§2-6 电介质中静电场的基本规律

介质内、外的宏观电场

由 自由电荷 以及 宏观束缚电荷

按照 真空中的库仑定律 以及 叠加原理 产生。

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\hat{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}^2}dq+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\hat{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}^2}dq'$$

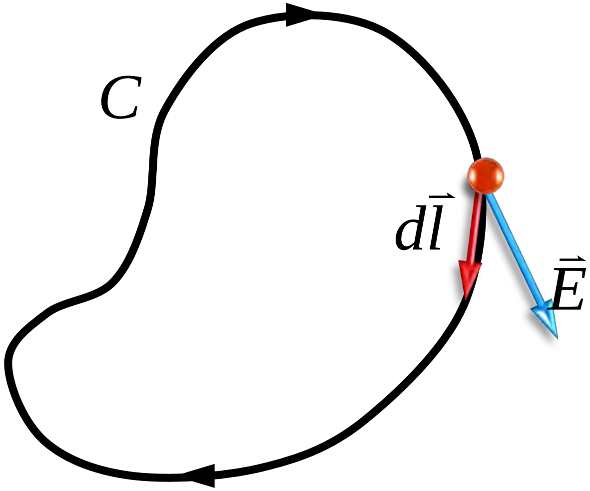
介质内、外的宏观电场

满足真空中的 高斯定理 与 环路定理 。

一、有电介质时的环路定理

1. 环路定理

有介质存在时，环路定理仍然成立：



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

写成微分形式为：

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

静电场是无旋场。

2. 静电势

有介质存在时，静电势的概念仍然有效：

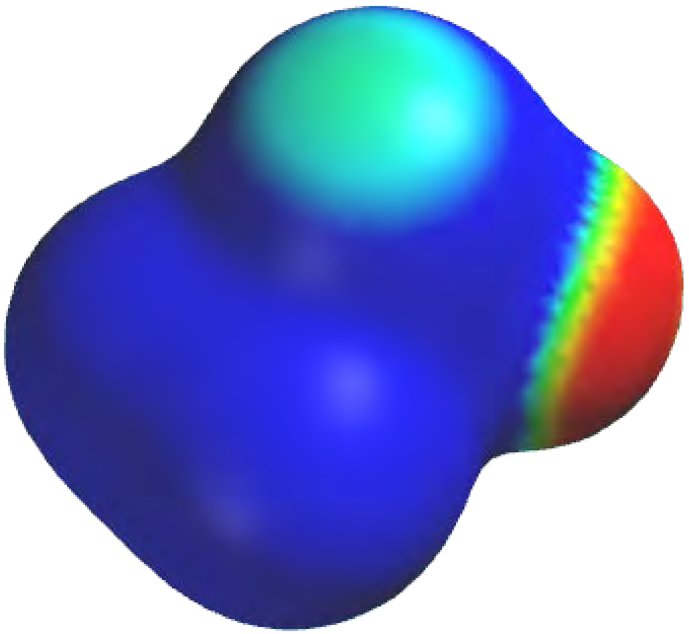
$$d\varphi \triangleq \varphi(\vec{r} + d\vec{l}) - \varphi(\vec{r}) = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- 电场

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}\hat{n}$$

- 静电势

$$\phi(\vec{r}) \triangleq \int_{\vec{r}}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{P}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



- 电势差（电压、电势降）

$$V_{12} = \phi_1 - \phi_2 \triangleq \int_{1}^{2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

二、有电介质时的高斯定理

1. 高斯定理

有介质存在时，高斯定理仍然成立：

$$\varepsilon_0 \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q = Q_0 + Q'$$

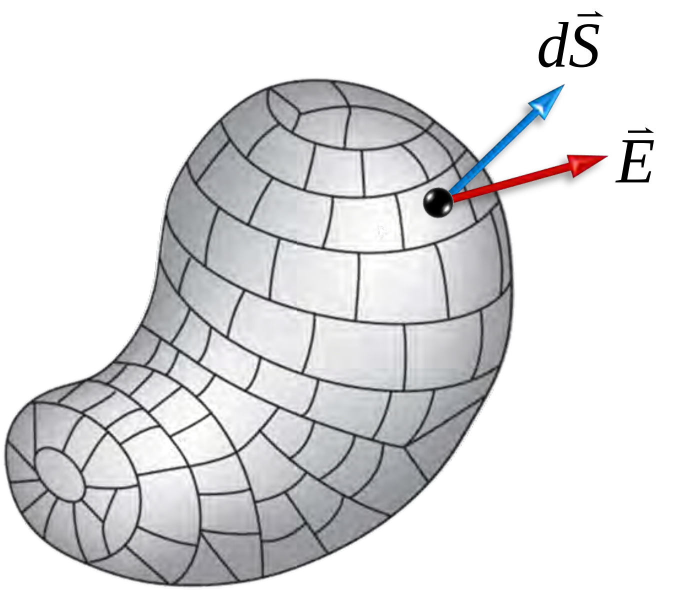
S 内的自由电荷

S 内的束缚电荷

因为

$$Q' = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \oiint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = Q_0$$



引入辅助矢量——**电位移矢量**：

$$\vec{D} \triangleq \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

则：

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_0$$

这就是有介质时的**高斯定理**。写成微分形式为：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$

电位移矢量的通量只与自由电荷有关，

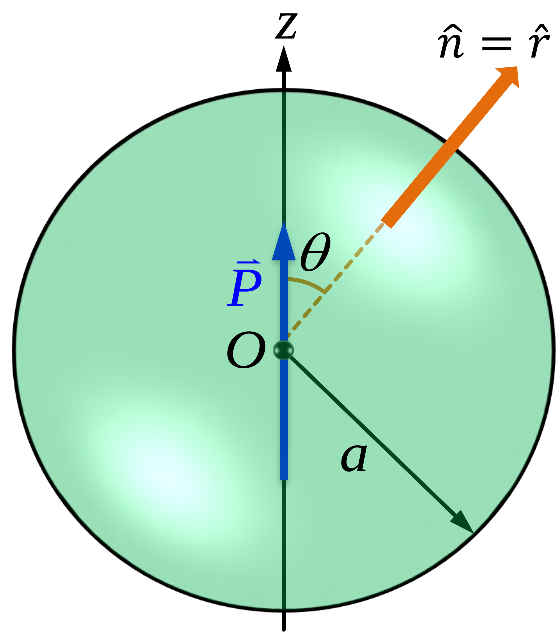
而与极化电荷无关。

电位移线发起于正自由电荷，终止于负自由电荷。

【例】均匀极化电介质球的电位移矢量。

【解】球面上的极化电荷面密度为

$$\boxed{\sigma' = \hat{r} \cdot \vec{P} = P\cos\theta}$$



上半球面（$\theta < \pi/2$）极化电荷为正

下半球面（$\theta > \pi/2$）极化电荷为负

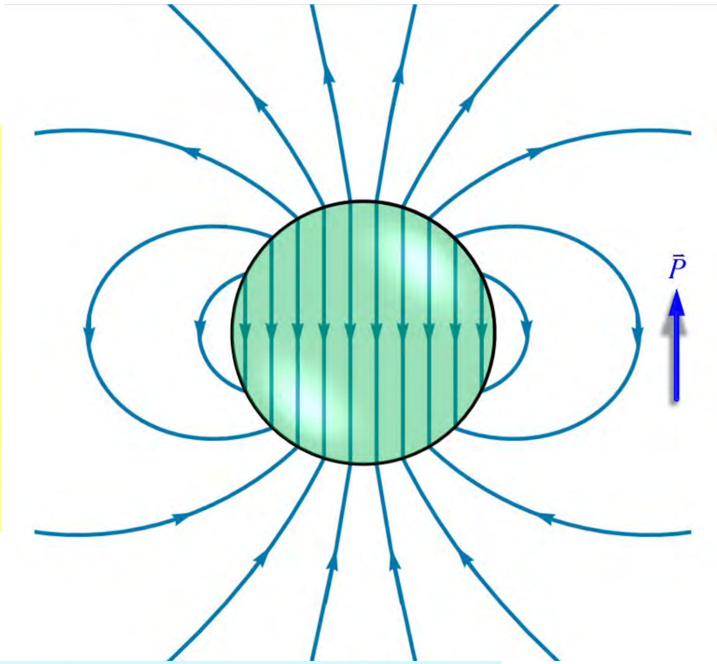
赤道线上（$\theta = \pi/2$）极化电荷为零

E' 等于面电荷密度为 $\sigma' = P\cos\theta$ 的带电球面产生的电场

与均匀外场中的导体球表面的感应电荷分布相似！

■球面上电荷分布$\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ 产生的电场

$$\vec{E}' = \begin{cases} \dfrac{1}{3\varepsilon_0}\dfrac{a^3}{r^3}\left[3(\sigma_0\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r} - \sigma_0\hat{z}\right] & (r > a) \\ -\vec{E}_0 = -\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\hat{z} & (r < a) \end{cases}$$



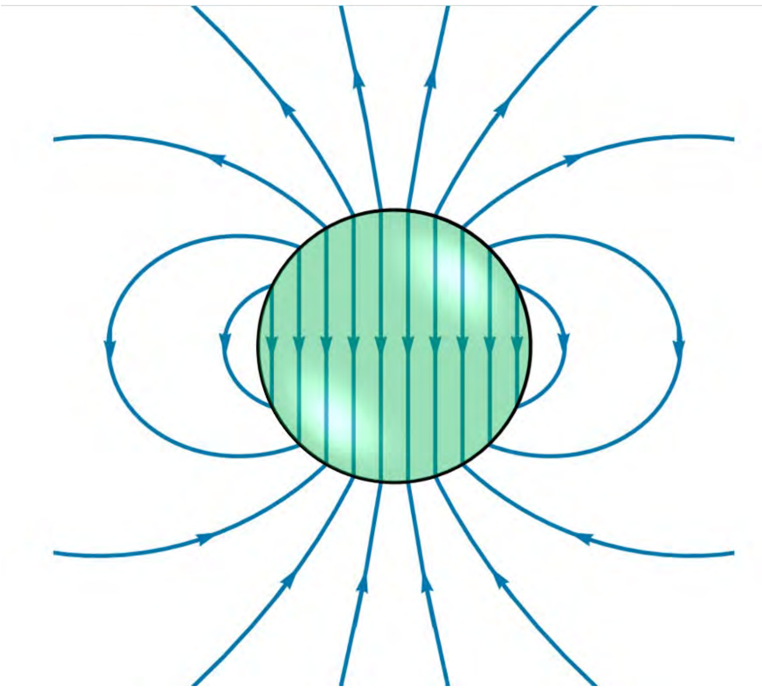
■极化电荷面分布$\sigma' = P\cos\theta$ 产生的电场为

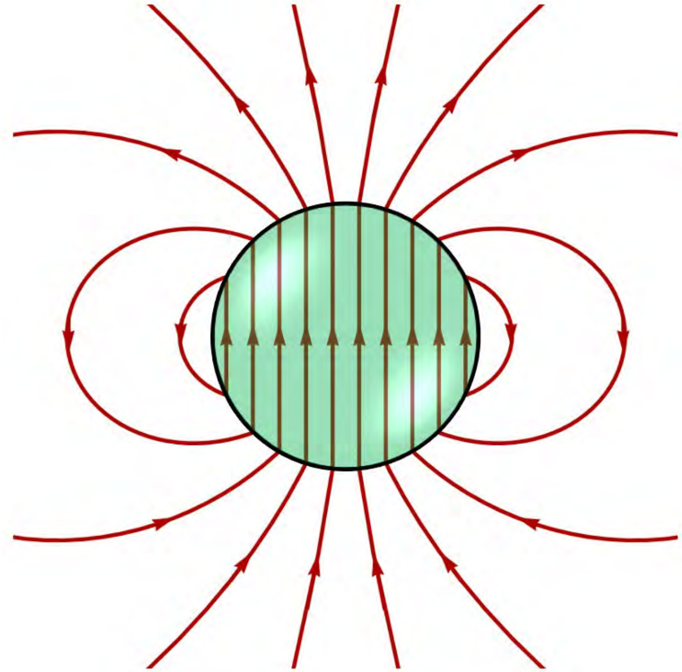
$$\vec{E}' = \begin{cases} -\dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} = -\dfrac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & \text{if } r < a \\ \dfrac{1}{3\varepsilon_0}\dfrac{a^3}{r^3}\left[3(\vec{P}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{P}\right] = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\right] & \text{if } r > a \end{cases}$$

$\vec{p} \equiv \dfrac{4\pi a^3}{3}\vec{P}$ 为介质球的总电偶极矩

最后由$\vec{D} \triangleq \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$，得到电位移矢量分布。

对比电场和电位移矢量





电场$\vec{E}$分布

电位移矢量$\vec{\mathbf{D}}$分布

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{D}} \neq \mathbf{0} \ ?$$

2. D 与 E 的关系

- **各向同性电介质**

$$\vec{D} \triangleq \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi\varepsilon_0 \vec{E} = (1+\chi)\varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

介电常数可能因地而异（非均匀），但任一点处的电位移 D 总是平行于该点处的电场 E。

- **各向异性电介质**

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

3. 简单介质内部的极化电荷与自由电荷的关系

设 S 是均匀介质（$\varepsilon=\text{const.}$）内部的任一给定闭曲面， Q_0 和 Q' 分别是 S 内包含的自由电荷与极化电荷总量。

$$\begin{cases} \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oiint_S \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}\cdot d\vec{S} = \varepsilon_r\varepsilon_0\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \varepsilon_r(Q_0+Q') \\ \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q' = -\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)Q_0 = -\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}Q_0$$

简单介质内部，极化电荷总是与自由电荷相伴出现的。

若简单介质内部没有自由电荷，

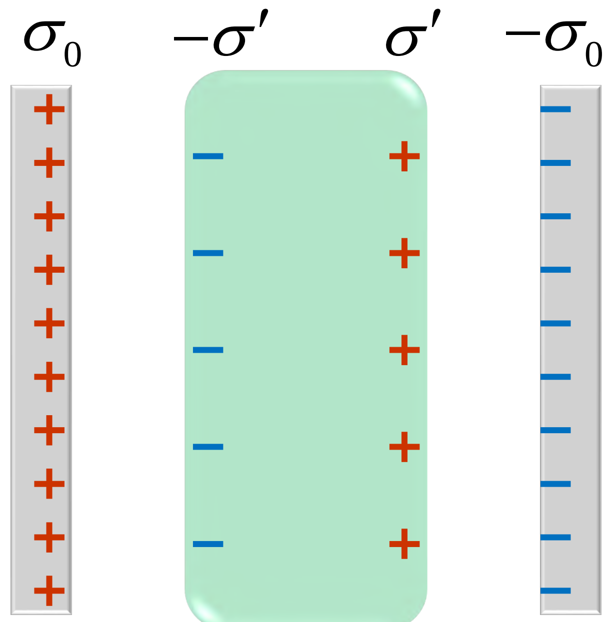
则极化电荷只能分布在在介质表面。

- 简单介质内部电荷的体密度之间存在简单的比例关系：

$$\begin{cases} \text{总电荷密度：} & \rho = \rho_0 + \rho' = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \\ \text{自由电荷密度：} & \rho_0 = \nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla \cdot \vec{E} \\ \text{极化电荷密度：} & \rho' = -\nabla \cdot \vec{P} = -\chi \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \end{cases}$$

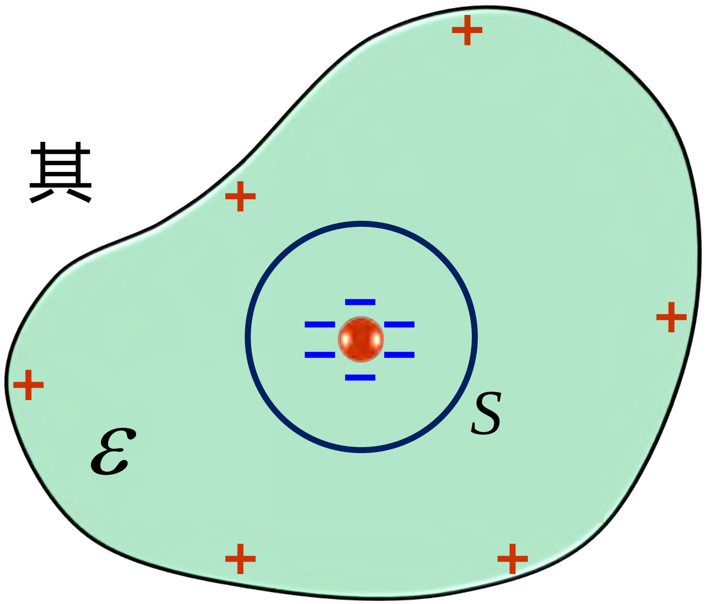
$$\Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{\varepsilon_r}, \quad \rho' = -\chi\rho = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\rho_0$$

- 一般而言，介质界面上的极化电荷与自由电荷的面密度之间没有简单的比例关系，需要具体问题具体分析。



三、简单介质中的库仑定律

设在均匀介质内有一点电荷 Q_0。

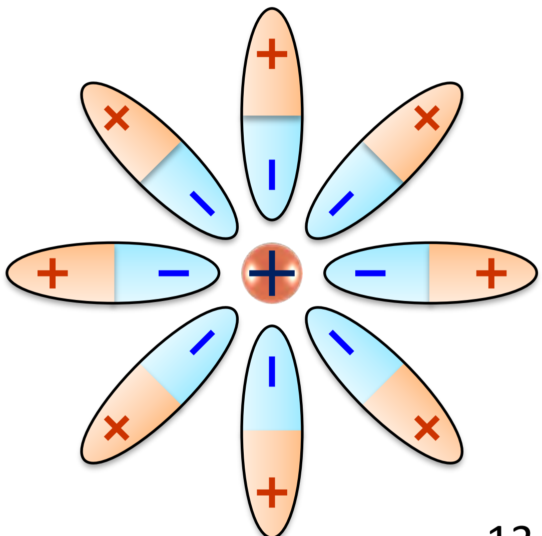


- 对于任一包含 Q_0 的小的闭曲面 S，其内部的极化电荷电量必然为：

$$Q' = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)Q_0$$

- 宏观电磁学中，点电荷 Q_0 周围的这部分极化电荷 Q' 只能视为与 Q_0 重叠的点电荷，总电量为

$$Q = Q_0 + Q' = \frac{Q_0}{\varepsilon_r}$$

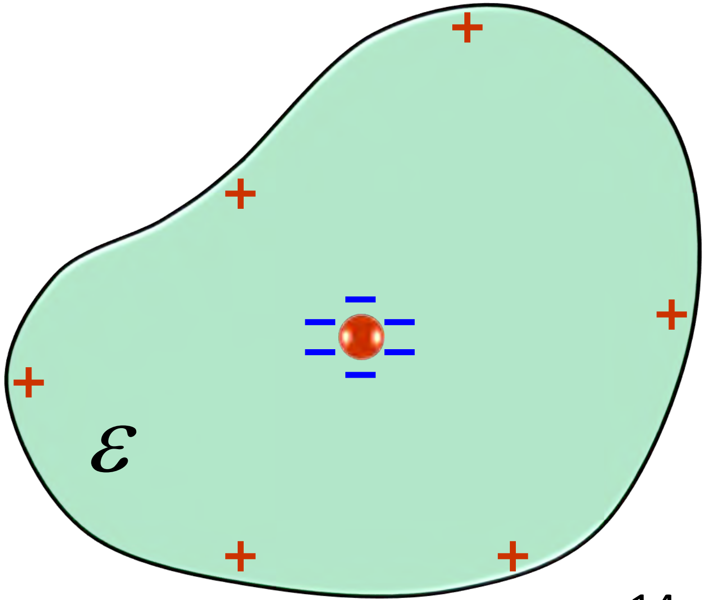


- 简单介质中， Q' 总是与 Q_0 相伴而生，对于 Q_0 造成了某种屏蔽效应。对于空间中任一给定点 $\boldsymbol{r}$ ——无论介质内还是介质外， Q_0 与 Q' 激发的电场之和为：

$$\vec{E}=\frac{Q_0\hat{r}}{4\pi\varepsilon r^2}=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

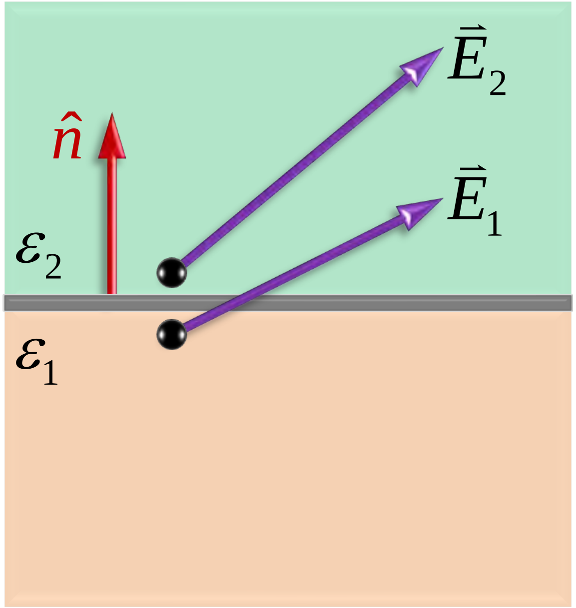
这就是**简单介质中的库仑定律**（只要将真空情形下的库仑定律中的 ε_0 换为 ε）。

- 空间任一给定点 $\boldsymbol{r}$ 处的总电场还应加上介质界面处的极化电荷的贡献。



四、边值关系

边值关系实际上是界面处的场方程。



1. *E* 与 *D* 的切向分量

在介质交界面附近，环路定理表示为：

$$\hat{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0 \quad \text{or} \quad E_{1\tau}=E_{2\tau}$$

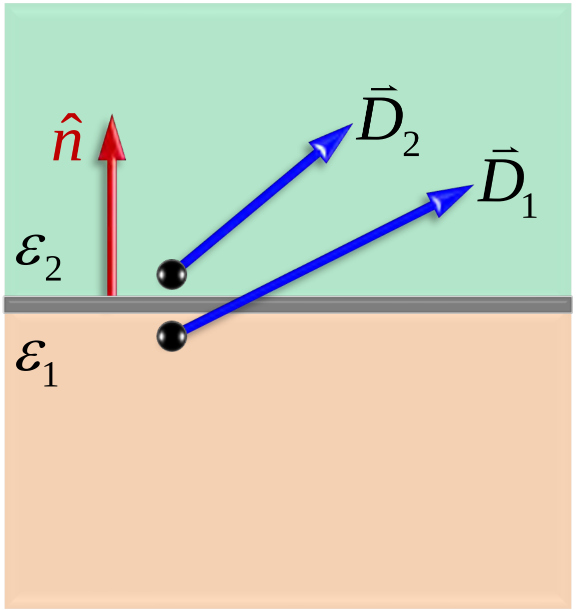
$$\Rightarrow \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1}=\frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2} \quad \text{or} \quad \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

- 电场的切向分量连续。
- 在两种介质的交界面上，电位移矢量的切向分量是不连续。造成突变的原因是由于两种介质中的极化强度 ***P*** 不同。

2. *E* 与 *D* 的法向分量

在介质交界面附近，高斯定理表示为：

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\sigma_0$$



- 若两种简单介质的界面处无自由面电荷分布，则 ***D*** 的法向分量连续，即：

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=0 \quad \text{or} \quad D_{1n}=D_{2n}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_1 E_{1n}=\varepsilon_2 E_{2n} \quad \text{or} \quad \frac{E_{1n}}{E_{2n}}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

即在两种介质的交界面上，即使电位移矢量的法向分量连续，电场强度的法向分量仍是不连续的。造成这种突变的原因是由于界面上有极化面电荷分布。

3. 折射定律

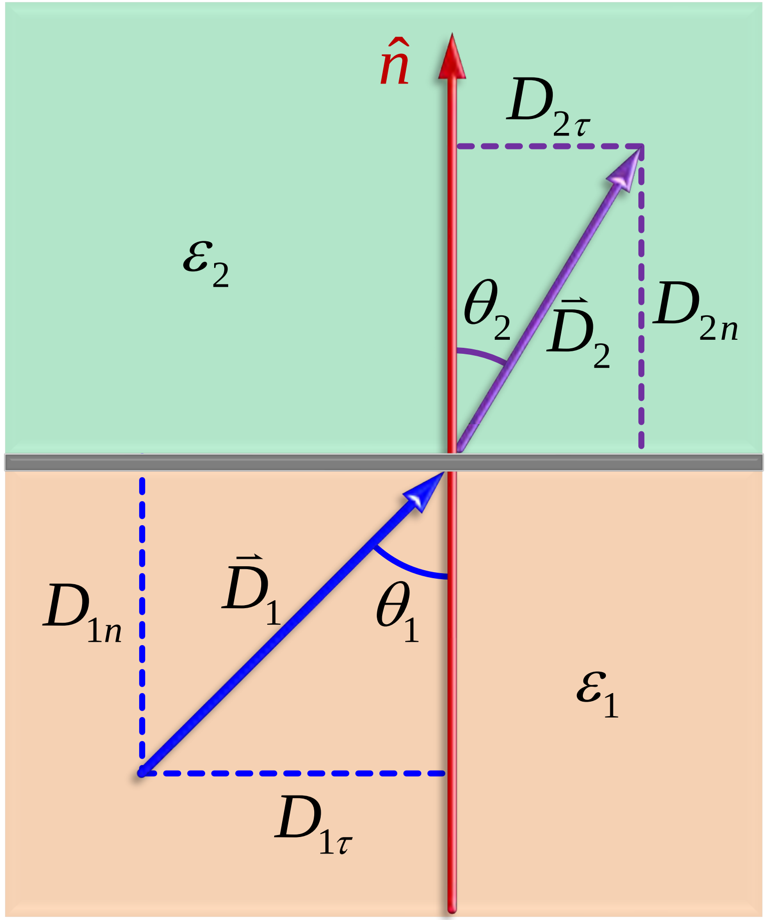
若两种简单介质的交界面上没有自由电荷分布，则有：

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{D_{1\tau}/D_{1n}}{D_{2\tau}/D_{2n}}=\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}}$$

或者：

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{E_{1\tau}/E_{1n}}{E_{2\tau}/E_{2n}}=\frac{E_{2n}}{E_{1n}}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$



思考：图中 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，

（1）D_1 和 D_2 哪个更大？

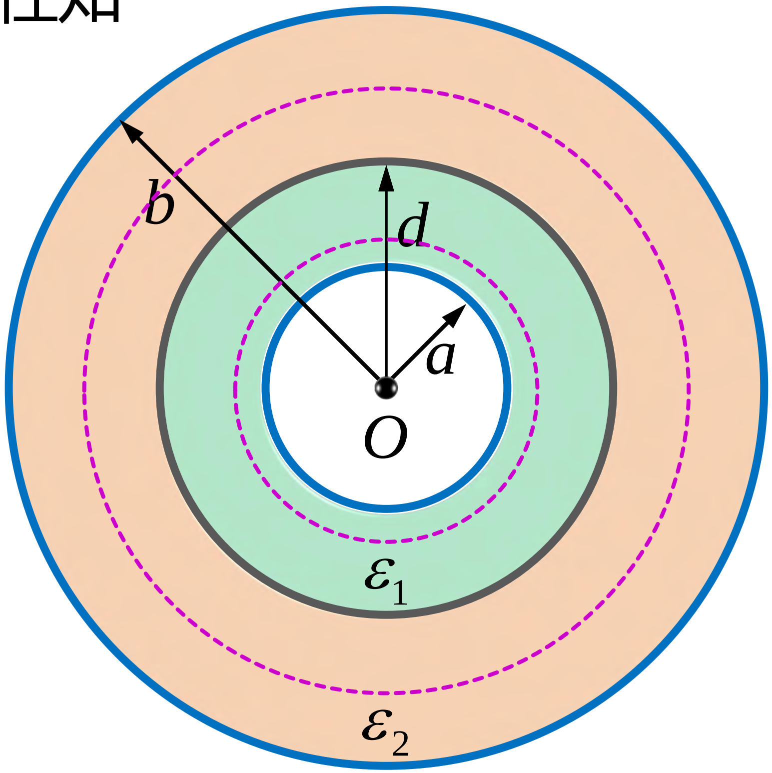
（2）E_1 和 E_2 哪个更大？

四、高斯定理应用举例

【例】球形电容器充满两种介质，分界面半径为 d，求电容。

【解】设内导体带电为 Q_0。由对称性知

$$\vec{D}(\vec{r}) = D(r)\hat{r}$$



选以 O 为球心、半径为 r 的球面为高斯面，由高斯定理得：

$$\vec{D} = \begin{cases} \dfrac{Q_0}{4\pi r^2}\hat{r}, & a < r < b \\ 0, & r < a \ \text{or} \ r > b \end{cases}$$

【注】电位移与无介质时相同：$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 = \vec{D}_0$

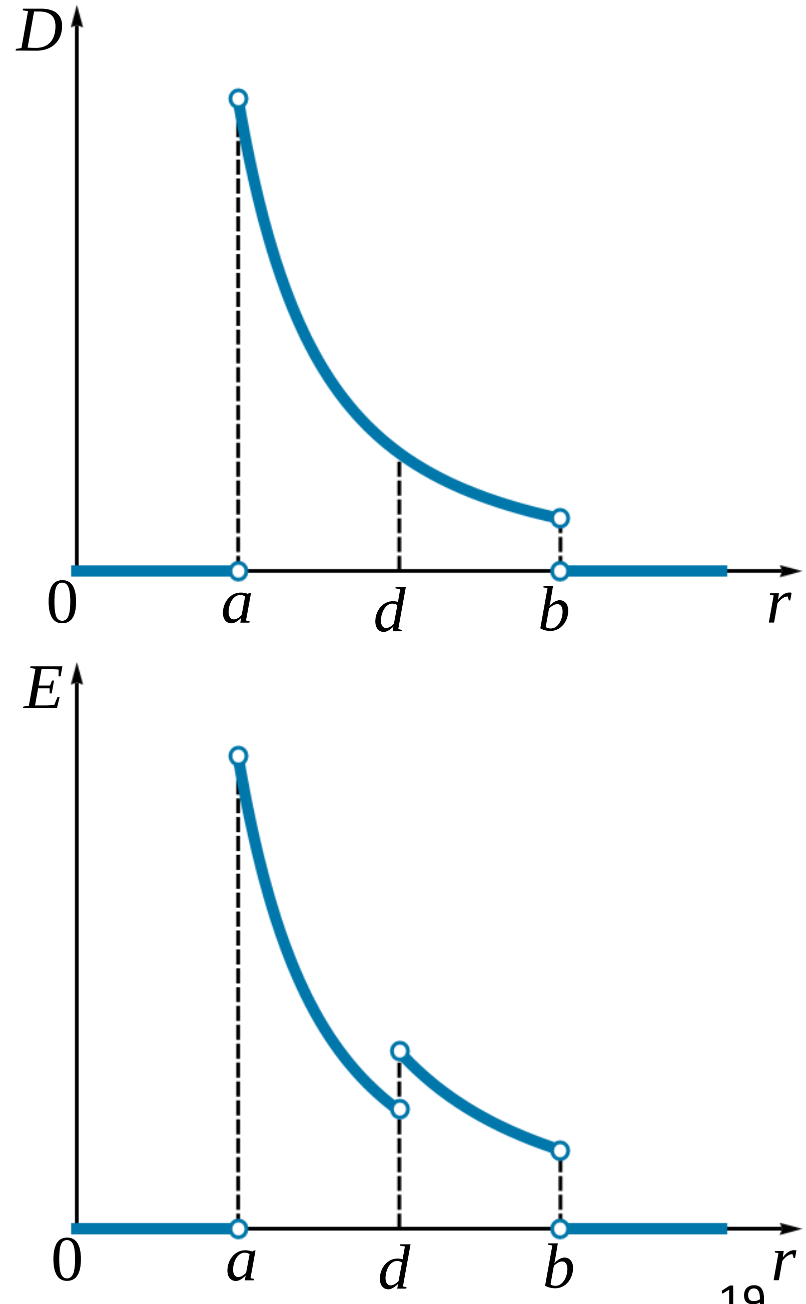
电场为:

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\hat{r}, & a<r<d\\[2ex] \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\hat{r}, & d<r<b\\[2ex] 0, & r<a \ \text{ or } \ r>b\end{cases}$$

【注】电场是无介质时的 $1/\varepsilon_r$：

$$\vec{E}=\vec{E}_0/\varepsilon_r$$

【注】两种介质交界面处，电位移与电场只有法向分量；且前者连续，后者不连续。



内、外导体之间的电势差为：

$$V=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}=\left[\int_a^d+\int_d^b\right]\vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{Q_0}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\int_a^d\frac{dr}{r^2}+\frac{1}{\varepsilon_2}\int_d^b\frac{dr}{r^2}\right]$$

$$=\frac{Q_0}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right)+\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\right)\right]$$

$$=\frac{Q_0}{4\pi}\frac{\varepsilon_2 b(d-a)+\varepsilon_1 a(b-d)}{\varepsilon_1\varepsilon_2 abd}$$

所以电容为：

$$\boxed{C=\frac{Q_0}{U}=\frac{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 abd}{\varepsilon_2 b(d-a)+\varepsilon_1 a(b-d)}}$$

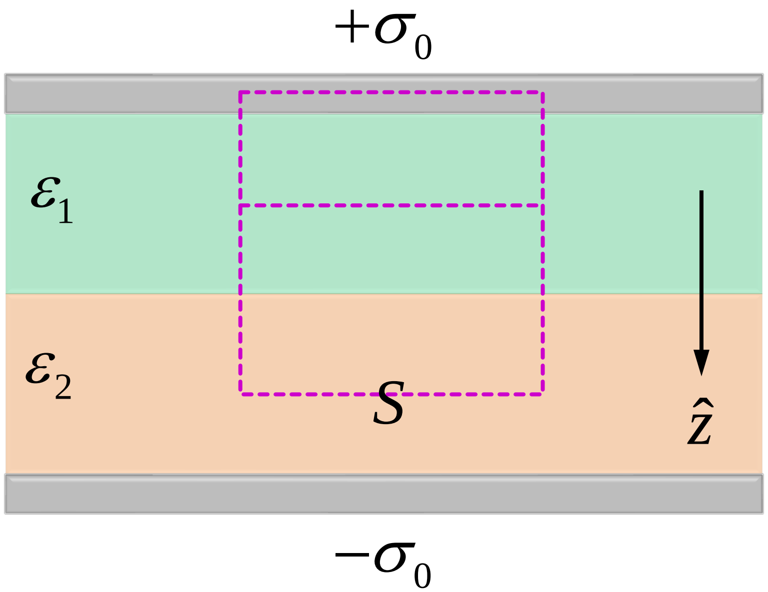
- 极化强度矢量 $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}=\left(\varepsilon_r-1\right)\varepsilon_0\vec{E}=\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)\vec{E}$

$$\Rightarrow\quad \vec{P}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\dfrac{Q_0}{4\pi r^2}\hat{r}=\vec{P}_1, & a<r<d\\[2ex] \dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\dfrac{Q_0}{4\pi r^2}\hat{r}=\vec{P}_2, & d<r<b\\[2ex] 0, & r<a \ \text{ or } \ r>b\end{cases}$$

- 极化电荷只以面电荷形式出现于界面处：

$$\begin{cases}\text{两种介质交界面：}\ \sigma_{12}'=\left[\hat{r}\cdot\left(\vec{P}_1-\vec{P}_2\right)\right]_{r=d}=\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\dfrac{Q_0}{4\pi d^2}\\[2ex] \text{内导体与介质交界面：}\ \sigma_1'=\left[-\hat{r}\cdot\vec{P}_1\right]_{r=a}=-\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\dfrac{Q_0}{4\pi a^2}\\[2ex] \text{外导体与介质交界面：}\ \sigma_2'=\left[+\hat{r}\cdot\vec{P}_2\right]_{r=b}=+\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\dfrac{Q_0}{4\pi b^2}\end{cases}$$

【例】平行板电容器中填充了相对介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 的两种简单介质，已知极板上的电荷面密度分别为 $\pm\sigma_0$，试求电容器内部的 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 与束缚电荷分布（忽略边缘效应）。



【解】由对称性知：$\vec{D} = D(z)\hat{z}$

由高斯定理得：$\boxed{\vec{D} = \sigma_0\hat{z} = \vec{D}_1 = \vec{D}_2}$

电场为：$\boxed{\vec{E}_1 = \dfrac{\vec{D}_1}{\varepsilon_0\varepsilon_1} = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_1}\hat{z}, \quad \vec{E}_2 = \dfrac{\vec{D}_2}{\varepsilon_0\varepsilon_2} = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_2}\hat{z}}$

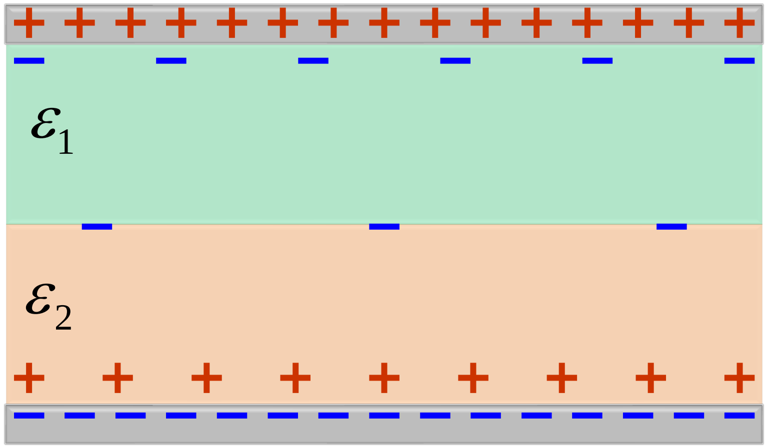
【注】$\boldsymbol{D}$ 与无介质时相同，$\boldsymbol{E}$ 是无介质时的 $1/\varepsilon_r$。

极化强度矢量 $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\vec{D} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\vec{D}$

$$\Rightarrow \quad \vec{P}_1 = \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1}\sigma_0 \hat{z}, \quad \vec{P}_2 = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}\sigma_0 \hat{z}$$

极化电荷只以面电荷形式出现于界面处:

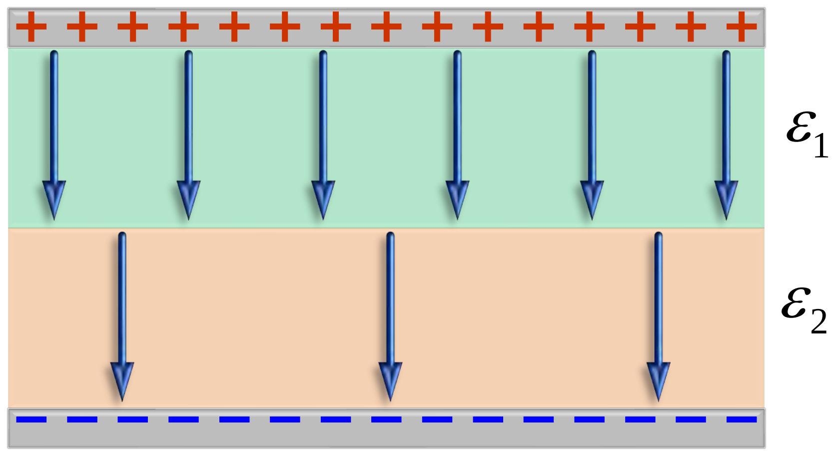
$$\begin{cases} \boxed{\sigma_1' = -\hat{z}\cdot\vec{P}_1 = -\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1}\sigma_0} \\ \boxed{\sigma_{12}' = -\hat{z}\cdot\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) = \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\sigma_0} \\ \boxed{\sigma_2' = +\hat{z}\cdot\vec{P}_2 = +\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}\sigma_0} \end{cases}$$



$(\varepsilon_1 < \varepsilon_2)$

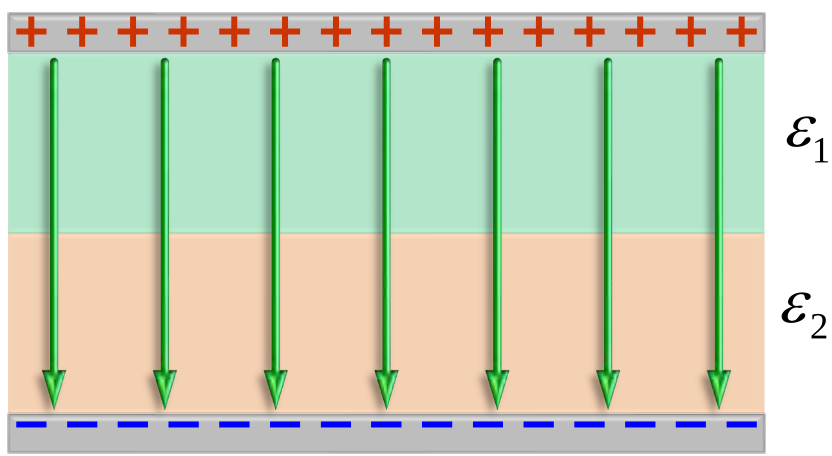
$(\varepsilon_1 < \varepsilon_2)$

E 线：

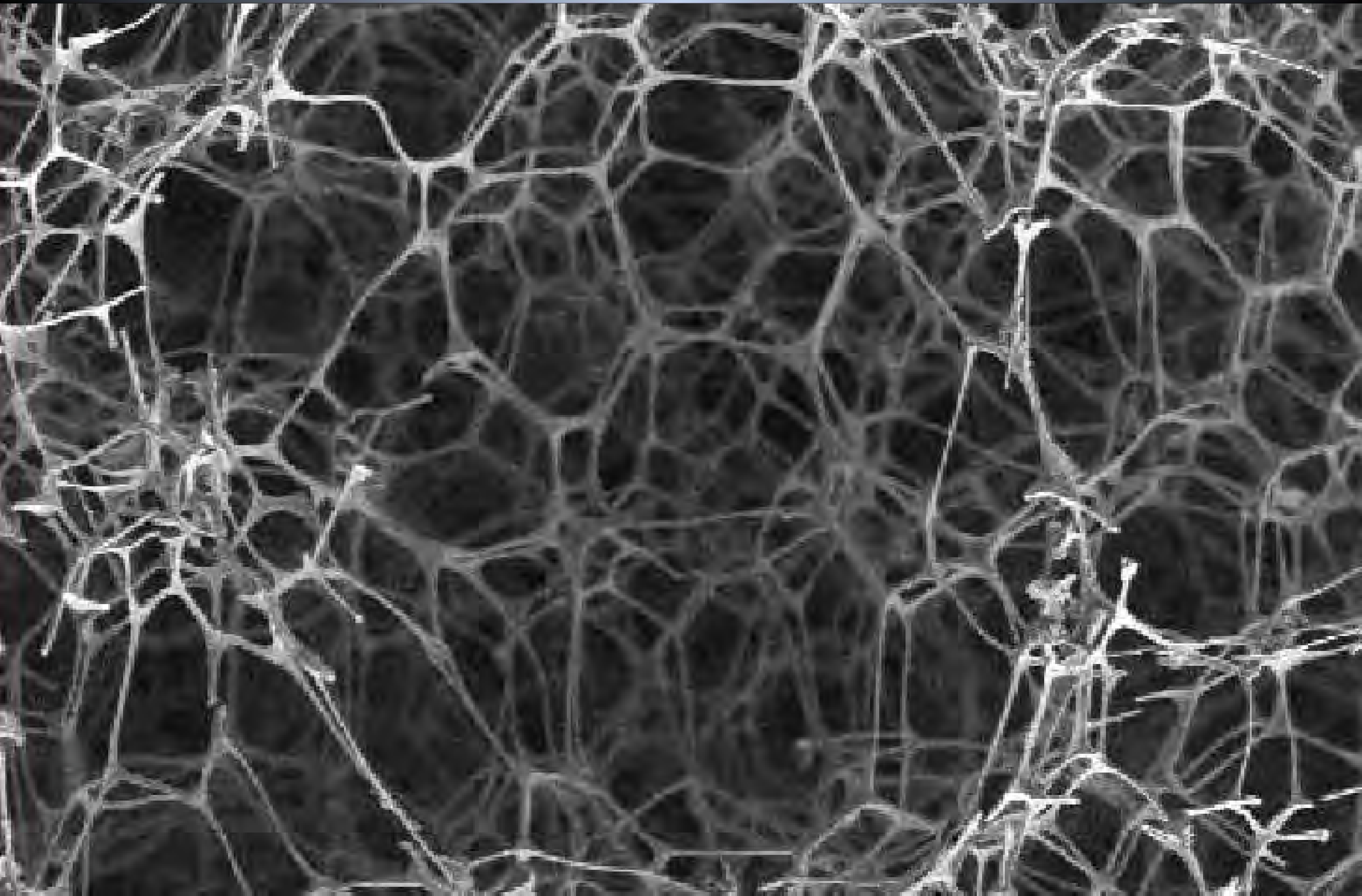


$(\varepsilon_1 < \varepsilon_2)$

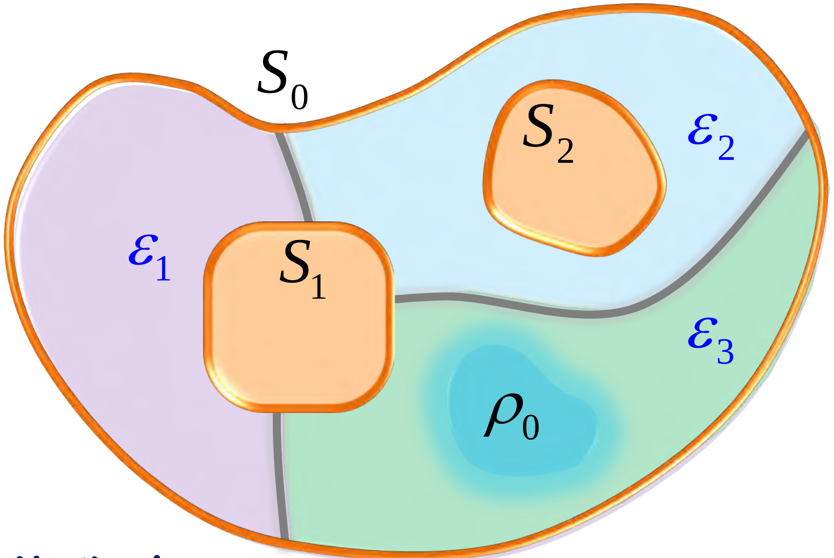
D 线：



§2-7 唯一性定理



一、唯一性定理



简单起见，设求解区域 V 的边界

$$S = \partial V = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_N$$

均为导体表面（可无外边界 S_0）

设区域 V 内部有 已知的自由电荷分布

以及 已知的分区均匀介质。

（1）若给定各导体边界的电势 c_i（$i = 0,1,2, \ldots$），

则 V 内的电势唯一确定；

（2）若给定各内导体边界的总电量 Q_k（$k = 1,2, \ldots$），

则 V 内的电场唯一确定。

唯一性定理的证明

假如有两个解：

$$\left(\varphi', \vec{E}' = -\nabla\varphi', \vec{D}' = \varepsilon\vec{E}'\right) \quad \text{and} \quad \left(\varphi'', \vec{E}'' = -\nabla\varphi'', \vec{D}'' = \varepsilon\vec{E}''\right)$$

二者之差记为

$$\left(\varphi, \vec{E} = -\nabla\varphi, \vec{D} = \varepsilon\vec{E}\right) = \left(\varphi' - \varphi'', \vec{E}' - \vec{E}'', \vec{D}' - \vec{D}''\right)$$

- **在 V 内部**，两解同时满足已知的自由电荷分布，即

$$\nabla\cdot\vec{D}'(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r}) = \nabla\cdot\vec{D}''(\vec{r}), \quad \left(\vec{r}\in V\right)$$

$\Rightarrow$ $\nabla\cdot\vec{D}(\vec{r}) = 0, \quad \left(\vec{r}\in V\right)$ V 内部无自由电荷

$\Rightarrow$ D 线只能起、止于 V 的边界！

- **在 V 的边界上**，若两解均符合给定的电势，即

$$\varphi'\big|_{S_i} = c_i = \varphi''\big|_{S_i}, \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\Longrightarrow \varphi\big|_{S_i} = 0, \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

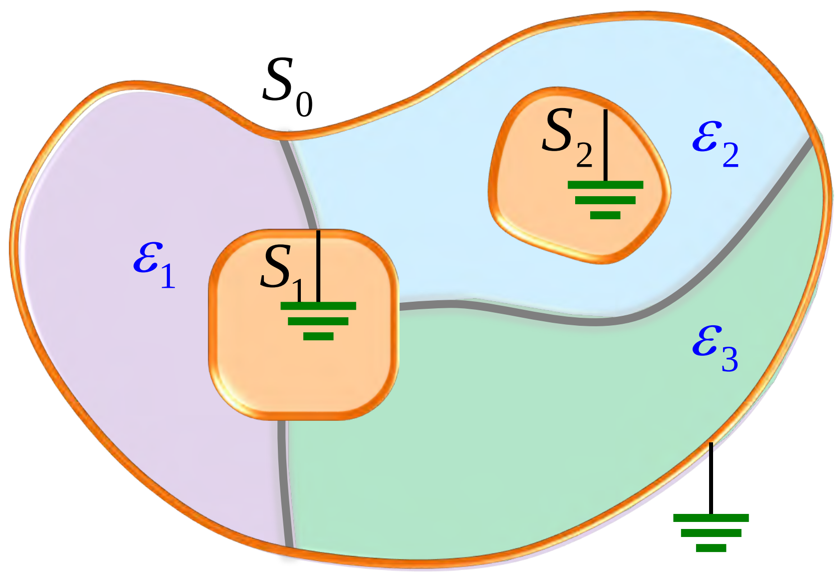
$\Longrightarrow$ ***D* 线也不能由 *V* 的边界处发出或接受！**

因此，在区域 V 内部

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \vec{D}' - \vec{D}'' = 0$$

$$\Longrightarrow \vec{E} = \vec{E}' - \vec{E}'' = 0$$

$$\Longrightarrow \varphi = \varphi' - \varphi'' = 0$$

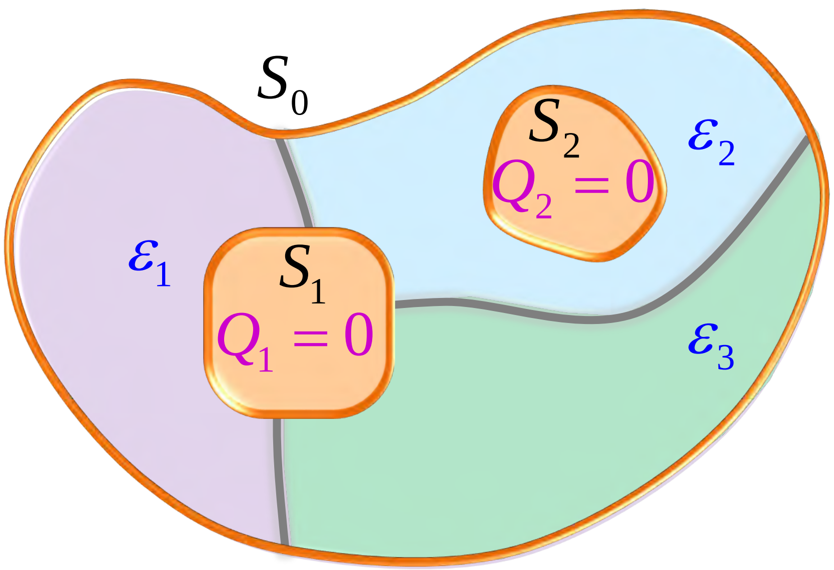


- **在 V 的内边界上**，若两解均符合给定的电量，即

$$\oiint_{S_k} \vec{D}' \cdot d\vec{S} = Q_k = \oiint_{S_k} \vec{D}'' \cdot d\vec{S}, \quad (k = 1,2,\cdots)$$

$$\Rightarrow \oiint_{S_k} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (k = 1,2,\cdots)$$

各内导体边界电量为零



作为静电问题的解，两解必然也满足

$$\varphi'\big|_{S_i} = c_i', \qquad \varphi''\big|_{S_i} = c_i'', \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi\big|_{S_i} = c_i' - c_i'' = c_i, \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

而由各内导体边界电量为零还可断言

$$c_0 = c_1 = c_2 = \cdots$$

$\Longrightarrow$ D 线也不能由 V 的边界处发出或接受！

因此，在区域 V 内部

$$\vec{D} = \vec{D}' - \vec{D}'' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = \vec{E}' - \vec{E}'' = 0$$

二、介质界面垂直于电场线

在两种情形下，

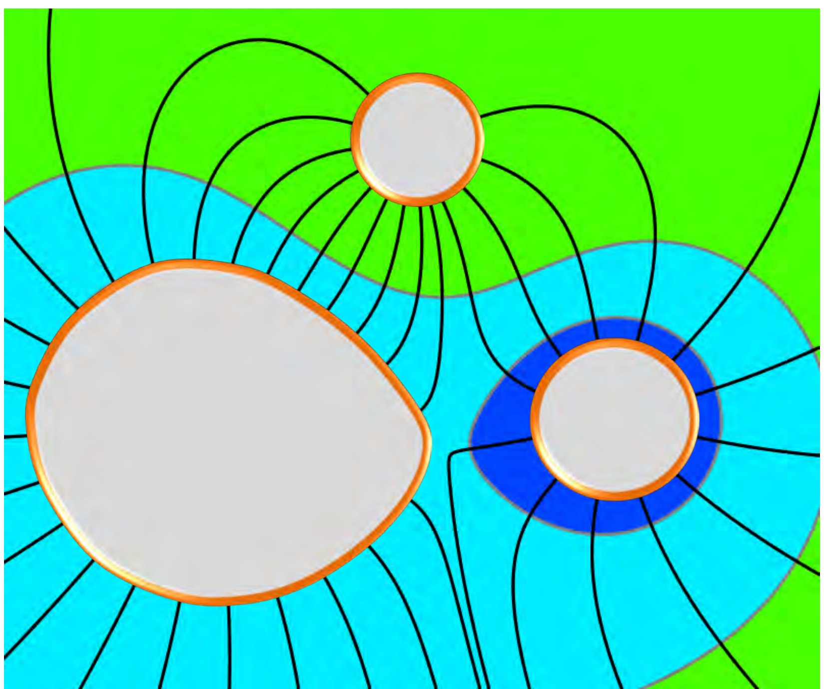
有介质时的电位移 D 与无介质时的电位移 D_0 相同，

有介质时的电场 E 则等于无介质时的电场 E_0 的 $1/\varepsilon_r$：

情形1：整个空间充满同一种均匀介质；

情形2：空间中有若干种分区均匀介质，

但每一种介质都充满两个等势面之间的区域。



$$\begin{cases} \vec{D} = \vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E}_0 \\ \vec{E} = \vec{E}_0 / \varepsilon_r \end{cases}$$

【注】有无介质时等势面相同，
电势数值不同。

【注】有无介质时自由电荷相同。

证明

- 无介质时的解（$\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{D}_0=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$）满足环路定理以及高斯定理——即符合于已知的自由电荷分布：

$$\oiint_S \vec{D}_0\cdot d\vec{S}=Q_{0内},\quad \oint_C \vec{E}_0\cdot d\vec{l}=0$$

- 由唯一性定理，所猜有介质时的解是否正确取决于其是否满足：

（1）环路定理；

（2）高斯定理；

（3）合适的边界条件

——区域边界上的电势或者各内导体边界的电量。

- 由于 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_0=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$，因此

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}_0\cdot d\vec{S}=Q_{0内}$$

即所猜解符合于已知的自由电荷分布。下面只需证明所猜电场 $\boldsymbol{E}$ 确实满足环路定理、且符合于合适的边界条件即可。

- **若边界条件是给定各内导体边界的电量**，则所猜解符合于该边界条件，无需再来证明。

- 若边界条件是给定各导体的电势，一般性的讨论比较罗嗦，后面以例子形式加以说明。下面只证明所猜电场 $\boldsymbol{E}$ 确实满足环路定理。

情形1：整个空间充满同一种简单介质。

此时 ε_r 为常数，因此

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \cdot d\vec{l}$$

$$= \oint_C \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_r} \oint_C \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

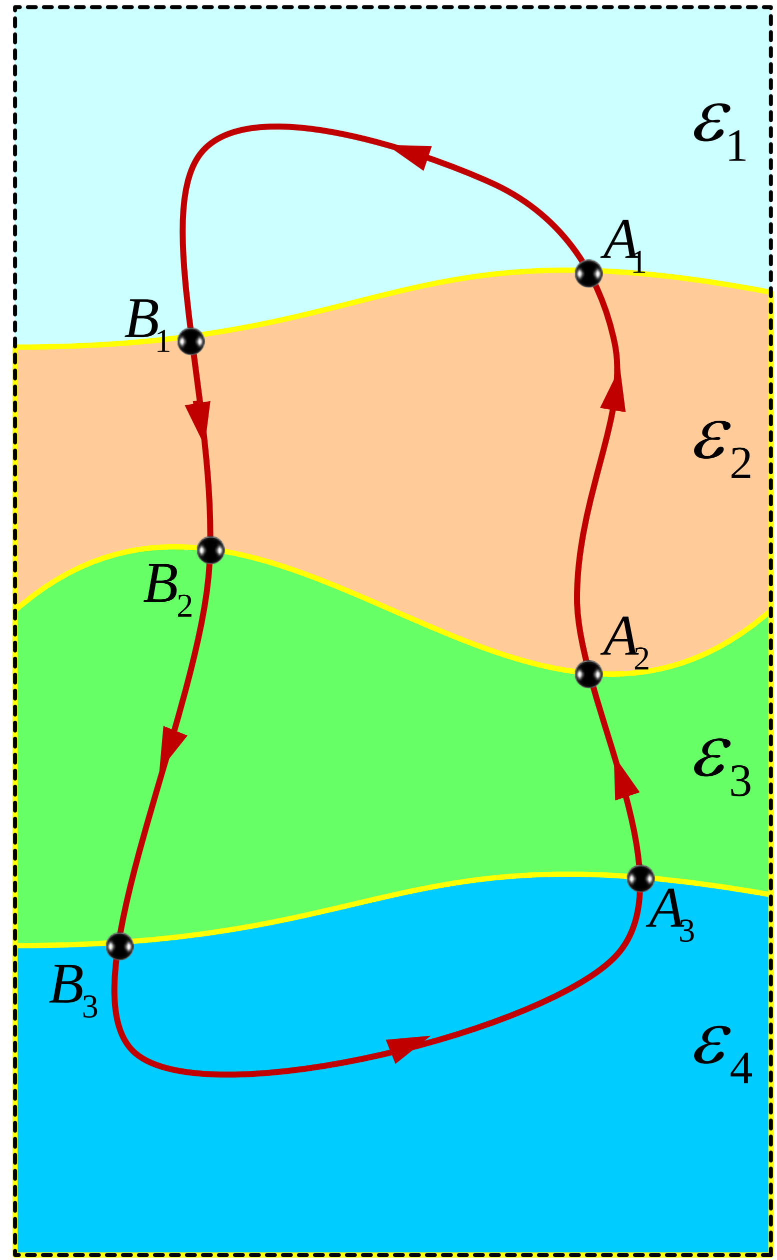
情形2：空间中有分区均匀介质，且介质界面与电场垂直。

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \left[\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\int_{A_1}^{B_1} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\int_{B_1}^{B_2} + \frac{1}{\varepsilon_{r3}}\int_{B_2}^{B_3}\right]\vec{E}_0\cdot d\vec{l}$$

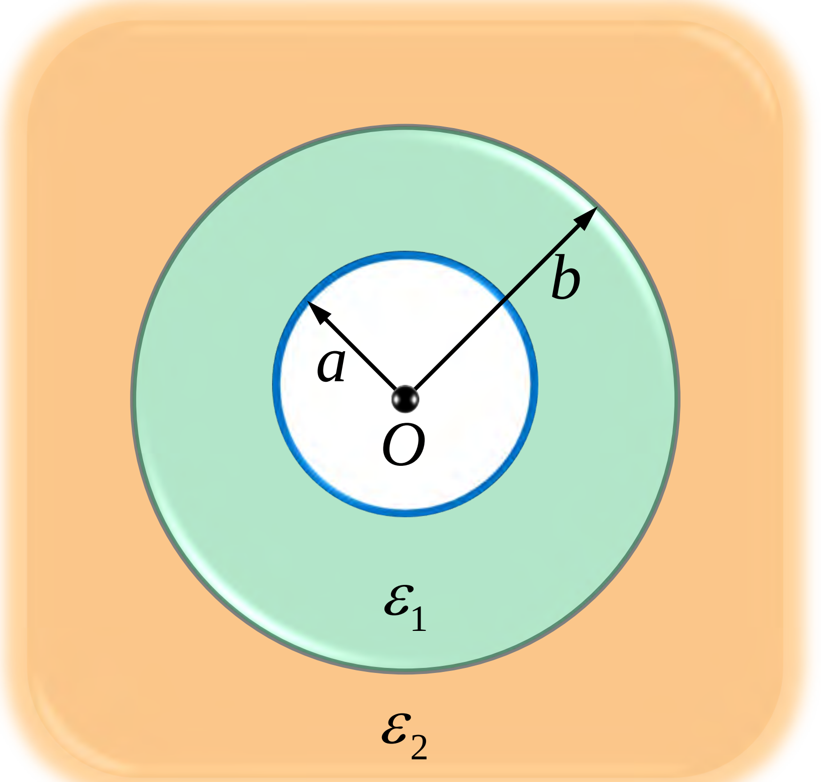
$$+\left[\frac{1}{\varepsilon_{r4}}\int_{B_3}^{A_3} + \frac{1}{\varepsilon_{r3}}\int_{A_3}^{A_2} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\int_{A_2}^{A_1}\right]\vec{E}_0\cdot d\vec{l}$$

$$\Big\downarrow\ \boxed{\varphi(A_i)=\varphi(B_i)}$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$



【例】 半径为 a 的导体球外有两种均匀介质，分界面是半径为 b 的球面。试在给定导体电量 Q_0 或者给定导体电势 V_0 两种边界条件下分别确定电场分布。



【解】 介质界面为等势面。

(1) 若给定导体电量 Q_0，则

$$\vec{D}=\vec{D}_0=\begin{cases}0, & r<a \\ \dfrac{Q_0\hat{r}}{4\pi r^2}, & r>a\end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=\begin{cases}0, & r<a \\ \dfrac{Q_0\hat{r}}{4\pi\varepsilon_1 r^2}, & a<r<b \\ \dfrac{Q_0\hat{r}}{4\pi\varepsilon_2 r^2}, & r>b\end{cases}}$$

（2）若给定导体电势 V_0，设导体电量 Q_0，则

$$\vec{E}=\begin{cases}0, & r<a \\ \dfrac{Q_0\hat{r}}{4\pi\varepsilon_1 r^2}, & a<r<b \\ \dfrac{Q_0\hat{r}}{4\pi\varepsilon_2 r^2}, & r>b\end{cases}$$

$$\Rightarrow V_0=-\int_{\infty}^{a}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

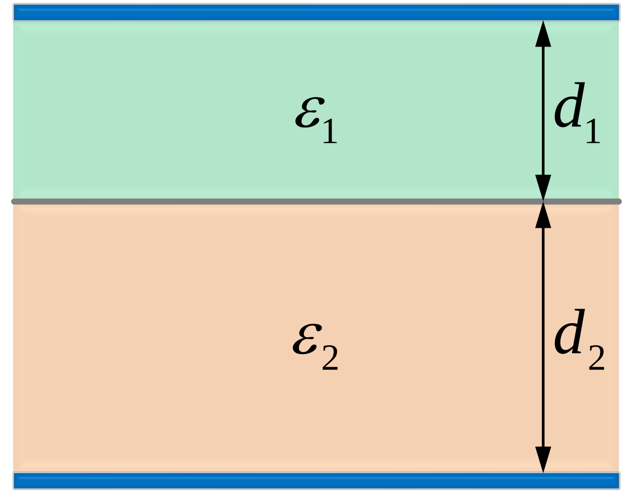
$$=\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_2 b}+\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$=Q_0\frac{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)a+\varepsilon_2 b}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 ab}$$

$$\Rightarrow Q_0=\frac{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 abV_0}{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)a+\varepsilon_2 b}$$

将其代入电场表达式即可。

【例】 如图，平行板电容器间填充有介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 的两种介质，上极板与下极板之间的电压为 V，试求上极板的自由面电荷密度。忽略边缘效应。

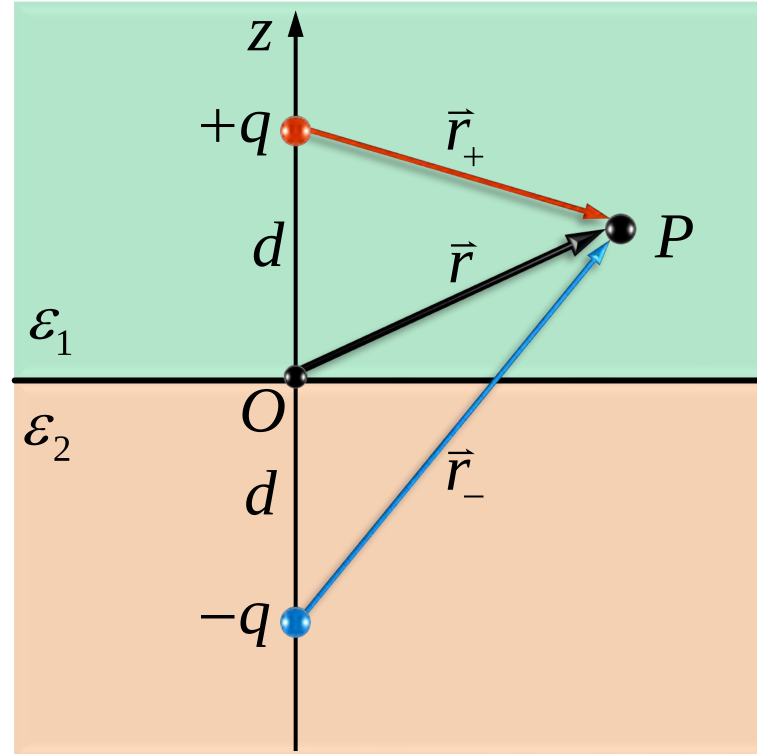


【解】 介质界面为等势面。设上极板面电荷密度为 σ_0。

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow V = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_2} d_2 = \frac{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sigma_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_0 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2} \sigma_0}$$

【例】无限大平面 $z=0$ 将介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 的两种电介质隔开，在 z 轴上 $z=\pm d$ 处分别放置等量异号点电荷 $\pm q$，求空间电场分布。



【解】介质界面为等势面。

无电介质时的电场：

$$\vec{E}_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\hat{r}_+}{r_+^2}-\frac{\hat{r}_-}{r_-^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\vec{E}_0=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\dfrac{\hat{r}_+}{r_+^2}-\dfrac{\hat{r}_-}{r_-^2}\right), & (z>0)\\[2ex] \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\vec{E}_0=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_2}\left(\dfrac{\hat{r}_+}{r_+^2}-\dfrac{\hat{r}_-}{r_-^2}\right), & (z<0)\end{cases}}$$

三、介质界面平行于电场线

设自由电荷完全由导体所携带。

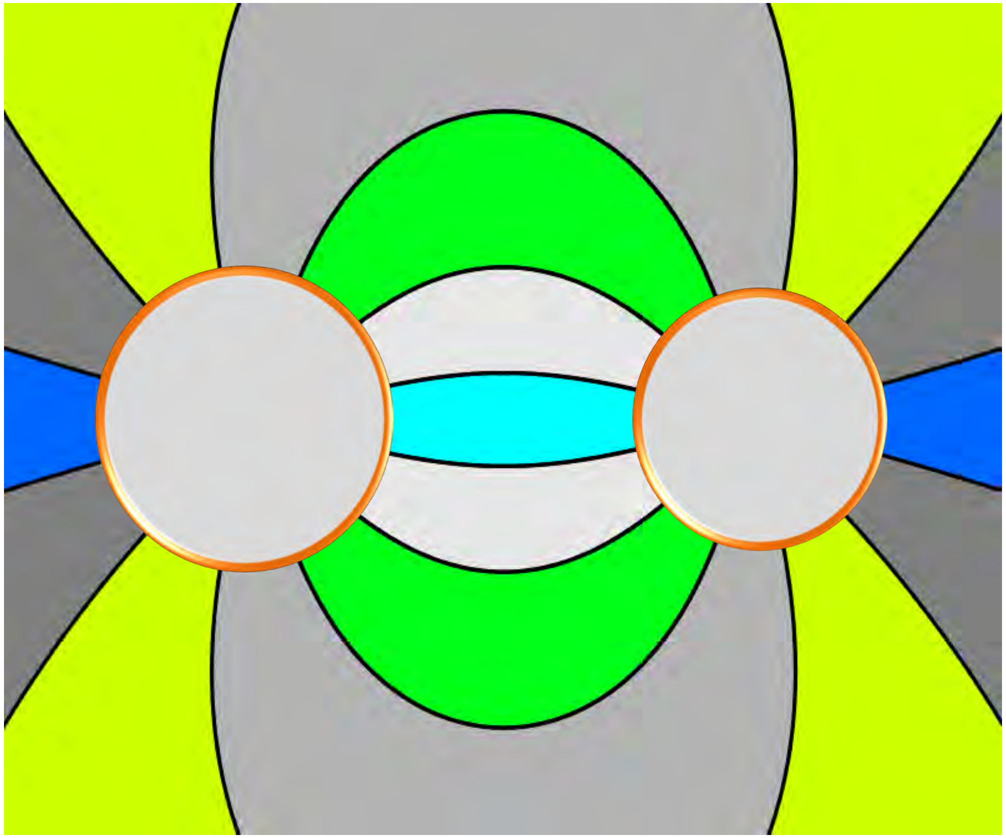
若空间中填充有分区均匀的电介质，

且每一种介质都充满某个电场线管，

则有介质时的电场 E 与无介质时的电场 E_0 具有相同的构形。

$$\vec{E} = k\vec{E}_0$$

【注】此结论适用范围极窄，只适用于仅有两导体的情况，而且还要求两导体带等量异号电荷，或者一个导体完全被另一导体所包围。



证明

- 环路定理

$$\oint_C \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C k\vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = k\oint_C \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0$$

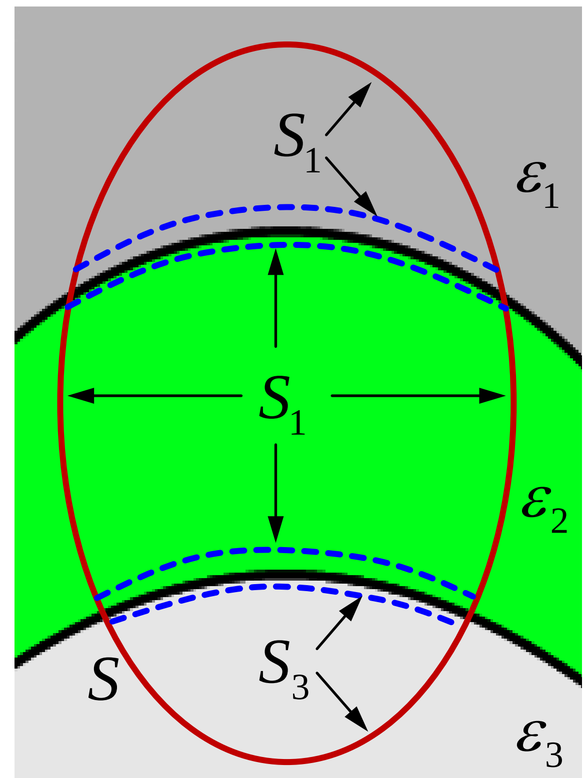
- 高斯定理

对于不含导体的任一闭曲面

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \varepsilon\vec{E} \cdot d\vec{S} = k\oiint_S \varepsilon\vec{E}_0 \cdot d\vec{S}$$

由于介质界面上并无自由电荷分布，电位移的法向分量连续，故

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = k\left[\varepsilon_{r1}\oiint_{S_1} + \varepsilon_{r2}\oiint_{S_2} + \varepsilon_{r2}\oiint_{S_3}\right]\vec{D}_0 \cdot d\vec{S}$$



因此对于不含导体的任一闭曲面有

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$$

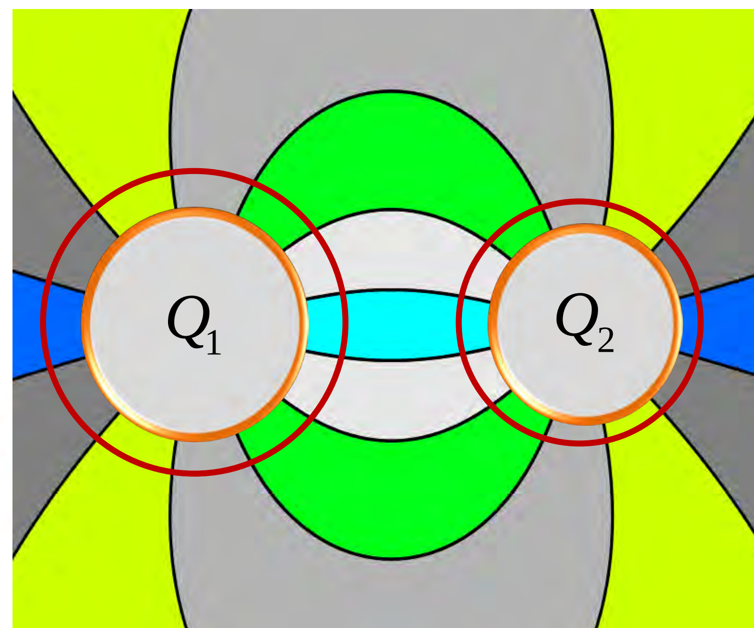
- 边界条件

所猜电场在导体表面外侧确与导体表面垂直，导体表面仍然为等势面。

为了符合于内导体电量，可令：

$$\oiint_{S_k} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_k,\ k = 1,2,\cdots$$

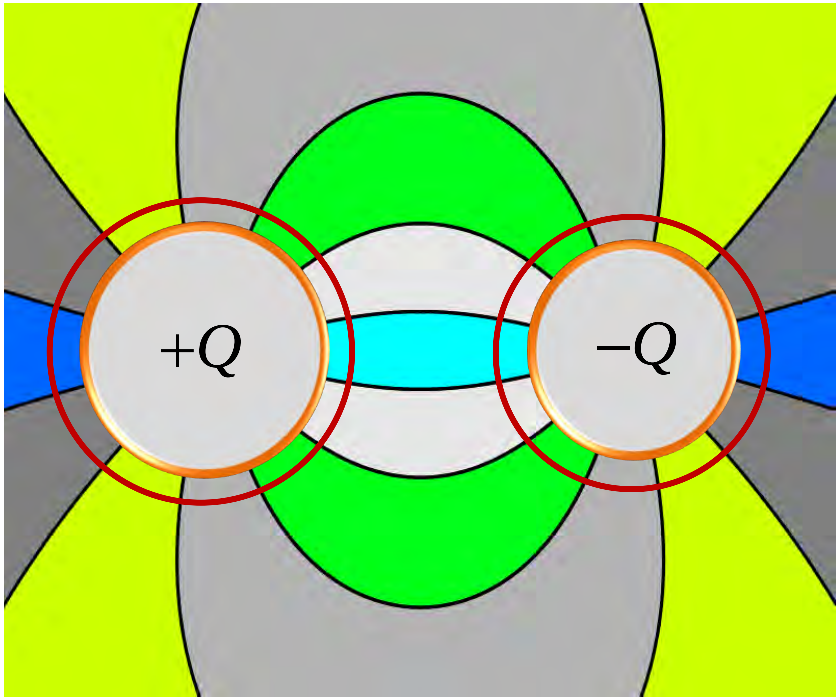
从而使得边界条件自动成立。



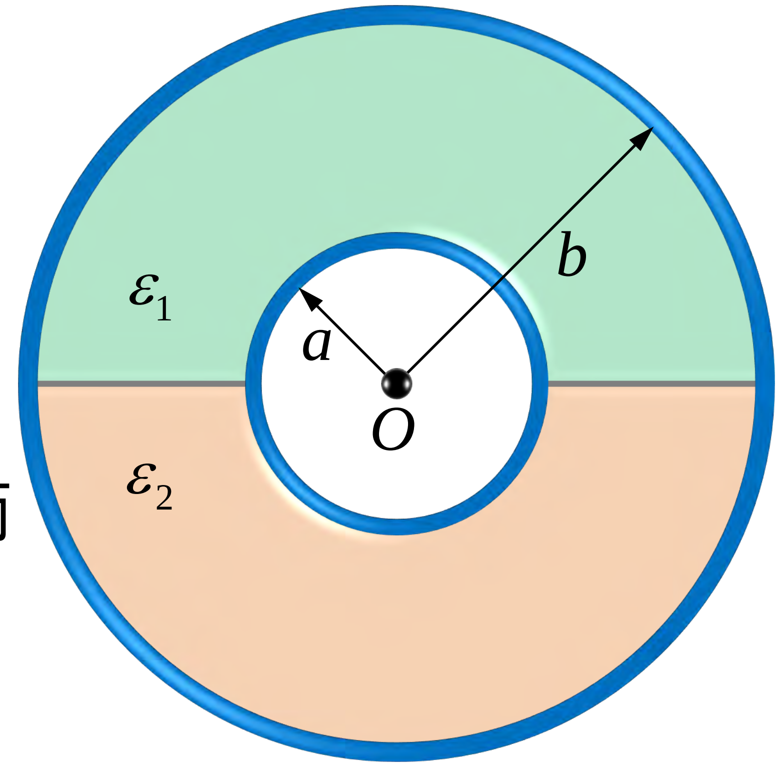
(1) 对于一个导体情形，或者虽有两个导体，但其中一个完全被另一个所包围，k 只需满足一个代数方程，故由此方程可唯一确定 k。

(2) 对于 N 个导体情形，k 满足 N 个代数方程，这些方程通常并不自洽，从而导致无解。猜解失败。

(3) 对于两个导体情形，当二者所带电量等量异号时，k 所满足的两个代数方程只有一个是独立的，因而也可唯一确定 k。



【例】球形电容器带电量 Q_0，极板间充满介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 的两种介质，求各区域的电场和各界面的电荷。



【例】介质界面与电场线重合。因而

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

由高斯定理得到：

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \varepsilon_1\vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \varepsilon_2\vec{E}\cdot d\vec{S} = \varepsilon_1 E\cdot 2\pi r^2 + \varepsilon_2 E\cdot 2\pi r^2 = Q_0$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q_0\hat{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2} = \frac{2\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{a^2}{r^2}\hat{r} = k\vec{E}_0 \quad \text{where } k = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}$$

$$\boxed{\vec{E}=\frac{2\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{a^2}{r^2}\hat{r}=k\vec{E}_0 \quad \text{where } k=\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}$$

内导体球表面的自由电荷分布：

$$\begin{cases} \sigma_{01}=D_{1n}\big|_{r=a}=\varepsilon_1 E_n\big|_{r=a}=\dfrac{2\varepsilon_1\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \\ \sigma_{02}=D_{2n}\big|_{r=a}=\varepsilon_2 E_n\big|_{r=a}=\dfrac{2\varepsilon_2\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \end{cases}$$

内导体与介质交界面处的极化电荷分布：

$$\begin{cases} \sigma_1'=-P_{1n}\big|_{r=a}=-\left(\varepsilon_1-\varepsilon_0\right)E\big|_{r=a}=-\dfrac{2\left(\varepsilon_1-\varepsilon_0\right)\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \\ \sigma_2'=-P_{2n}\big|_{r=a}=-\left(\varepsilon_2-\varepsilon_0\right)E\big|_{r=a}=-\dfrac{2\left(\varepsilon_2-\varepsilon_0\right)\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \end{cases}$$

内导体与介质交界面处的总电荷分布分布：

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{01} + \sigma_1' = \dfrac{2\varepsilon_1\sigma_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \dfrac{2\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_0\right)\sigma_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \dfrac{2\varepsilon_0\sigma_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \\ \sigma_2 = \sigma_{02} + \sigma_2' = \dfrac{2\varepsilon_2\sigma_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \dfrac{2\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_0\right)\sigma_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \dfrac{2\varepsilon_0\sigma_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \end{cases}$$

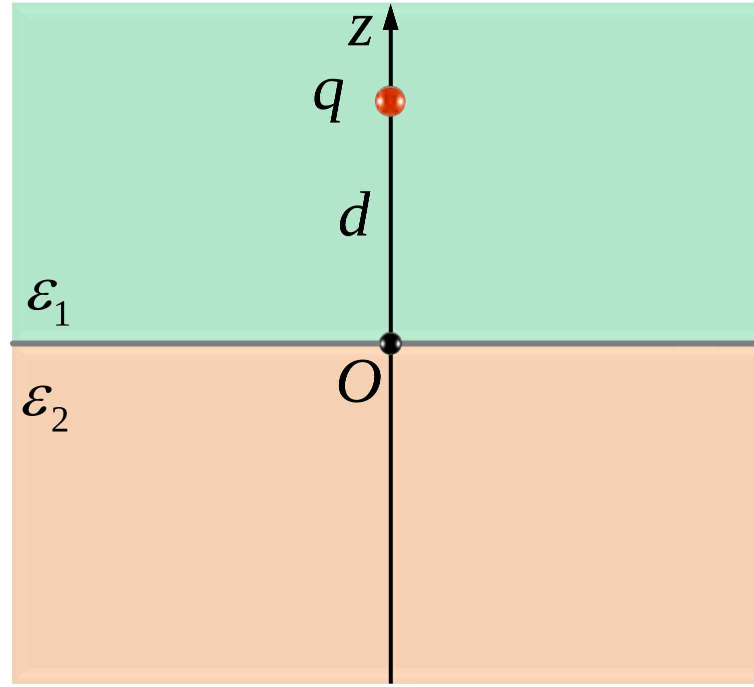
外表面处的电荷分布可类似得到，而在介质界面上没有自由电荷极化电荷。导体与介质交界面处，恒有

$$\sigma = k\sigma_0 = \frac{2\varepsilon_0\sigma_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

没有介质时，内（外）导体表面的电荷均匀分布。有介质时，自由电荷和极化电荷在内（外）导体与介质交界面处都不是均匀的，而二者之和得到的总电荷密度是均匀的。

四、电像法

【例】相对介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 的两种介质充满全空间，分界面为 xy 平面。第一种介质中到分界面的距离为 d 处有一点电荷 q，试求电场以及界面上的极化电荷分布，求各区域的电场和各界面的电荷。



【解】空间任一点处的电场由三部分电荷按照真空中的库仑定律和叠加原理产生：

(1) 点电荷 q；

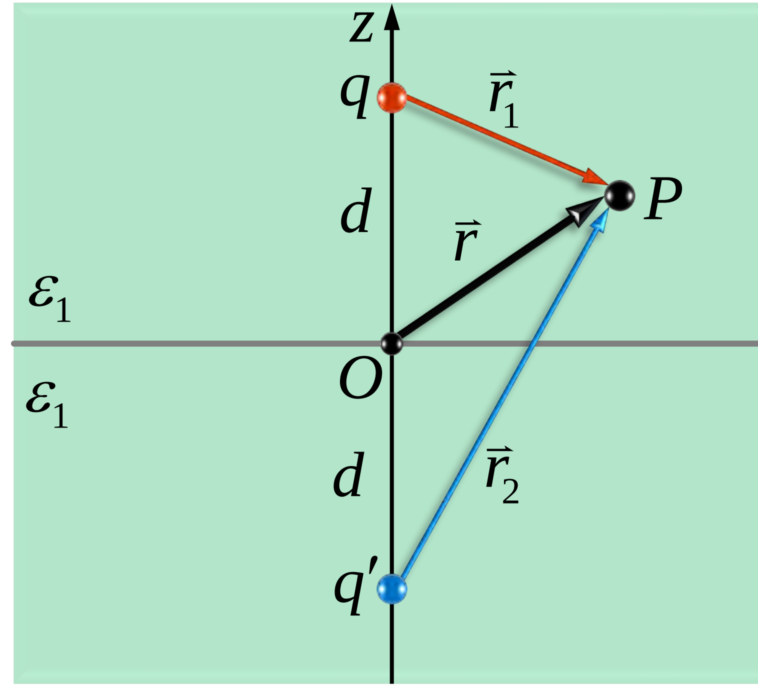
(2) 与 q 处于同一位置的极化点电荷；

(3) 由于介质不均匀而在 xy 平面上出现的极化面电荷。

【注】无穷远处的极化面电荷对电场没有贡献。

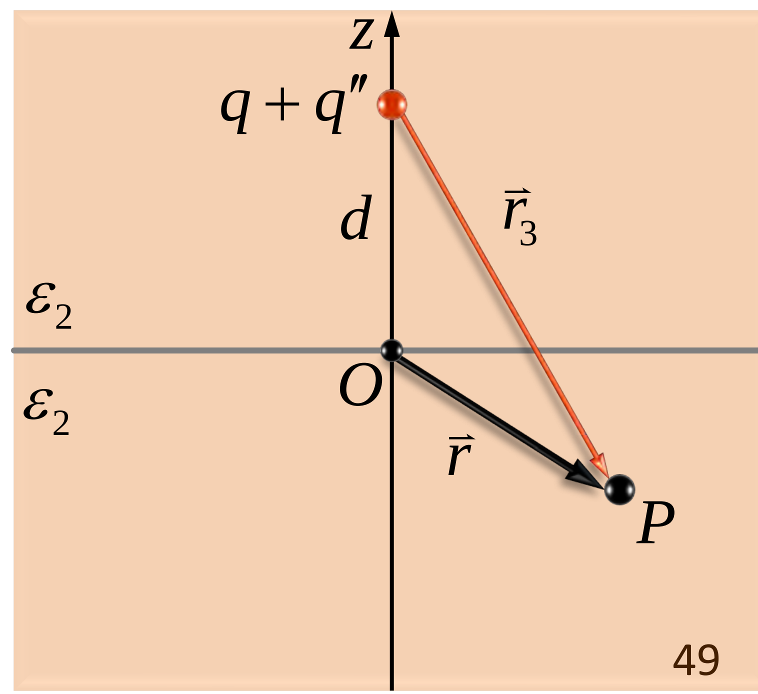
上半空间：像电荷 q' 位于下半空间，全空间的介质为 ε_1。

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left(\dfrac{q}{r_1} + \dfrac{q'}{r_2}\right) \\ \vec{E}_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left(\dfrac{q\vec{r}_1}{r_1^3} + \dfrac{q'\vec{r}_2}{r_2^3}\right) \end{cases}$$



下半空间：像电荷 q'' 与 q 处于同一位置，全空间的介质为 ε_2。

$$\begin{cases} \varphi_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\dfrac{q+q''}{r_3} \\ \vec{E}_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\dfrac{(q+q'')\vec{r}_3}{r_3^3} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left(\dfrac{q}{r_1}+\dfrac{q'}{r_2}\right), \quad \vec{D}_1 = \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{q\vec{r}_1}{r_1^3}+\dfrac{q'\vec{r}_2}{r_2^3}\right) \\ \varphi_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\dfrac{q+q''}{r_3}, \quad \vec{D}_2 = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\left(q+q''\right)\vec{r}_3}{r_3^3} \end{cases}$$

当 $z \to 0$ 时， $r_1 = r_2 = r_3 \triangleq R, \quad \vec{r}_1 = \vec{r}_3$

因此，由 xy 平面上的边值关系：

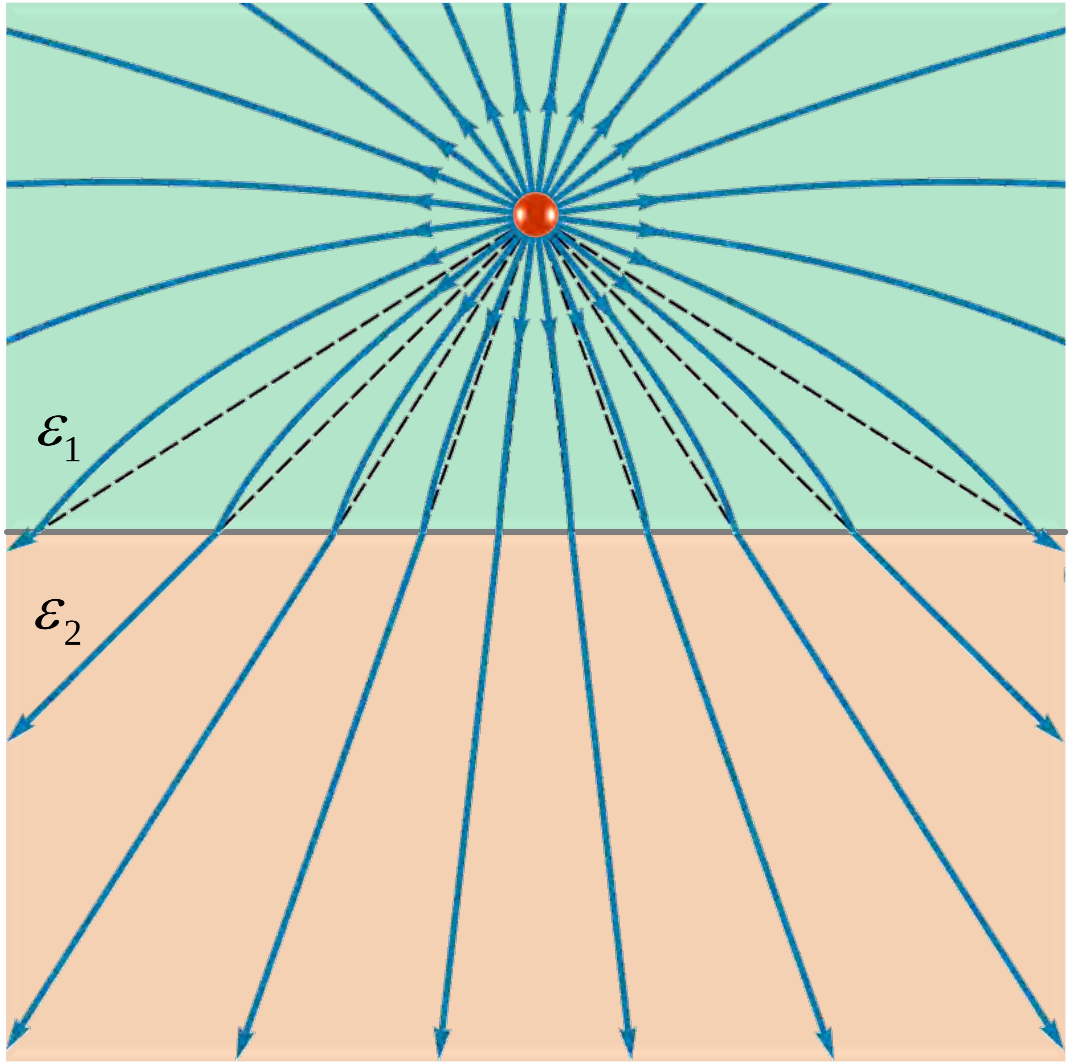
$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{q+q'}{\varepsilon_1} = \dfrac{q+q''}{\varepsilon_2} \\ D_{1z} = D_{2z} \quad \Longrightarrow \quad -q+q' = -\left(q+q''\right) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad q' = -q'' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$$

分析（设 $q > 0$）

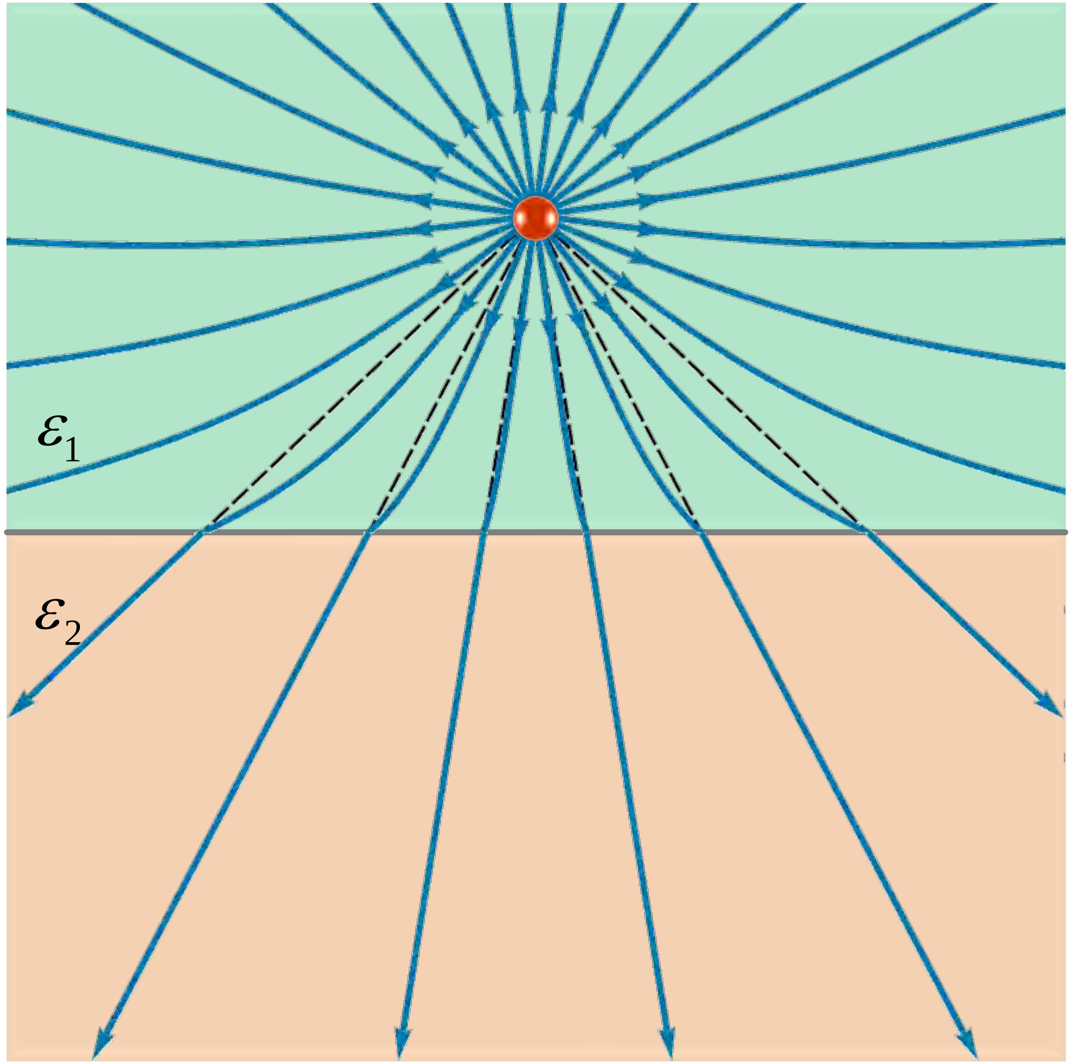
当 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ 时

$$\begin{cases} q' = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q < 0 \\ q + q'' = \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q > 0 \end{cases}$$



当 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ 时

$$\begin{cases} q' = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q > 0 \\ q + q'' = \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q > 0 \end{cases}$$



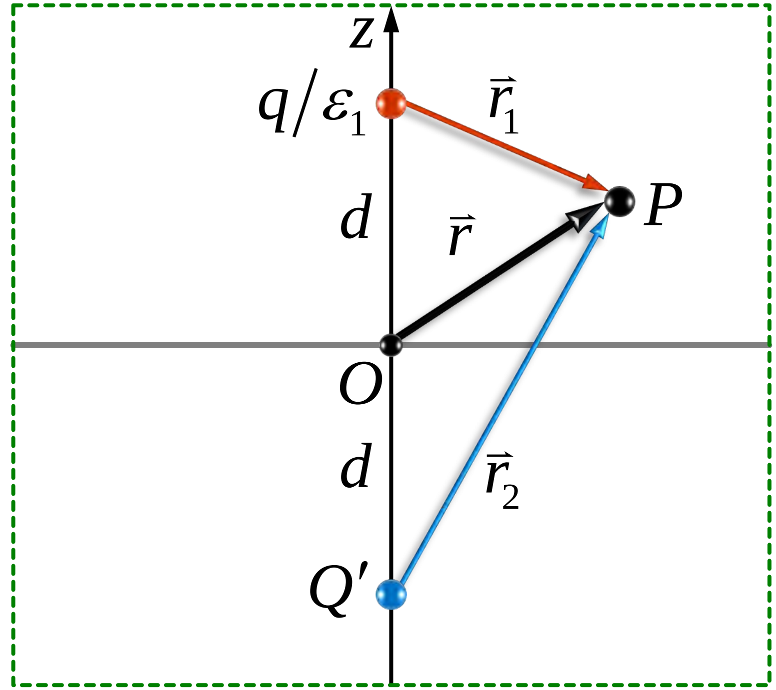
方法二

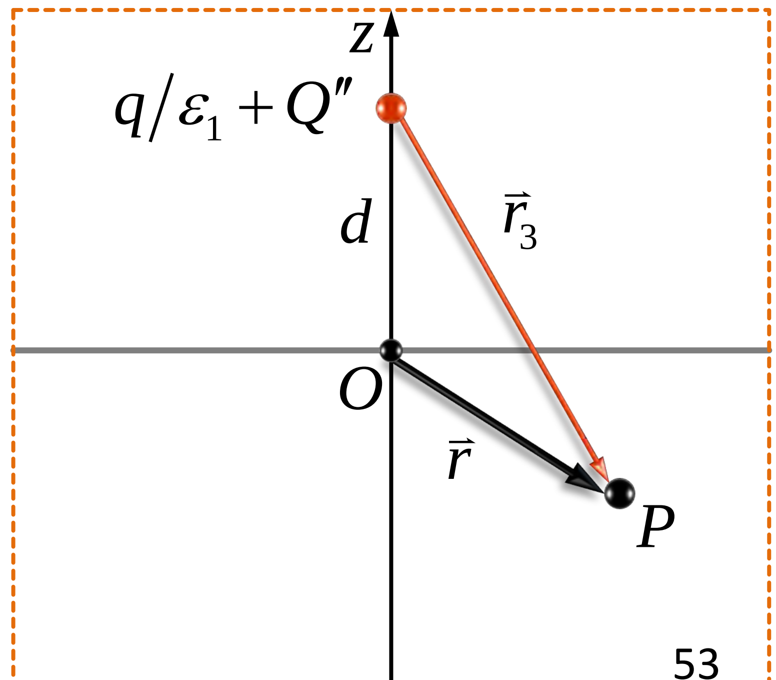
上半空间： 像电荷 Q' 位于下半空间，全空间无介质。

$$\begin{cases}\varphi_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q/\varepsilon_1}{r_1}+\dfrac{Q'}{r_2}\right)\\[2ex] \vec{E}_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{\varepsilon_1}\dfrac{\vec{r}_1}{r_1^3}+\dfrac{Q'\vec{r}_2}{r_2^3}\right)\end{cases}$$

下半空间： 像电荷 Q'' 与 q 处于同一位置，全空间无介质。

$$\begin{cases}\varphi_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q/\varepsilon_1+Q''}{r_3}\\[2ex] \vec{E}_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{\varepsilon_1}+Q''\right)\dfrac{\vec{r}_3}{r_3^3}\end{cases}$$





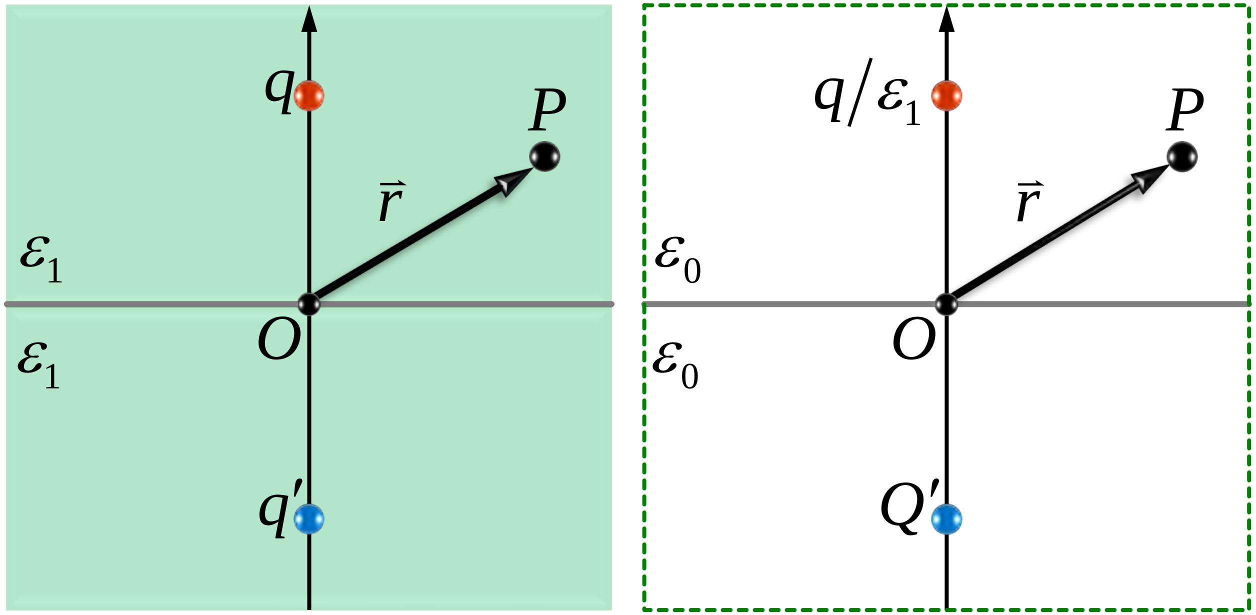
$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q/\varepsilon_1}{r_1} + \dfrac{Q'}{r_2}\right), & \vec{D}_1 = \dfrac{1}{4\pi}\left(q\dfrac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \varepsilon_1 Q'\dfrac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right) \\ \varphi_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q/\varepsilon_1 + Q''}{r_3}, & \vec{D}_2 = \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}q + \varepsilon_2 Q''\right)\dfrac{\vec{r}_3}{r_3^3} \end{cases}$$

当 $z \to 0$ 时， $r_1 = r_2 = r_3 \triangleq R$， $\vec{r}_1 = \vec{r}_3$

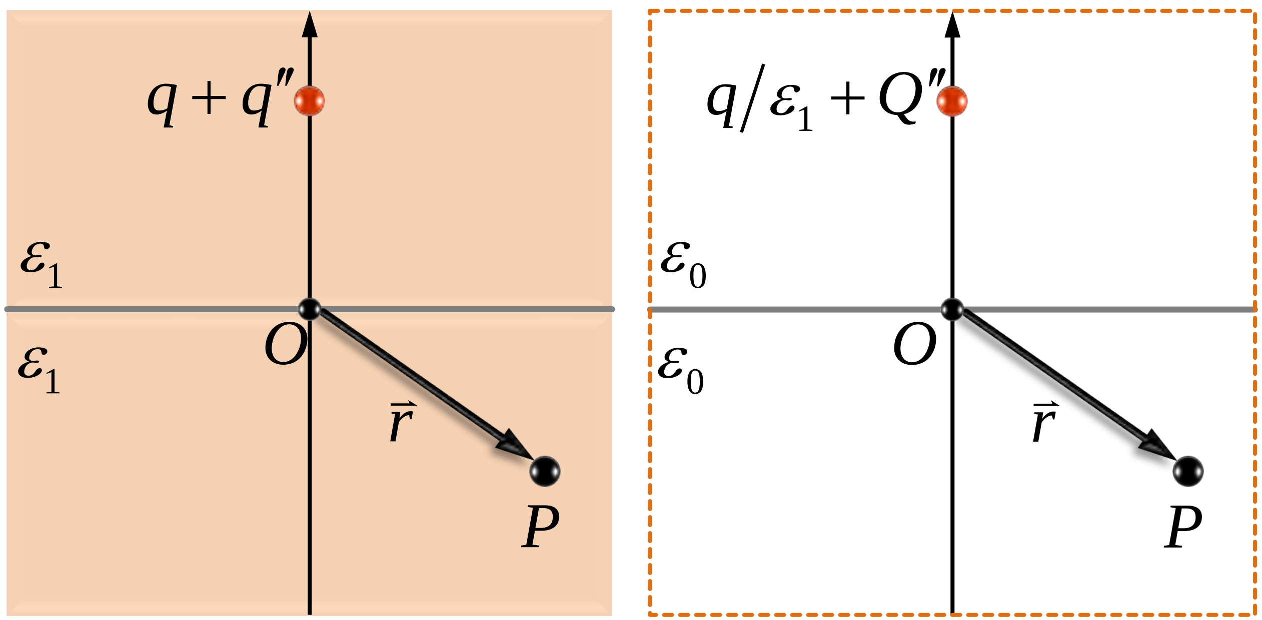
因此，由 xy 平面上的边值关系：

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 & \Longrightarrow \dfrac{q}{\varepsilon_1} + Q' = \dfrac{q}{\varepsilon_1} + Q'' \\ D_{1z} = D_{2z} & \Longrightarrow -q + \varepsilon_1 Q' = -\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}q + \varepsilon_2 Q''\right) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow Q' = Q'' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{q}{\varepsilon_1}$$



$$Q' = \frac{q'}{\varepsilon_1}$$



$$\frac{q}{\varepsilon_1} + Q'' = \frac{q + q''}{\varepsilon_2}$$

Thank You !