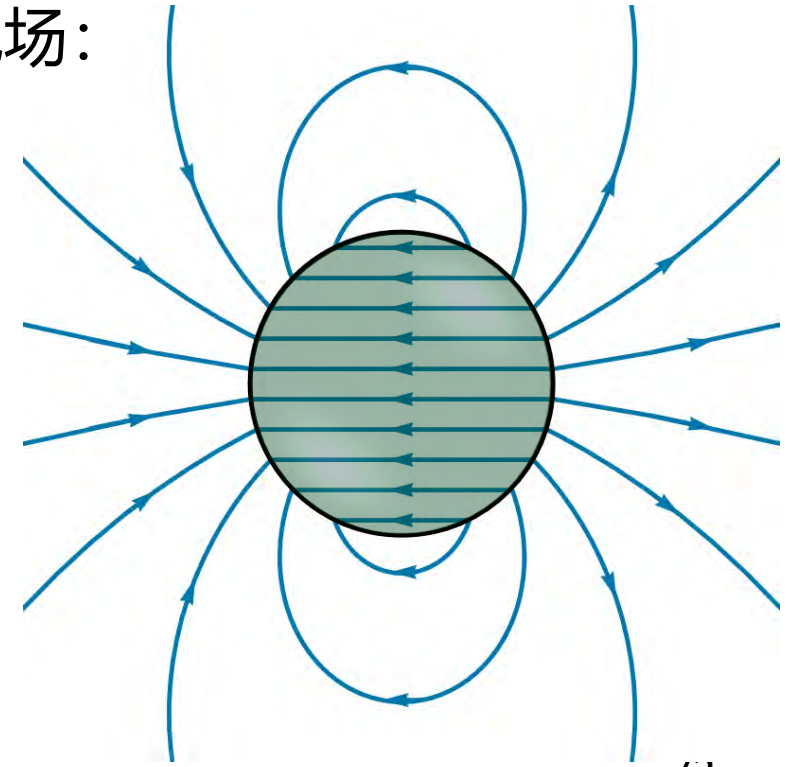


【解】设想介质球的极化是分若干阶段进行的，最终达到静电平衡。在介质刚放在电场中时，极化电荷尚未形成，因而介质球内的电场就是外场 $\boldsymbol{E_0}$，它使介质球均匀极化，极化强度为：

$$\vec{P}_0 = \chi\varepsilon_0\vec{E}_0$$

均匀极化介质球在球内产生均匀电场：

$$\vec{E}_1' = -\frac{\vec{P}_0}{3\varepsilon_0} = -\frac{\chi}{3}\vec{E}_0$$



附加电场 $\boldsymbol{E'_1}$ 引起进一步的附加极化，附加极化强度为：

$$\vec{P}_1 = \chi\varepsilon_0\vec{E}_1' = -\frac{\chi^2}{3}\varepsilon_0\vec{E}_0$$

附加极化强度产生的电场为：

$$\vec{E}_2' = -\frac{\vec{P}_1}{3\varepsilon_0} = \left(-\frac{\chi}{3}\right)^2 \vec{E}_0$$

附加电场进一步引起附加极化，这样的过程一步一步继续下去，在第 n 个阶段，附加极化强度产生的场强为：

$$\vec{E}_n' = \left(-\frac{\chi}{3}\right)^n \vec{E}_0$$

于是介质球内的场强等于自由电荷和极化电荷产生的附加场强之和，即：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1' + \vec{E}_2' + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\chi}{3}\right)^n \vec{E}_0 = \frac{1}{1-\left(-\chi/3\right)}\vec{E}_0$$

由此得到介质球内的场强为：

$$\vec{E} = \frac{3}{\varepsilon_r + 2}\vec{E}_0$$

介质球内的退极化场：

$$\vec{E}' = \vec{E} - \vec{E}_0 = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\vec{E}_0 = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

介质球内的极化强度：

$$\vec{P} = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)\vec{E} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\cdot 3\varepsilon_0\vec{E}_0$$

介质球表面的极化电荷面密度：

$$\sigma' = P_n = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\cdot 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta$$

极化介质球的总电偶极矩：

$$\vec{p} = \frac{4\pi a^3}{3}\vec{P}$$

【另解】由于处于均匀电场中的介质球达到静电平衡时，正负电荷只是有微小偏移，因此假设：

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}_1' = E_0\hat{z} + E_1'\hat{z} \\ \vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}_2' = E_0\hat{z} + \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\left(\hat{z}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \hat{z}\right] \end{cases}$$

介质球界面两侧的电场由边值关系联系：

$$\hat{r}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right)_{r\to a} = 0, \quad \hat{r}\cdot\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right)_{r\to a} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

其中

$$\sigma' = P_n = \chi\varepsilon_0 E_1\cos\theta = \chi\varepsilon_0\left(E_0 + E_1'\right)\cos\theta$$

代入边值关系给出：

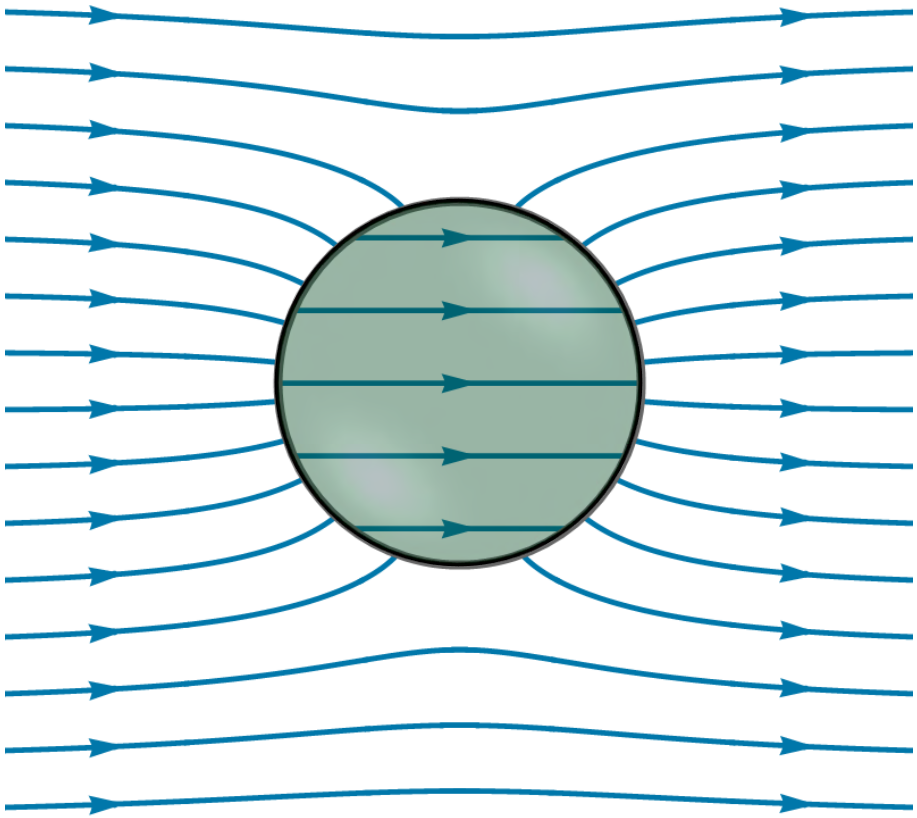
$$E_1' = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}, \qquad \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 R^3} - E_1' = \chi\varepsilon_0\left(E_0 + E_1'\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1' = -\dfrac{\chi}{\chi+3}E_0 = -\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}E_0 \\ p = 4\pi a^3 \dfrac{\varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)}{\varepsilon_r + 2}E_0 \end{cases}$$

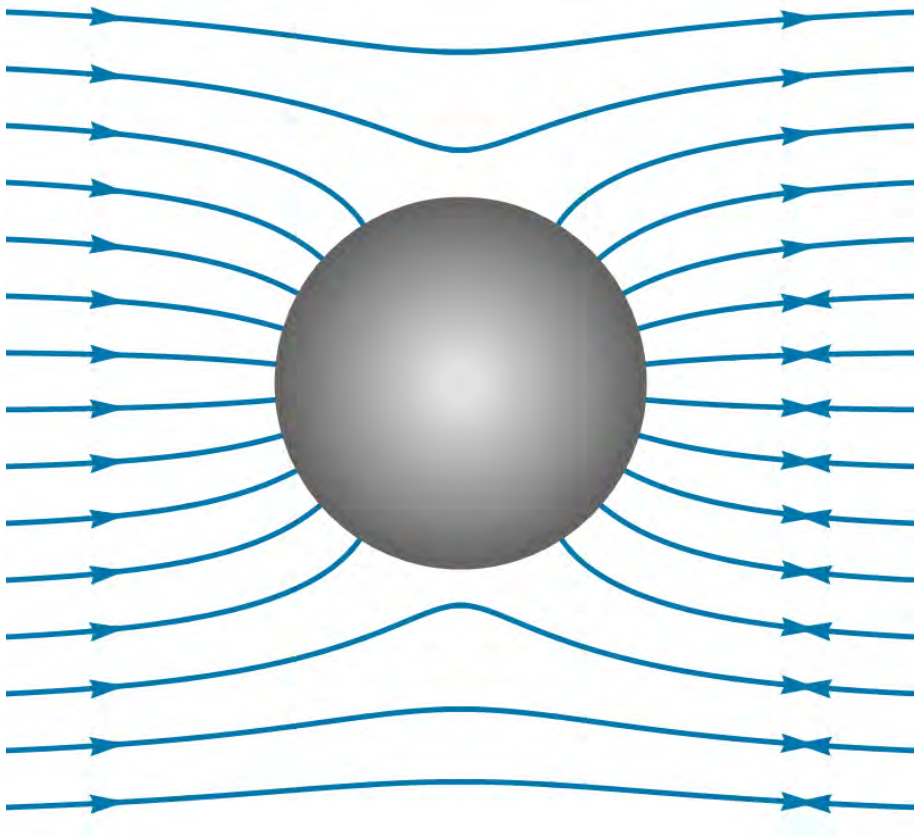
从而：

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}_1' = \dfrac{3}{\varepsilon_r + 2}\vec{E}_0 \\ \vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}_2' = \vec{E}_0 + \dfrac{a^3}{r^3}\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\left[3\left(\vec{E}_0 \cdot \hat{r}\right)\hat{r} - \vec{E}_0\right] \end{cases}$$

均匀电场中的电介质球



均匀电场中的导体球



Thank You!