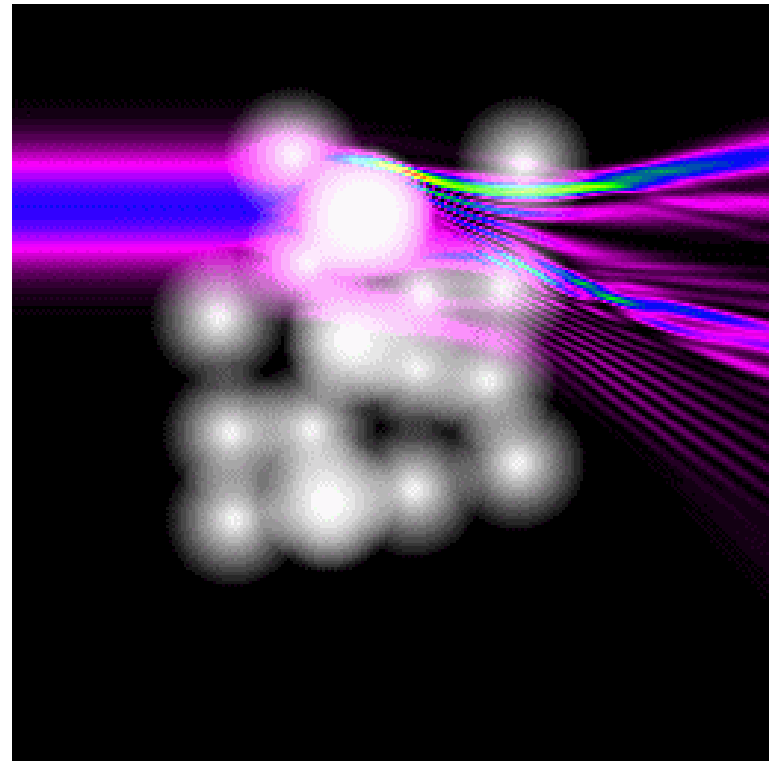


§3-3 电介质中的静电能

- 静电能总是与建立一定的电荷分布或一定的电场分布所需要作的功相联系，当电场中存在电介质时，除了存在一定分布的自由电荷外，还存在极化电荷。
- 从产生电场这一角区来看，宏观电磁理论认为自由电荷与极化电荷是等价的，但是，在真空中建立一定的自由电荷分布与有介质存在时建立与该自由电荷分布相同的总电荷分布需作的功是不同的。

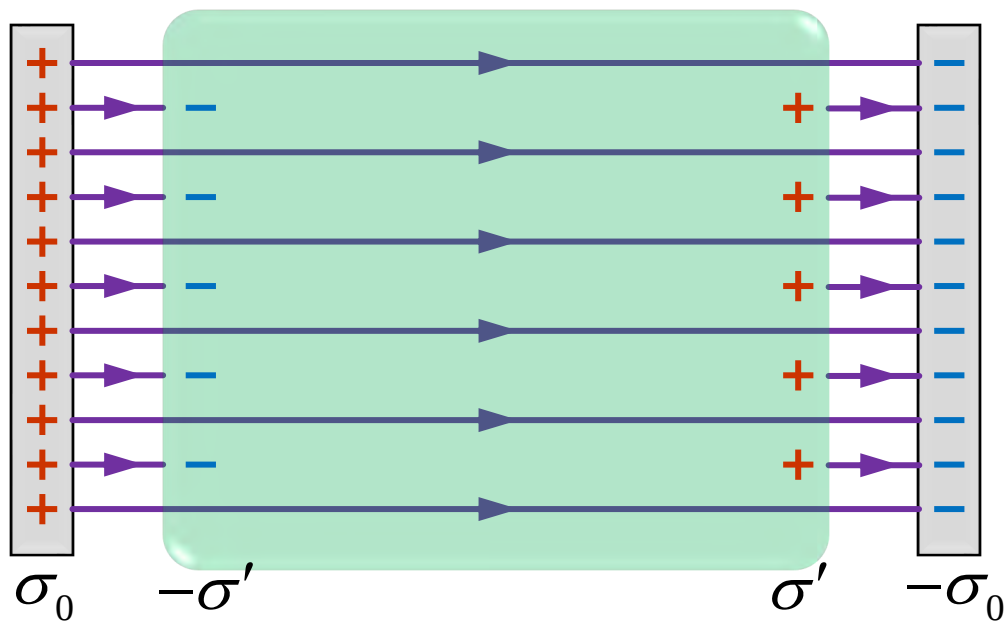


一、宏观静电能

- 有介质存在时，**宏观静电能**定义为：

$$W_0 = \frac{1}{2} \iiint \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV \quad \text{总电荷 } \rho = \text{自由电荷 } \rho_0 + \text{极化电荷 } \rho'$$

$$= \frac{1}{2} \iiint \rho_0(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV + \frac{1}{2} \iiint \rho'(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV$$



宏观静电能系指，假如没有介质，建立宏观电荷分布 $\rho = \rho_0 + \rho'$ 的过程中外界抵抗静电力做的功。

参考状态：一无所有。

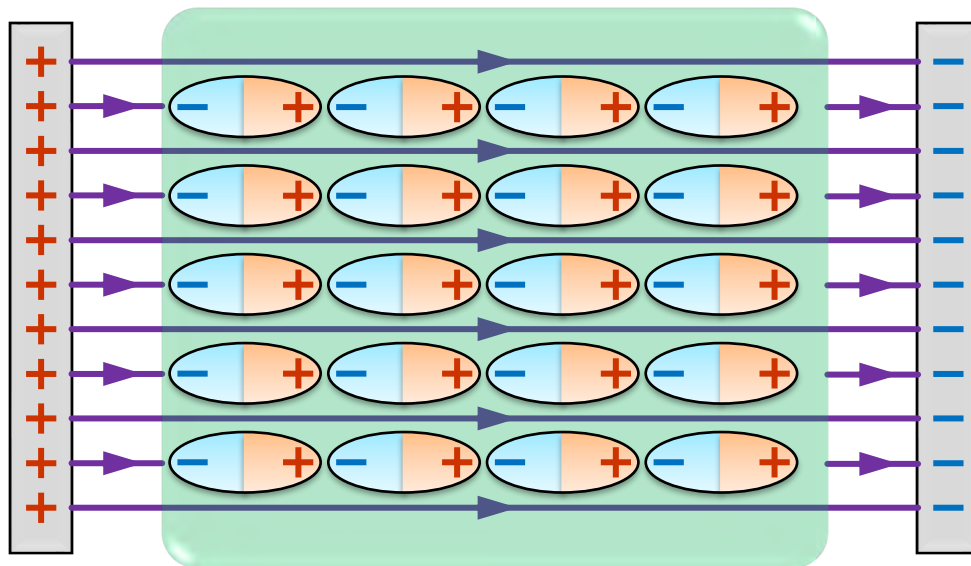
最终状态：有电荷无介质。

- 有介质存在时，**静电能 W** 定义为建立自由电荷过程中外界抵抗静电力做的功。

【注1】 参考状态：无自由电荷、
介质已经存在且固定于给定位置。

【注2】 在此过程中，极化电荷作为被动的响应自动出现。

【注3】 在此过程中，不仅出现了宏观的极化电荷分布，
介质内部的微观电荷分布也会由于位移极化和
取向极化发生变化。

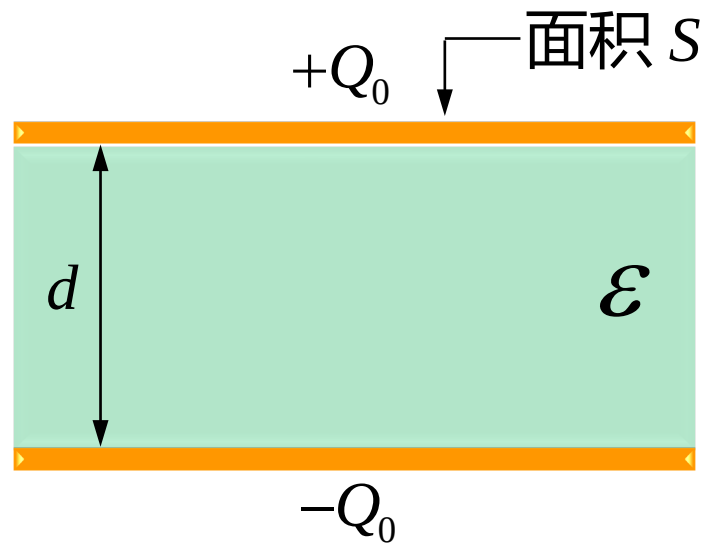


二、电容器充电过程中外界做的功

【问题】 假设平行板电容器极板间充满介电常数为 ε 的介质。忽略边缘效应，两极板电量从无到 $\pm Q_0$ 建立的过程中，外界需要抵抗静电力做多大的功？

- 在最终状态，介质中的电位移、电场以及两极板电压为：

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \sigma_0 = \frac{Q_0}{S} \\ E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q_0}{\varepsilon S} \\ V = Ed = \frac{Q_0 d}{\varepsilon S} \end{array} \right.$$

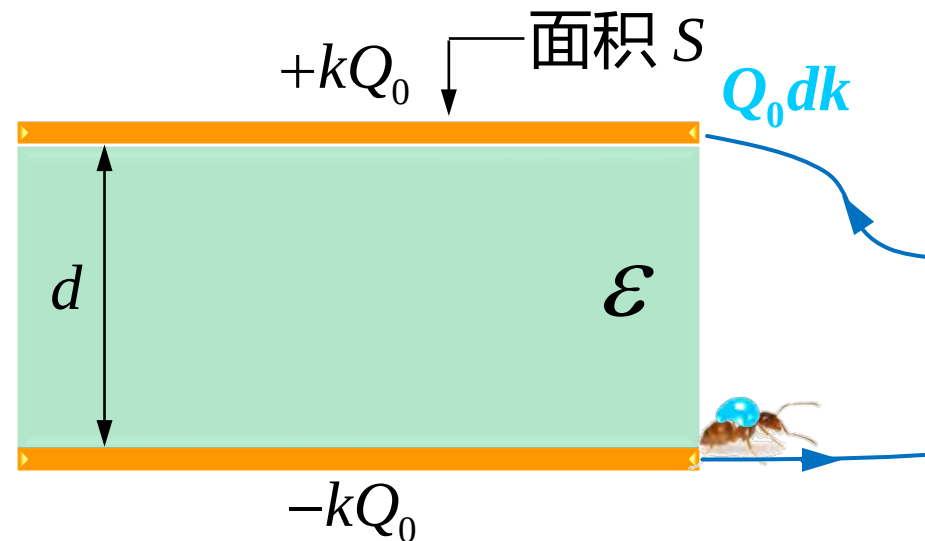


- 在中间过程，当极板带电量为 $\pm kQ_0$ ($0 \leq k \leq 1$) 时，两极板间的电压变为了 kV 。
- 现将无穷小电量 $Q_0 dk$ 从负极板移至正极板，外界抵抗静电力做的功为

$$\delta A = (Q_0 dk) \times (kV) = (k dk)(Q_0 V)$$

- 电容器电量从 0 增加到 Q_0 的过程中，外界做的总功为

$$\begin{aligned} A &= Q_0 V \int_0^1 k dk = \frac{1}{2} Q_0 V \\ &= \frac{1}{2} \iint \sigma_0(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dS \end{aligned}$$



1. 静电能属于自由电荷

有介质存在时，体系的**静电能**为

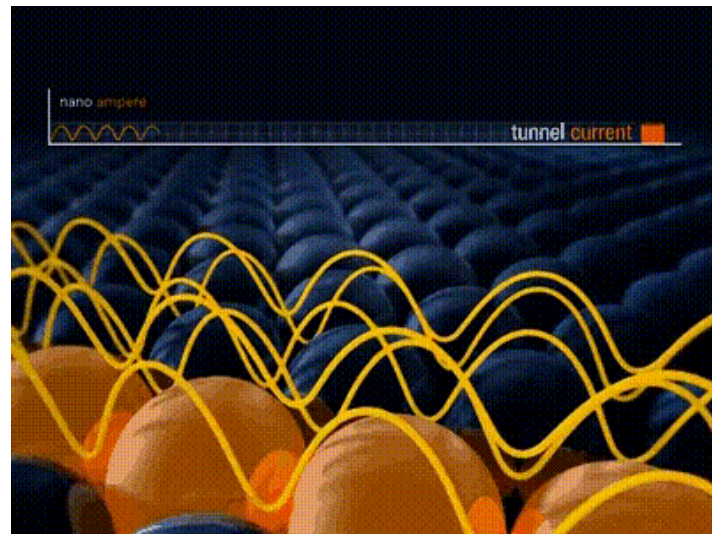
$$W = \frac{1}{2} \int \varphi dq_0 = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_0(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV + \frac{1}{2} \iint_S \sigma_0(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dS$$

【注1】 W 既与 ρ_0 有关，也与 ρ' 有关：

因为 φ 是 ρ_0 和 ρ' 的共同贡献。

【注2】 积分区域：包含所有自由电荷（如全空间）。

【注3】 能量依附于自由电荷，
有自由电荷之处就有静电能。



- 电容器电量从 0 增加到 Q_0 的过程中，外界做的总功也可写为

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} Q_0 V \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_0 S) \cdot (Ed) \\ &= \frac{1}{2} (DS) \cdot (Ed) \\ &= \frac{1}{2} (DE) \cdot (Sd) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E}) \cdot (Sd) \end{aligned}$$

2. 静电能属于电场

有介质存在时，体系的**静电能**为

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \bar{D} \cdot \bar{E} dV$$

能量密度（单位体积的静电能）为

$$w = \frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$



【注1】 积分区域：电场不为零的区域（如全空间）。

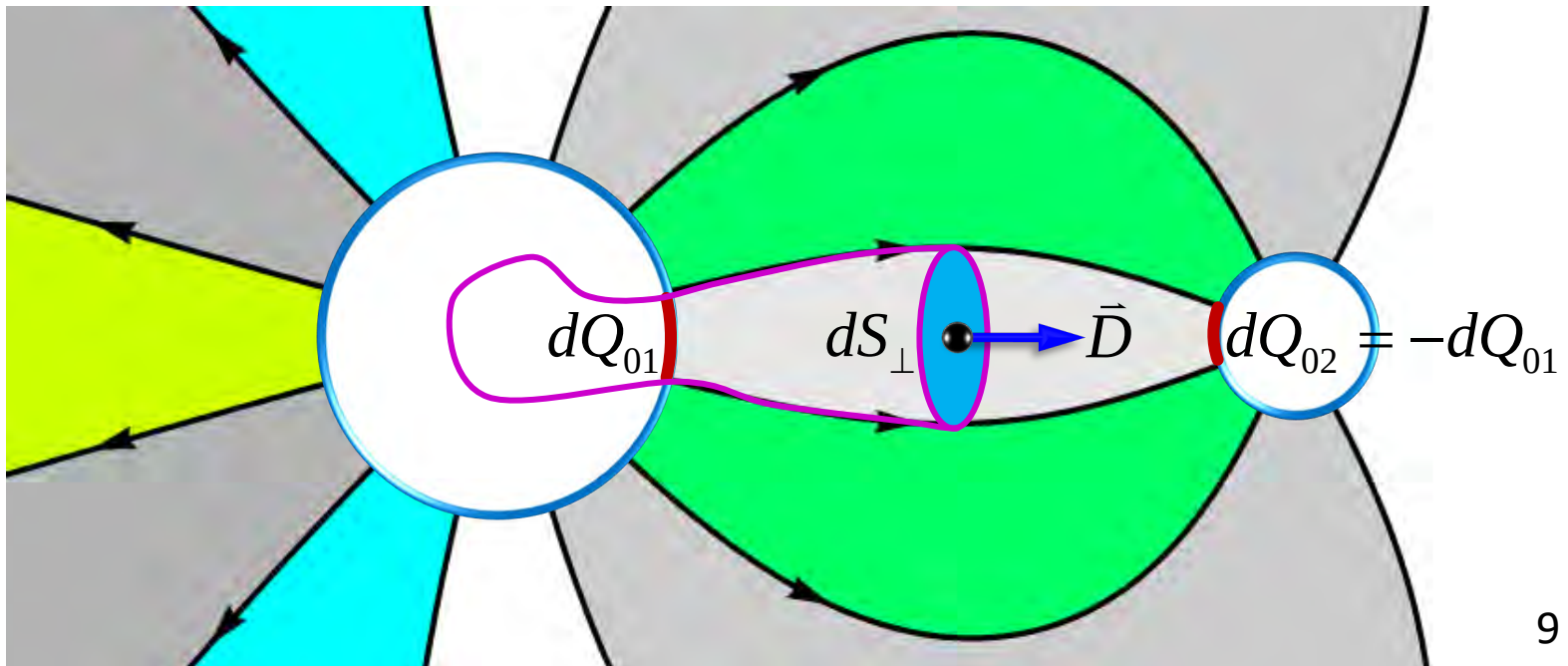
【注2】 能量依附于电场，有电场之处就有静电能。

3. 从导体-介质系统看两种观点的等价性

假设所有自由电荷均为导体所携带，并假设介质是各向同性的。

- 对于某一根很细（截面趋于零）的电位移管：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{穿过横截面的 } D \text{ 通量: } \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot dS_{\perp} = dQ_{01} = \text{const.} \\ \text{两导体之间的电势差: } \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 E \cdot dl = \varphi_1 - \varphi_2 \end{array} \right.$$



$$D \cdot dS_{\perp} = dQ_{01}, \quad \int_1^2 E \cdot dl = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} \int_1^2 D E dS_{\perp} dl = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) dQ_{01} = \frac{1}{2} (\varphi_1 dQ_{01} + \varphi_2 dQ_{02})$$

【注1】 电位移管不同位置处的 D 和 $dS_{\perp}$ 通常不同，上式左侧的积分实际上是对该电位移管所占据体积的求和。

【注2】 若电位移管连接两导体，则 $dQ_{02} = -dQ_{01}$ ，而若电位移管从第一个导体表面延伸至无穷远处，则 $dQ_{02} = 0$ 。

● 对所有电场线管求和，得到

$$W = \iiint \left(\frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E} \right) dV = \frac{1}{2} (Q_{01} \varphi_1 + Q_{02} \varphi_2) \leftarrow \frac{1}{2} \int \varphi dq_0$$

4. 两种观点等价性的严格证明 且听、听看

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_0 \varphi dV$$

• $V = \text{全空间}$

$$= \frac{1}{2} \iiint_V \varphi \nabla \cdot \vec{D} dV$$

• $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$

$$= \frac{1}{2} \iiint_V [\nabla \cdot (\varphi \vec{D}) - \vec{D} \cdot \nabla \varphi] dV$$

• $\nabla \cdot (\varphi \vec{f}) = \varphi \nabla \cdot \vec{f} + \vec{f} \cdot \nabla \varphi$

$$= \frac{1}{2} \oiint_{\partial V} \varphi \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

• 数学高斯定理
以及 $E = -\nabla \varphi$

$$= \iiint_V \left(\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \right) dV$$

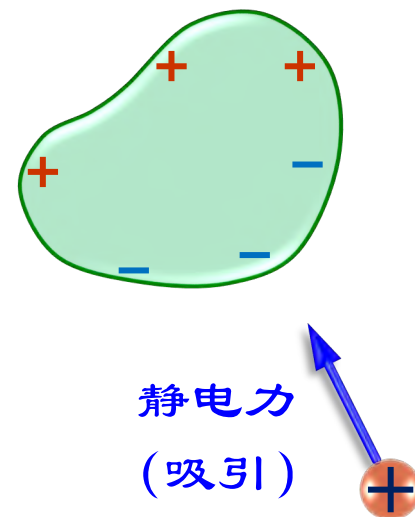
• 对局域电荷分布
 $\varphi \sim 1/r, D \sim 1/r^2$

三、极化能

在建立给定的自由电荷分布的过程中，极化电荷会自动出现。

- 此过程中，外界不仅要抵抗宏观电荷 $\rho = \rho_0 + \rho'$ 之间的静电力做功——此部分功转化为了**宏观静电能**：

$$W_0 = \frac{1}{2} \iiint \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV = \iiint \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right) dV$$



- 此过程中，由于位移极化和取向极化，介质内部的微观电荷会重新分布，因此，外界还要克服分子内部或之间的相互作用做功，称为**极化功**——对于**线性介质**，极化功转变为了**极化能**储存在了介质内部。

1. 电荷的观点看待极化能

$$W = \frac{1}{2} \iiint \rho_0 \varphi dV$$

$$= \frac{1}{2} \iiint (\rho_0 + \rho') \varphi dV - \frac{1}{2} \iiint \rho' \varphi dV$$

$$= W_0 + W_{\text{极}}$$

$$\longrightarrow W_{\text{极}} = -\frac{1}{2} \iiint \rho' \varphi dV$$

- 负号表示电场对极化电荷做正功，或曰外界做负功。
- 极化能不仅与 ρ_0 有关，也与 ρ' 有关，表现在总电势 φ 上。

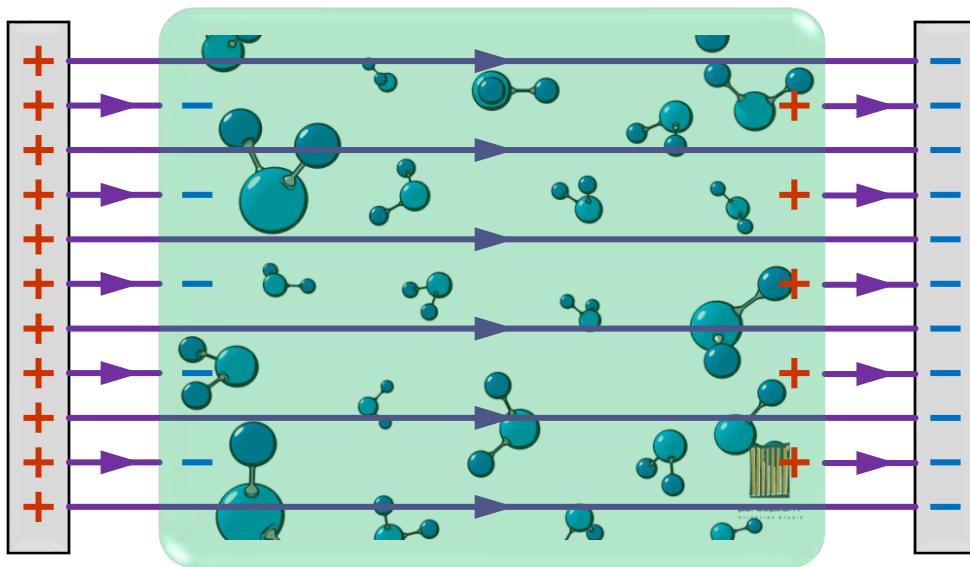
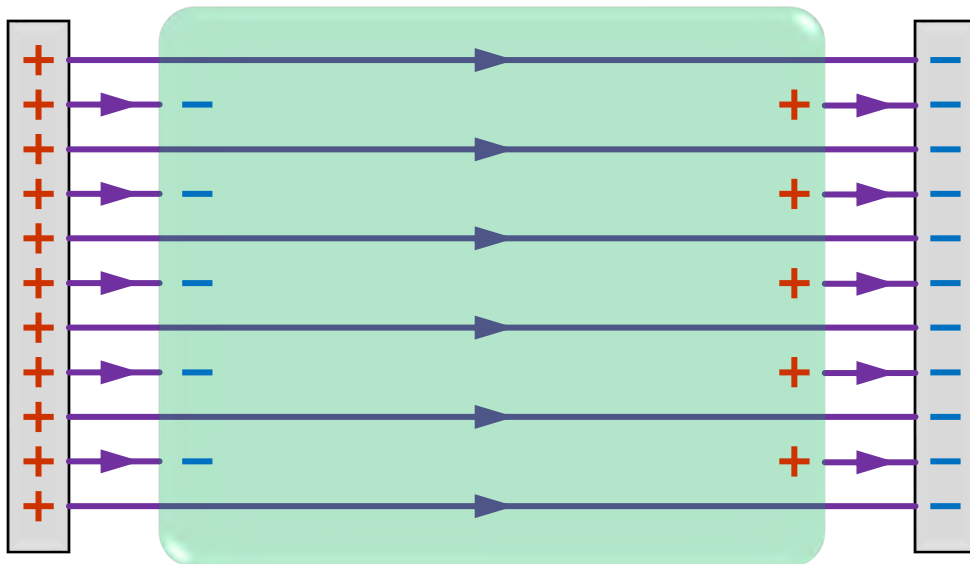
2. 场的观点看待极化能

$$\begin{aligned} W &= \iiint \left(\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \right) dV \\ &= \iiint \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right) dV + \iiint \left(\frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E} \right) dV \\ &= W_0 + W_{\text{极}} \end{aligned}$$

$$\longrightarrow W_{\text{极}} = \iiint \left(\frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E} \right) dV$$

- **极化能密度** (单位体积介质中的极化能)

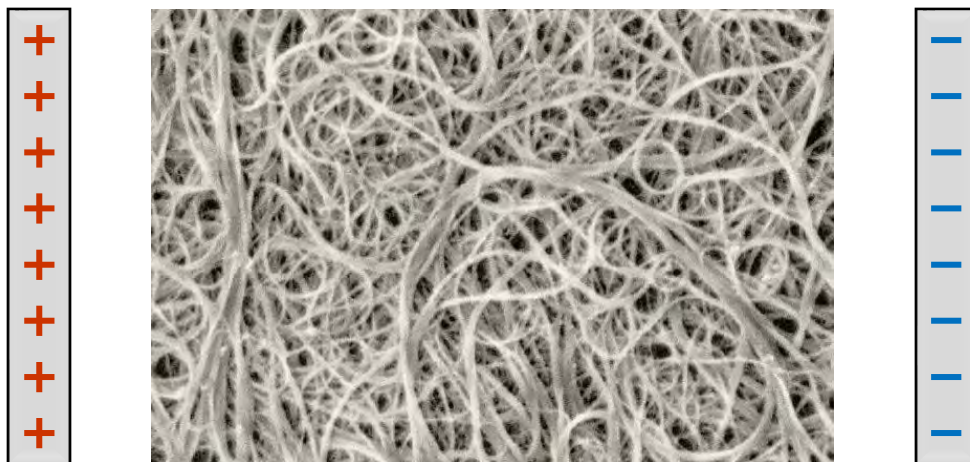
$$w_{\text{极}} = \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}$$



四、极化功

【问题1】 对于一般的介质（可能是各向同性的，也可能是各向异性的；可能是线性的，也可能是非线性的，如铁电体），移动自由电荷的过程中，外界需要抵抗静电力做多少的功？

【问题2】 设在某个阶段，空间中已经积累了一定的自由电荷，空间中任一点 r 处的自由电荷密度为 $\rho_0(\mathbf{r})$ ，电势为 $\varphi(\mathbf{r})$ 。现将每一点 r 处的自由电荷密度增加无穷小量 $\delta\rho_0(\mathbf{r})$ ，外界需要抵抗静电力做多大功？



1. 移动自由电荷做功 且听、听看

$$\delta A = \iiint_V \varphi \delta \rho_0 dV$$

$V = \text{全空间}$

$$= \iiint_V \varphi \nabla \cdot \delta \vec{D} dV$$

$\nabla \cdot (\delta \vec{D}) = \delta \rho_0$

$$= \iiint_V [\nabla \cdot (\varphi \delta \vec{D}) - \delta \vec{D} \cdot \nabla \varphi] dV$$

$\nabla \cdot (\varphi \vec{f}) = \varphi \nabla \cdot \vec{f} + \vec{f} \cdot \nabla \varphi$

$$= \oint_{\partial V} \varphi \delta \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iiint_V \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV$$

数学高斯定理
以及 $E = -\nabla \varphi$

$$= \iiint_V \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV$$

对局域电荷分布
 $E \sim 1/r^2, \delta D \sim 1/r^2$

2. 极化功

移动自由电荷的过程中，外界抵抗静电力做的功为

$$\delta A = \iiint_V \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV$$

电源对单位体积所做功为：

$$\delta a = \vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \delta \vec{E} + \vec{E} \cdot \delta \vec{P}$$

- 电源对单位体积的场做的功与过程无关：

$$\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \delta \vec{E} = \delta \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right)$$

- 电源对单位体积介质做的功，即**极化功密度**通常与过程有关

$$\delta a' \triangleq \vec{E} \cdot \overrightarrow{\delta P}$$

3. 线性无损耗介质

对于线性（各向同性或各向异性）介质，本构方程为

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j, \quad (\chi_{ij} = \chi_{ji})$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \vec{E} \cdot \delta \vec{P} &= \sum_{i=1}^3 E_i \delta P_i \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 E_i \delta (\varepsilon_0 \chi_{ij} E_j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\varepsilon_0 \chi_{ij} E_i) \delta E_j \\ &= \sum_{j=1}^3 P_j \delta E_j = \vec{P} \cdot \delta \vec{E} \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \vec{E} \cdot \delta \vec{P} = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \delta \vec{P} + \vec{P} \cdot \delta \vec{E}) = \delta \left(\frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E} \right)$$

- 对于线性介质，极化功与过程无关。
- 对于线性介质，移动自由电荷的过程中，外界抵抗静电力做的功与过程无关

$$\delta a = \vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \delta \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E} \right) = \delta \left(\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \right)$$

$$\longrightarrow \delta A = \iiint_V \delta \left(\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \right) dV = \delta \iiint_V \left(\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \right) dV$$

$$\longrightarrow A = \iiint_V \left(\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \right) dV$$

- 外界做功转化为了场的能量，能量密度为

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

4. 非线性损耗介质

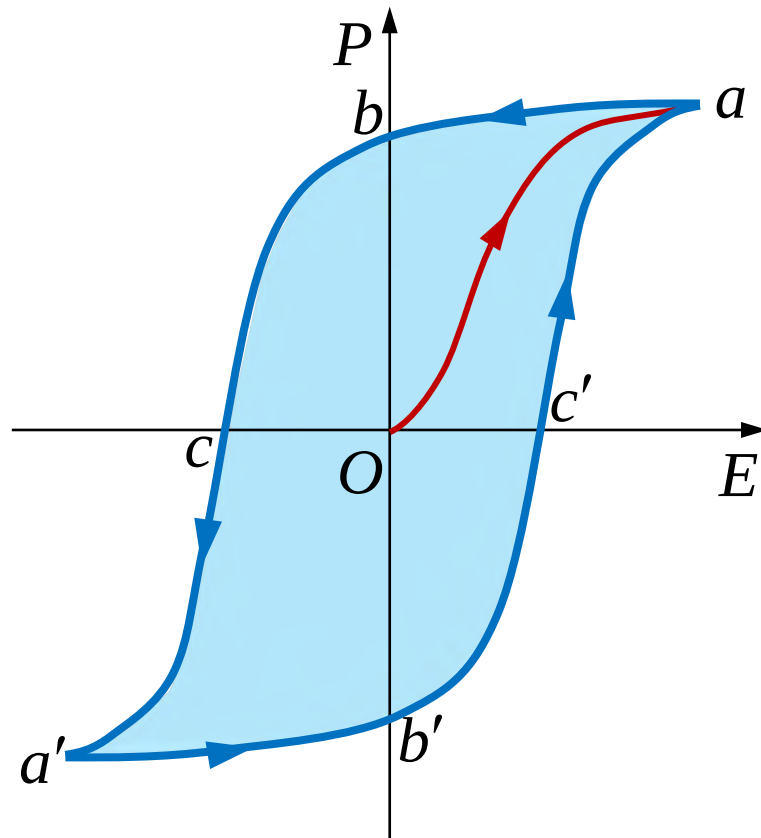
此类介质， P 与 E 的关系为非线性、非单值。

如铁电体，沿电滞回线循环一周外界对单位体积介质所做的功为

$$a' = \oint \delta a' = \oint \vec{E} \cdot \delta \vec{P}$$

= 电滞回线所围面积

这部分能量既不改变电场的能量，又不改变介质的极化状态，而是转化为热能，称为**电滞损耗**。



§3-4 带电系统受力

STM tip



sample surface



一、由电势能求静电力

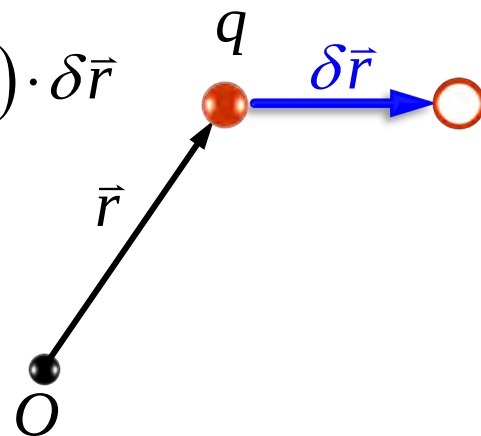
【问题】 一个点电荷 q 处于其他电荷产生的外场 φ_e 中，电势能为 U 。试问 q 受到的静电力 F 。

- **假想** 维持外部电荷不动的情形下，粒子有一个无限小位移 $\delta \mathbf{r}$ ，在此过程中，维持外电荷不动无需做功，因此外力做功等于电势能的增加：

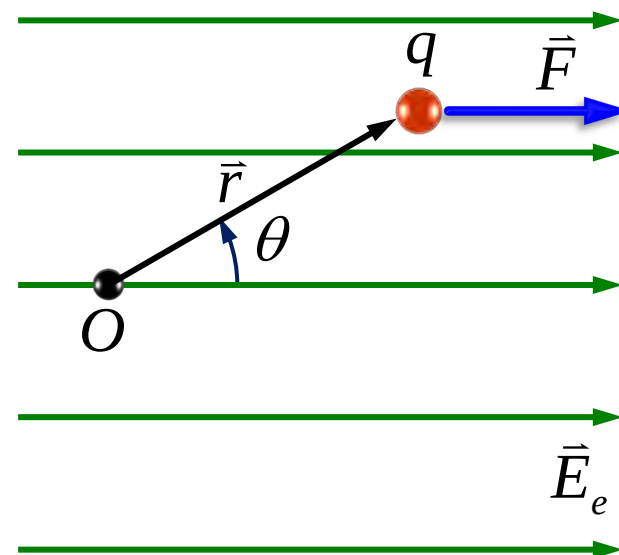
$$-\vec{F} \cdot \delta \vec{r} = \delta U = U(\vec{r} + \delta \vec{r}) - U(\vec{r}) = (\nabla U) \cdot \delta \vec{r}$$

此结论对于任意 $\delta \mathbf{r}$ 都成立，因而：

$$\vec{F} = -\nabla U$$



【例】 试求处在均匀外场 $\vec{E}_e$ 中的点电荷 q 受到的静电力。



【解】 q 的电势能为：

$$U = q\varphi_e(\vec{r}) = -q\vec{E}_e \cdot \vec{r}$$

(1) 求静电力。

在直角坐标系下

$$U = -q\varphi_e = -q(E_{ex}x + E_{ey}y + E_{ez}z)$$

$$\longrightarrow \vec{F} = -\nabla U = q(E_{ex}\hat{x} + E_{ey}\hat{y} + E_{ez}\hat{z}) = q\vec{E}_e$$

推广到两个点电荷情形

在外场 φ_e 中的两个点电荷 q_1 和 q_2 。

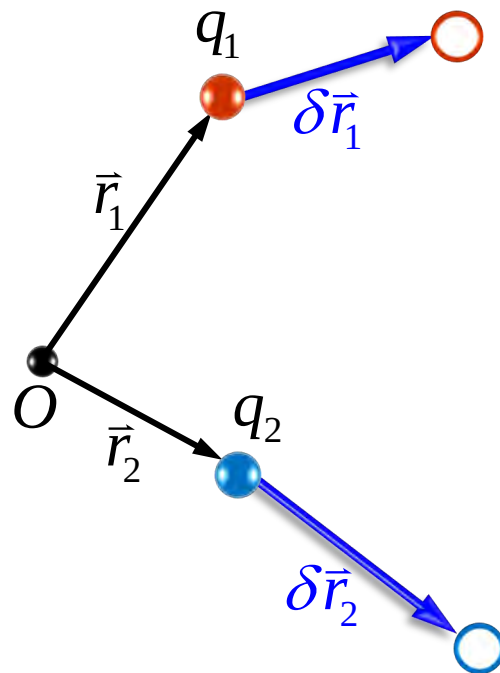
设两粒子受到的静电力分别为 F_1 和 F_2 ；

电势能分别为 φ_1 和 φ_2 ，

q_1 和 q_2 之间的相互作用能为 W_1 。

假想维持外部电荷不动的情形下，两粒子各自有一个小位移 δr_1 和 δr_2 ，那么

$$\vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = -\delta(U_1 + U_2 + W_{12})$$

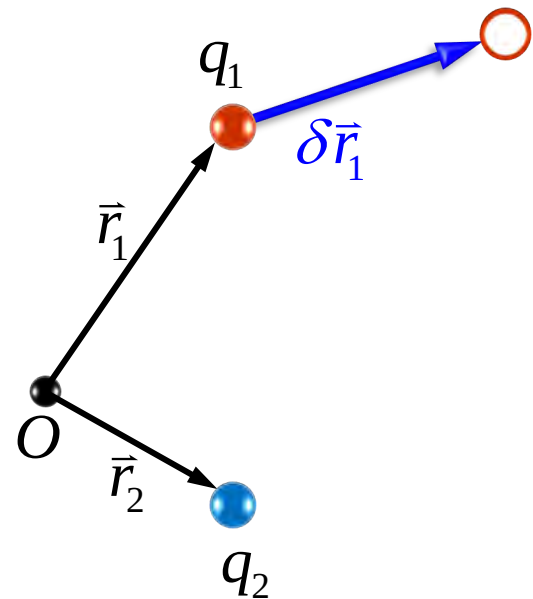


- **虚拟过程：** q_1 **平移**， q_2 **不动**。由于 U_2 不变，因而

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 &= -\delta(U_1 + \color{red}{U}_2 + W_{12}) \\ &= -\delta(U_1 + W_{12})\end{aligned}$$

$$\longrightarrow \vec{F}_1 = -\nabla_1(U_1 + W_{12})$$

$$\triangleq -\left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y_1} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z_1}\right)(U_1 + W_{12})$$



【注】 $U_1 + W_{12}$ 即是 q_1 在其他电荷（包括 q_2 ）产生的外场中的电势能。

- 虚拟过程： q_1 、 q_2 整体平移，即

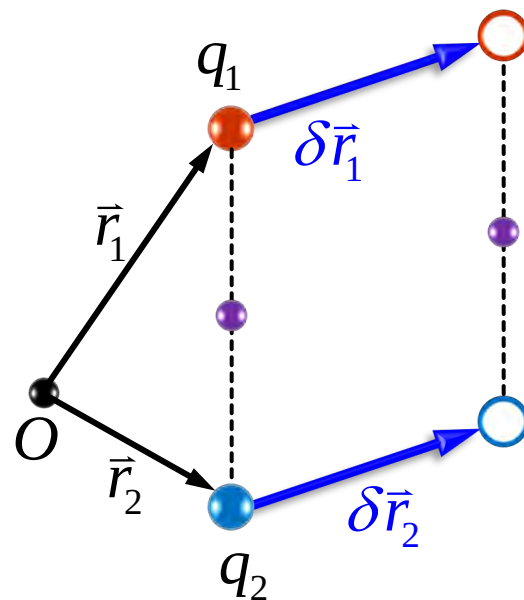
$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2 = (\delta n) \hat{n}$$

此过程中， W_{12} 不变， 因而

$$\hat{n} \cdot (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \delta n = -\delta(U_1 + U_2)$$

$$\longrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\nabla(U_1 + U_2)$$

$$\longrightarrow \vec{F} = -\nabla U$$



【注】 $F = F_1 + F_2$ 是 q_1 和 q_2 受到的总静电力（合力）；
 $U = U_1 + U_2$ 是 q_1 和 q_2 在外场中的总电势能。

推广到更为一般情形

设在外场 φ_e 中的带电体，设总的电势能为 U 。假想带电体有一个刚性运动（整体平移或转动），因此，内部电荷的相对位置不变，则其受到的总静电力与总静电力矩表示为

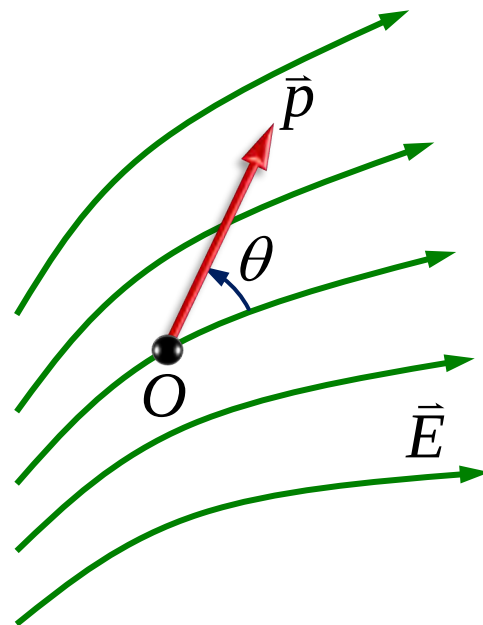
$$\begin{cases} \vec{F} = -\nabla U = -(\nabla U)_\rho \\ \hat{n} \cdot \vec{\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_\rho \end{cases}$$

【注】 此处利用虚功原理由势能求力的方法，不适用于讨论导体或电介质受力，因为即便导体或电介质刚性移动，其内部的自由电荷或极化电荷也会重新分布。

【例】 试求处在外场 E 中的电偶极子 p 受到的静电力。

【解】 电偶极子在外场中的电势能为：

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta$$



● 电偶极子受到的静电力为

$$\vec{F} = -(\nabla U)_p = +[\nabla(\vec{p} \cdot \vec{E})]_p$$

$$\longrightarrow \vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$$

$$\begin{aligned} F_x &= \partial_x (\vec{p} \cdot \vec{E}) = \vec{p} \cdot \partial_x \vec{E} \\ &= p_x \partial_x E_x + p_y \partial_x E_y + p_z \partial_x E_z \\ &= p_x \partial_x E_x + p_y \partial_y E_x + p_z \partial_z E_x \\ &= \vec{p} \cdot \nabla E_x \end{aligned}$$

附录：以上几个问题中关于力矩的进一步讨论（同学们可自行学习）。

PPT第二十三页习题扩展一个点电荷 q 处于其他电荷产生的外场 φ_e 中，电势能为 U 。试问 q 受到的静电力 F 关于点 O 的力矩大小在法向 $\vec{n}$ 上的投影有多大。)

- 若设想粒子沿 $\mathbf{n}$ 方向作无限小平移 $\delta \mathbf{r} = (\delta n)\mathbf{n}$, 则

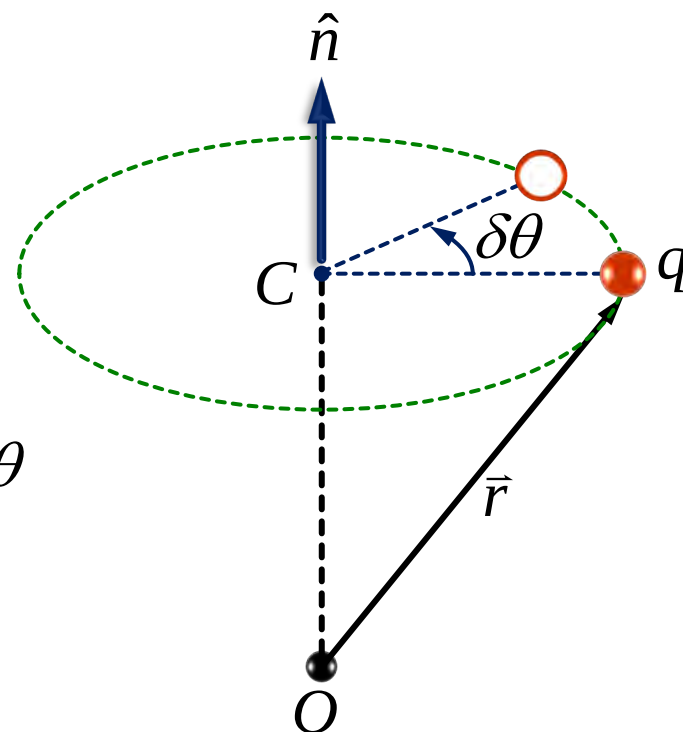
$$-(\hat{n} \cdot \vec{F})\delta n = \frac{\partial U}{\partial n}\delta n \quad \longrightarrow \quad \hat{n} \cdot \vec{F} = -\hat{n} \cdot \nabla U = -\frac{\partial U}{\partial n}$$

- 若设想粒子绕着 $\mathbf{n}$ 轴转过无限小角度 $\delta\theta$, 即

$$\delta \vec{r} = (\hat{n} \times \vec{r})\delta\theta$$

$$\longrightarrow \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = \hat{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})\delta\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta}\delta\theta$$

$$\longrightarrow \hat{n} \cdot \vec{\tau} = \hat{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$$



PPT第二十四页习题扩展 试求处在均匀外场 E_e 中的点电荷 q 受到的静电力对O点的力矩。

电势能可以写为 $U = -qE_e r \cos \theta$

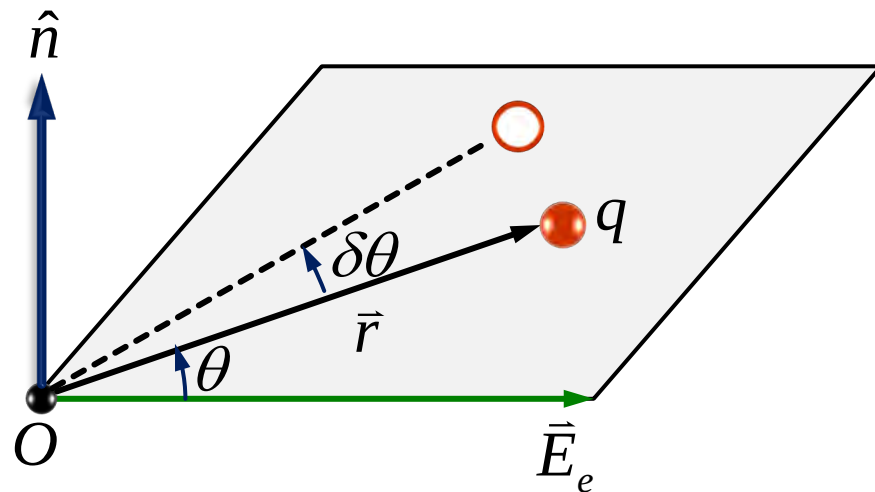
- 若 θ 增加, 则 q 绕着过原点、且垂直于 r 、 E_e 的 n 轴转动:

$$\hat{n} \cdot \vec{\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -qE_e r \sin \theta \quad \longrightarrow \quad \hat{n} \cdot \vec{\tau} = \hat{n} \cdot (\vec{r} \times q\vec{E})$$

- 若 q 绕着过原点且平行于 r 或者 E_e 的转动, 电势能均不变, 因而

$$\hat{r} \cdot \vec{\tau} = 0 = \hat{E}_e \cdot \vec{\tau}$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times q\vec{E}}$$



● 虚拟过程： q_1 、 q_2 整体转动，即

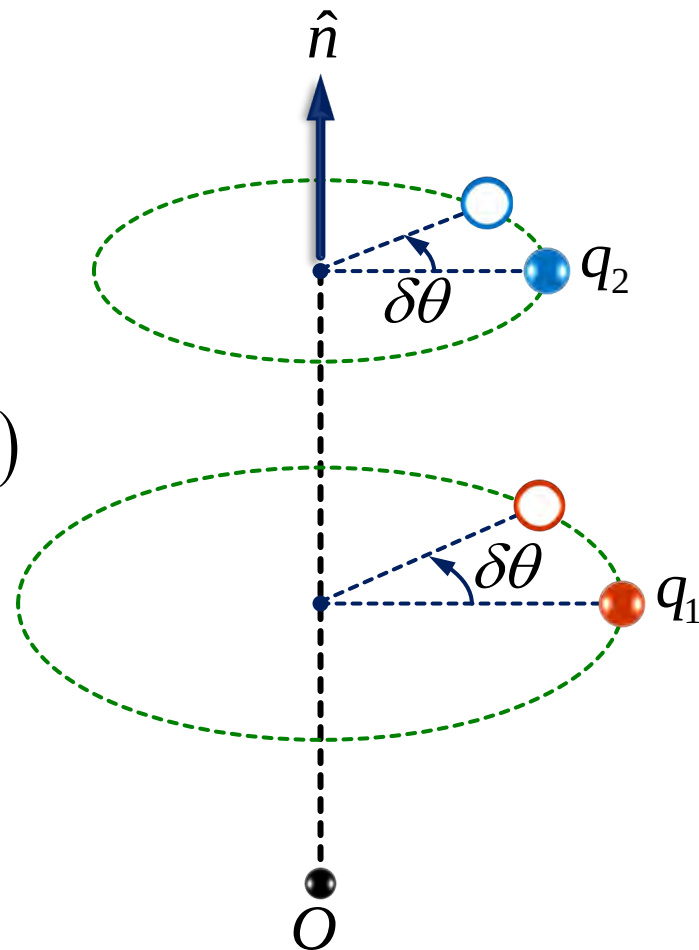
$$\delta \vec{r}_1 = (\hat{n} \times \vec{r}_1) \delta \theta, \quad \delta \vec{r}_2 = (\hat{n} \times \vec{r}_2) \delta \theta$$

此过程中， W_{12} 不变，因而

$$\hat{n} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2) \delta \theta = -\delta(U_1 + U_2)$$

$$\longrightarrow \hat{n} \cdot (\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2) = -\frac{\partial(U_1 + U_2)}{\partial \theta}$$

$$\longrightarrow \hat{n} \cdot \vec{\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$$



【注】 $\tau = \tau_1 + \tau_2$ 是 q_1 和 q_2 受到的总静电力相对于同一点 O 的力矩（合力矩）。

PPT第二十九页习题扩展 试求处在外场 E 中的电偶极子 p 相对于电偶极子所在处 O 点的力矩。

- 若 θ 增加, 则 p 绕着过原点、且垂直于 p 、 E 的 n 轴转动, 因而

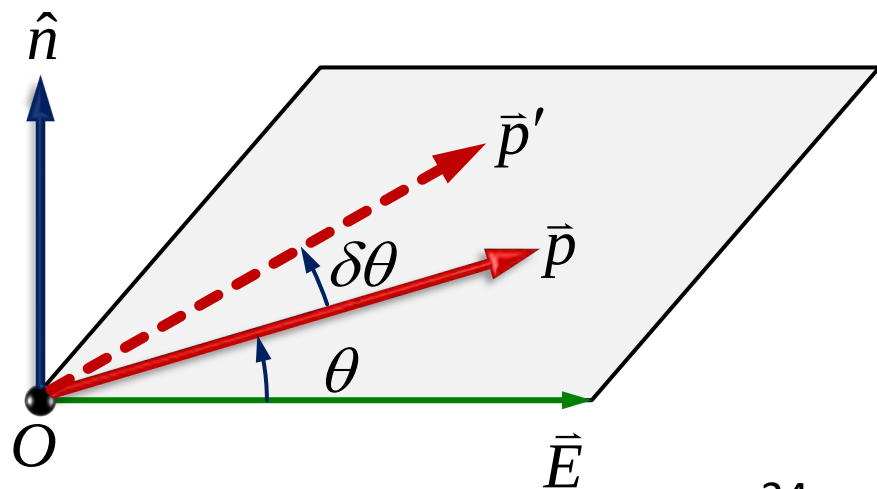
$$\hat{n} \cdot \vec{\tau} = - \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_p = \left[\frac{\partial (pE \cos \theta)}{\partial \theta} \right]_p = -pE \sin \theta$$

$$\longrightarrow \hat{n} \cdot \vec{\tau} = \hat{n} \cdot (\vec{p} \times \vec{E})$$

- 若 p 绕着过原点且平行于 p 或者 E 的转动, 电势能均不变, 因而

$$\hat{p} \cdot \vec{\tau} = 0 = \hat{E} \cdot \vec{\tau}$$

$$\longrightarrow \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$



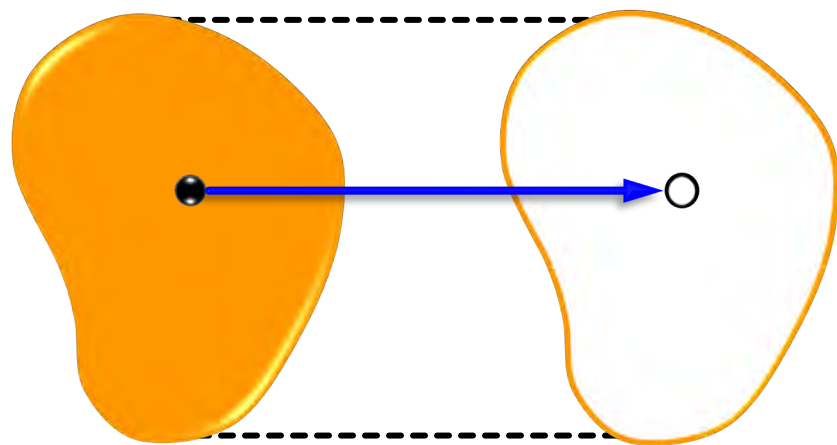
二、由静电能求静电力

虚拟过程：设想某个带电体（导体、电介质）发生一小位移 $\delta \mathbf{r}$ 的过程中，**维持各导体电量不变**（让各导体彼此绝缘）。

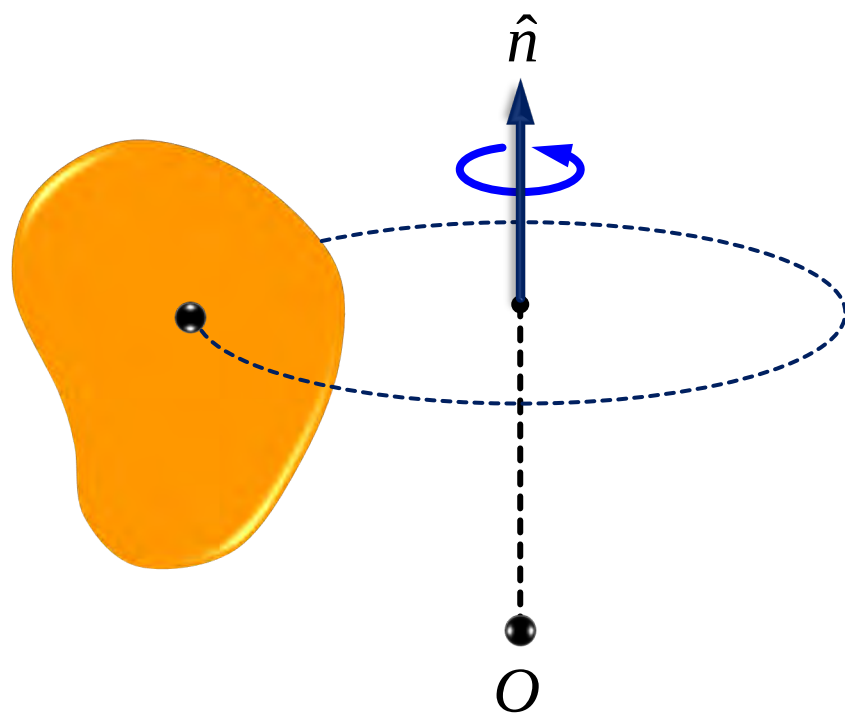
设 W 是体系的静电能， $\mathbf{F}$ 是所研究带电体受到的静电力，则

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{r} = -(\delta W)_Q$$

电场做功 = 电场能量的减少



$$\vec{F} = -(\nabla W)_Q$$



$$\hat{n} \cdot \vec{\tau} = -\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_Q$$

虚拟过程：设想某个带电体（导体、电介质）发生一小位移 $\delta \vec{r}$ 的过程中，**维持各导体电势不变**（外接电源）。

$$\delta A' - \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = (\delta W)_{\varphi}$$

外界做功 = 电场能量的增加

【注】 外界做功包含两部分：

- (1) 外界抵抗静电力做功 $-\vec{F} \cdot \delta \vec{r}$ ；
- (2) 外界（电源）为维持导体电势不变做功 $\delta A'$ 。

$$\delta A' = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} + (\delta W)_{\varphi}$$

**电源提供的能量，一部分用于电场对外做功，
一部分使得电场能量增加。**

- 外接电源做功 (设 φ_i 是第 i 个导体的电势)

$$\delta A' = \sum_{i=1}^N \varphi_i \delta Q_i$$

- 在**自由电荷完全由导体所携带**的情形下, 导体-介质系统静电能的增加为

$$(\delta W)_{\varphi} = \left[\delta \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \varphi_i \right) \right]_{\varphi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i \delta Q_i$$

$$\longrightarrow \delta A' = 2(\delta W)_{\varphi}$$

电源提供的能量等于静电能增加的两倍,
或曰一半用于电场对外做功, 一半使得电场能量增加。

如果

- (1) **自由电荷完全由导体所携带,**
- (2) 在移动某个带电体的过程中**维持各导体电势不变,**

那么

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = (\delta W)_{\varphi} & \text{电场做功 = 静电能的增加} \\ -\vec{F} \cdot \delta \vec{r} = -(\delta W)_{\varphi} & \text{外力做功 = 静电能的较少} \end{array} \right.$$

$$\longrightarrow \vec{F} = (\nabla W)_{\varphi}, \quad \hat{n} \cdot \vec{\tau} = \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{\varphi}$$

利用虚功原理由静电能求静电力小结

【方法一】 设想带电体整体移动时，**维持各导体电量不变。**

$$F_x = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_Q, \quad F_y = -\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_Q, \quad F_z = -\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_Q, \quad \tau_n = -\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_Q$$

【方法二】 设想带电体整体移动时，**维持各导体电势不变。**

$$F_x = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_\varphi, \quad F_y = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_\varphi, \quad F_z = \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_\varphi, \quad \tau_n = \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_\varphi$$

【注1】 方法二仅适用于自由电荷完全由导体所携带的情形。

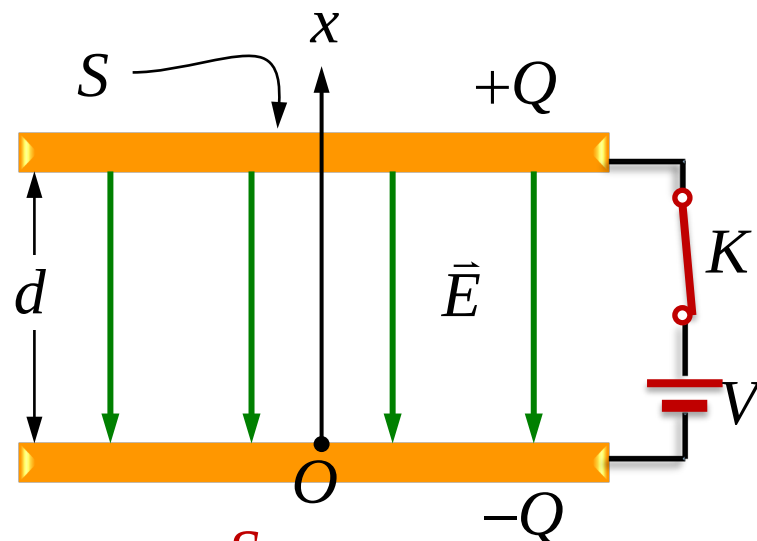
【注2】 带电体所受静电力是由当时系统的电荷分布状态唯一决定的，与所设想的虚拟过程无关。

【注3】 选择的虚拟过程以便于分析、计算者为佳。

【例】 真空平行板电容器，极板面积 S ，极板相距 d ，极板带电量为 Q ，求带正电极板所受的静电力。

【解】 设两极板距离为 x ，则

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV \quad \text{where } C = \frac{\epsilon_0 S}{x}$$



(1) 虚拟过程： Q 不变（ K 断开）

$$F_x = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_Q = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{Q^2}{2C}\right)_Q = -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{C}$$

$$\rightarrow \boxed{F_x = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}}$$

负号表示力与 x 增加的方向相反，
即上极板受力向下，为吸引力。

采用另外两个静电能公式计算也未尝不可，但是.....

$$F_x = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} QV \right) \right]_Q = - \frac{1}{2} Q \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_Q = + \frac{1}{2} QE_x$$

$$\longrightarrow F_x = - \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

$$F_x = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} CV^2 \right) \right]_Q = - \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial x} V^2 - CV \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_Q$$

$$= + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x^2} V^2 + CVE_x = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_x^2 S + QE_x$$

$$\longrightarrow F_x = - \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

何苦为难自己？！

(2) 虚拟过程: V 不变 (K 闭合)

$$F_x = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_V = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} C V^2 \right) \right]_V = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\varepsilon_0 S}{x^2}$$

此处 $x = d$, 因而

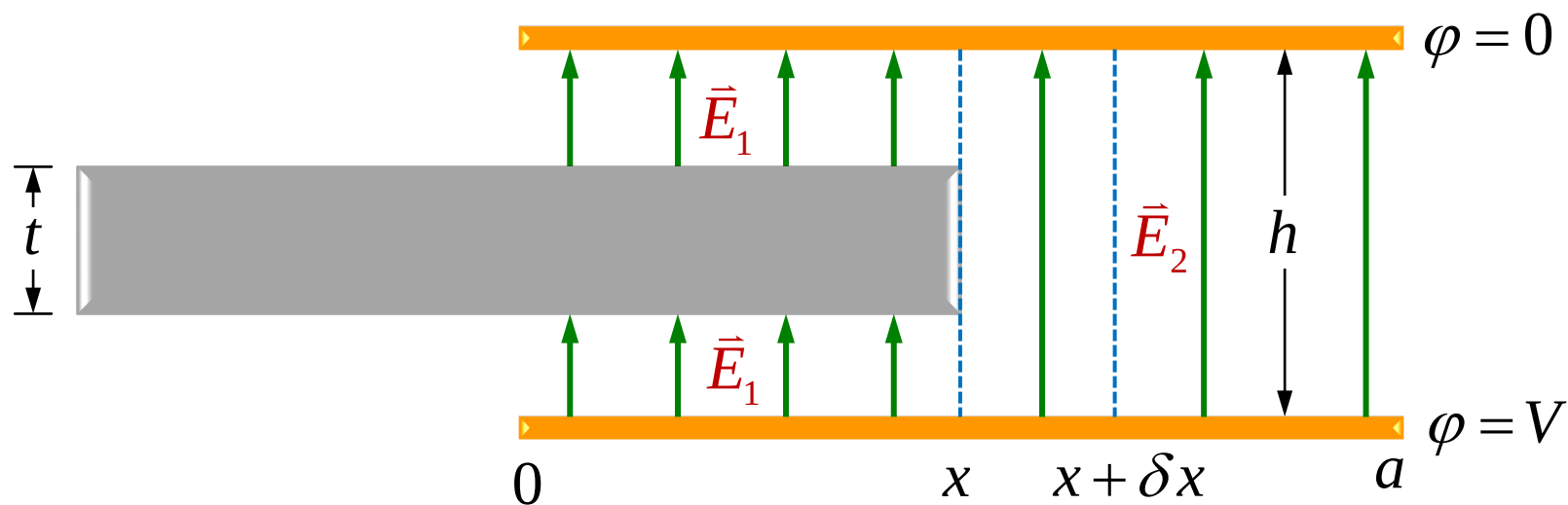
$$V = Ed = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d$$

所以

$$F_x = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

【例】 平行板电容极板间距为 h 、极板大小为 $a \times b$ 。试计算长为 a 、厚度为 $t < h$ 的金属板插入电容器中的距离为 x 时，金属板受力。已知极板间电压为 V 。

设用能量方法计算力时，边缘效应可以忽略。



$$E_1 = \frac{V}{h-t}, \quad E_2 = \frac{V}{h}$$

【解】 静电能为：

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{V}{h-t} \right)^2 \cdot (h-t)bx + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{V}{h} \right)^2 \cdot hb(a-x)$$

$$\longrightarrow W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 V^2 b \left(\frac{x}{h-t} + \frac{a-x}{h} \right)$$

$$\longrightarrow \vec{F} = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_V \hat{x} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 V^2 b \left(\frac{1}{h-t} - \frac{1}{h} \right) \hat{x}$$

静电力倾向于将金属板吸进电容器中！

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 V^2 b \left(\frac{x}{h-t} + \frac{a-x}{h} \right), \quad \vec{F} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 V^2 b \left(\frac{1}{h-t} - \frac{1}{h} \right) \hat{x}$$

如果将金属板从电容器外部完全插入电容器，并假设此过程中电压 V 不变，那么，外界抵抗静电力做功为：

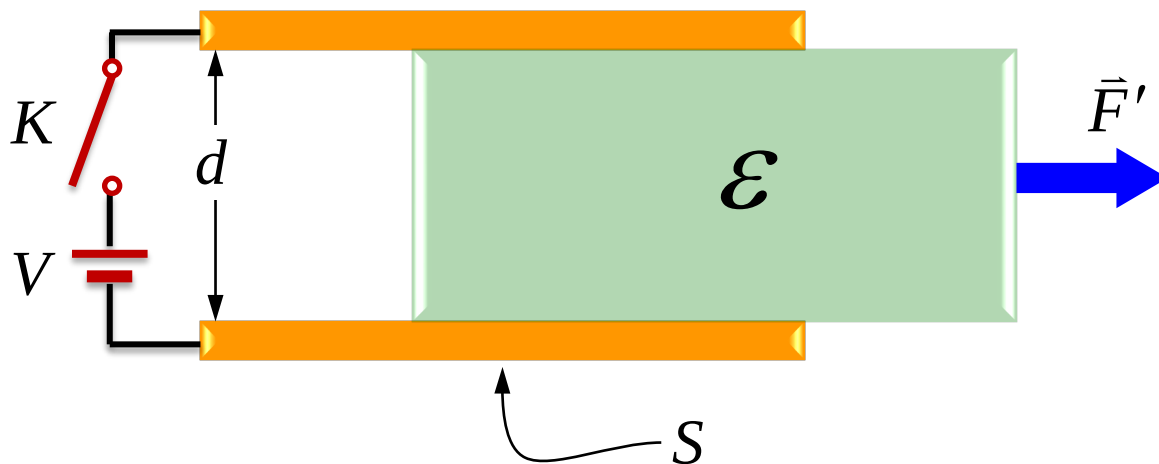
$$A' = -Fa = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 V^2 ab \left(\frac{1}{h-t} - \frac{1}{h} \right) < 0$$

或者，外界做功等于静电能减少：

$$A' = -\Delta W = W(x=0) - W(x=a) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 V^2 ab \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h-t} \right) < 0$$

【例】 一平行板电容器两极板的面积都是 S ，相距为 d ，中间充满相对介电常数为 ε_r 的介质，接通开关，使电容器充电到电压为 V ，**略去边缘效应**。

- (1) 断开电源，把介质板抽出，试问需要做多少功？
- (2) 不断开电源的情况下抽出介质板，则需做多少功？



【解】 在介质处于确定位置时，

- 两种情形下，电容器的电容相同。初、末态的电容分别为

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = \varepsilon_r C_0, \quad C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

- 两种情形下，初态相同：电压均为 V ，极板带电量均为

$$Q_0 = \sigma_0 S = DS = \varepsilon_0 \varepsilon_r ES = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r SV}{d}$$

- 两种情形下，由于中间过程的带电状态不同，因此电场、能量以及介质受力均不同。在每一种情形下，计算某一时刻介质受到的静电力时，虚拟过程既可以假设电量不变，也可以假设电压不变。

- (1) 开关断开抽出介质的过程中，电量保持不变，末态电压变为 $\varepsilon_r V$ 。外界做功等于静电能的增量：

$$A_Q = W_1 - W_0 = \frac{Q_0^2}{2C_0} - \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C_0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right)$$

→ $A_Q = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r (\varepsilon_r - 1) S V^2}{2d}$

- (2) 开关闭合抽出介质的过程中，电压保持不变，末态电量变为 Q_0/ε_r 。外界做功等于静电能的减小：

$$A_V = W_0 - W_2 = \frac{1}{2} C V^2 - \frac{1}{2} C_0 V^2 = \frac{1}{2} C_0 V^2 (\varepsilon_r - 1)$$

→ $A_V = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) S V^2}{2d}$

三、作用于电介质上的力

考察外场 E_0 中的一块电介质，假设介质内部无自由电荷，极化电荷产生的场设为 E' ，因而总电场为 $E = E_0 + E'$ 。

- 作用于单位体积电介质上的外力为作用在每个分子电偶极子 p_0 上的外力之和：

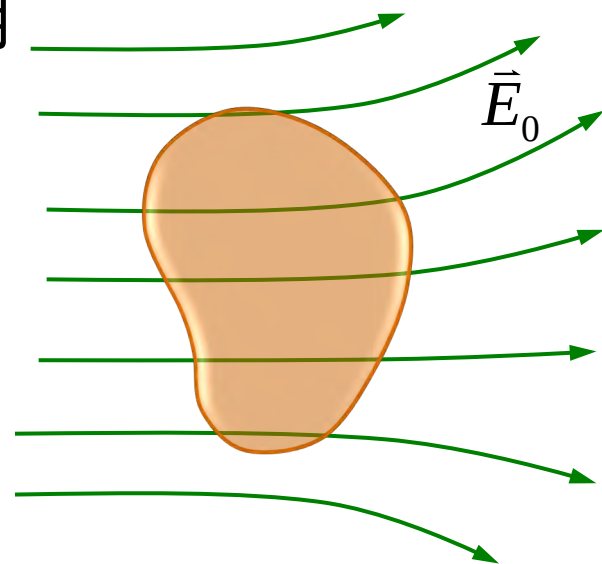
$$\vec{f} = n(\vec{p}_0 \cdot \nabla \vec{E}_0) = \vec{P} \cdot \nabla \vec{E}_0$$

- 整块介质受到的外力：

$$\vec{F} = \iiint \vec{f} dV = \iiint \vec{P} \cdot \nabla \vec{E}_0 dV$$

由牛顿第三定律，电介质不会对自身施加力的作用，因此外场中的一块**孤立的电介质受到的合力**为

$$\vec{F} = \iiint (\vec{P} \cdot \nabla \vec{E}) dV$$



线性各向同性介质受力

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi(\vec{r}) \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$$

$$\longrightarrow \vec{P} \cdot \nabla \vec{E} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \nabla \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} \cdot \nabla \vec{E}$$

$$\longrightarrow \vec{P} \cdot \nabla \vec{E} = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) \nabla E^2$$

$$\begin{aligned} (\vec{P} \cdot \nabla \vec{E})_x &= \vec{P} \cdot \nabla E_x = (\varepsilon - \varepsilon_0) (E_x \partial_x E_x + E_y \partial_y E_x + E_z \partial_z E_x) \\ &= (\varepsilon - \varepsilon_0) (E_x \partial_x E_x + E_y \partial_x E_y + E_z \partial_x E_z) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) \partial_x (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) \partial_x E^2 \end{aligned}$$

简单介质（线性、均匀、各向同性介质）受力

对于简单介质，由于 ε 为常数，因而：

$$\vec{P} \cdot \nabla \vec{E} = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0) \nabla E^2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \nabla \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 \right)$$

$$\longrightarrow \vec{P} \cdot \nabla \vec{E} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \nabla w, \quad \text{where } w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

介质受力指向静电能密度增加最快的方向，
介质具有向着静电能密度更大的区域运动的趋势。





"If you wish to
understand the
Universe,
think of Energy,
Frequency and
Vibration."
~ Nikola Tesla

Thank You!