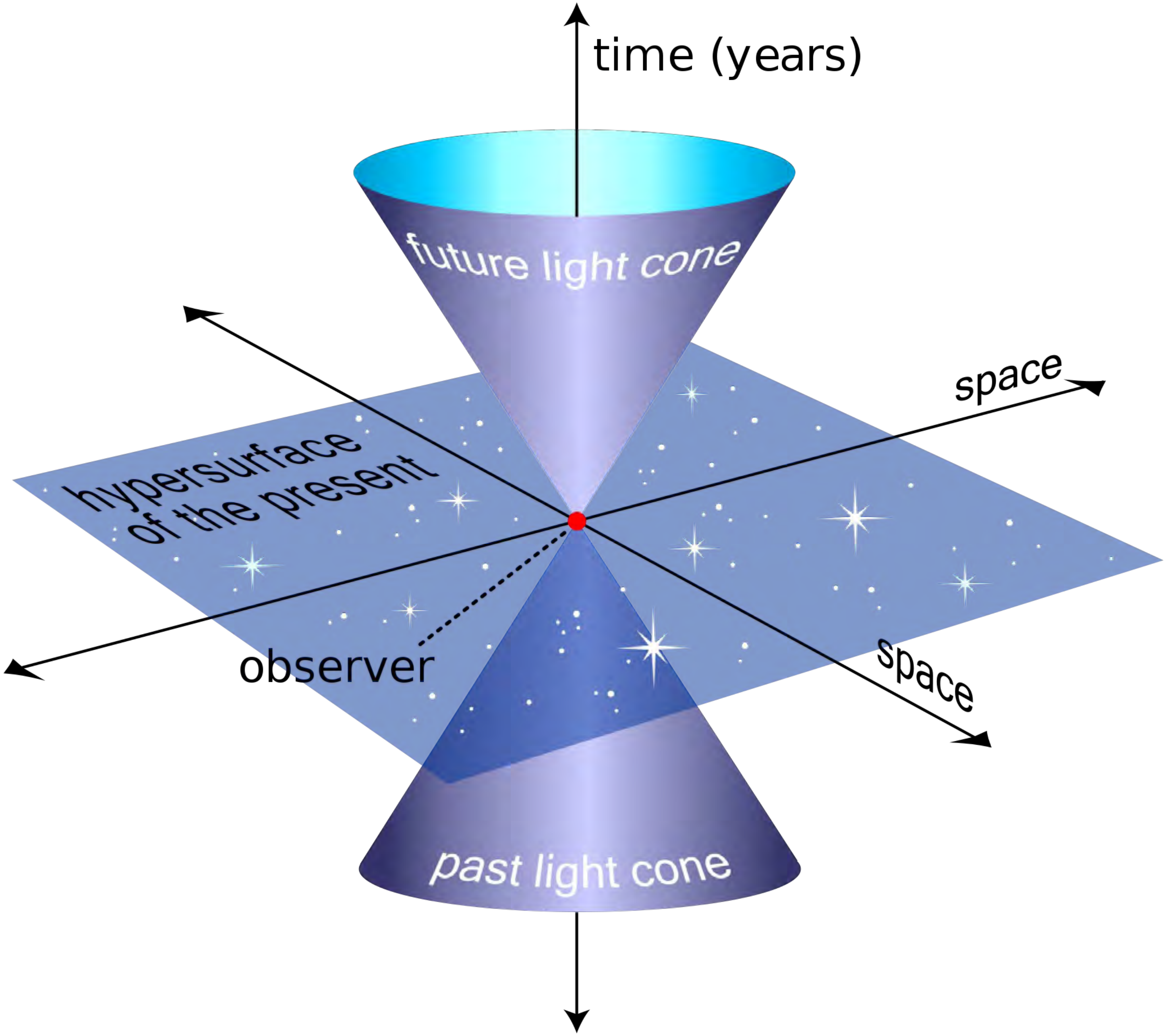
§5-7 电场与磁场的相对性



一、爱因斯坦的两条基本假设

1. 相对性原理

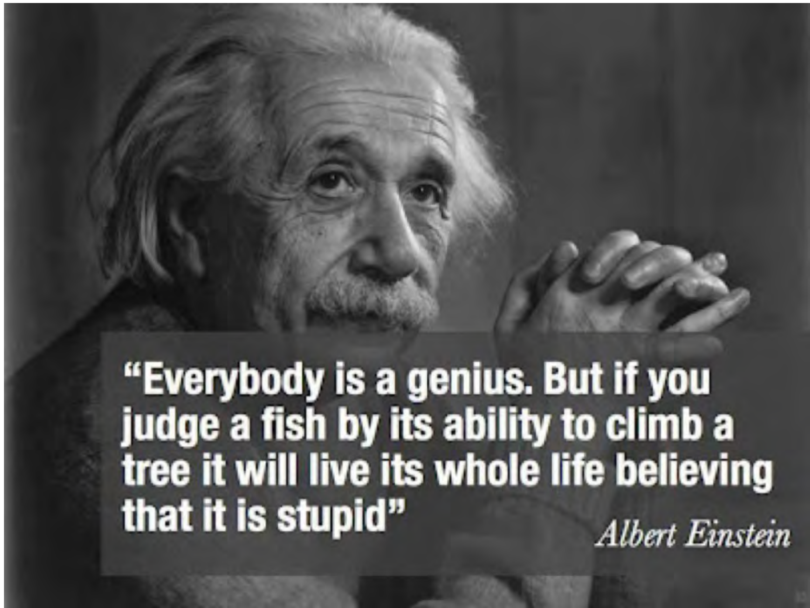
物理定律在所有惯性系中都具有形同的形式。

2. 光速普适原理

光在真空中传播的速度对于所有观测者都具相同的数值。

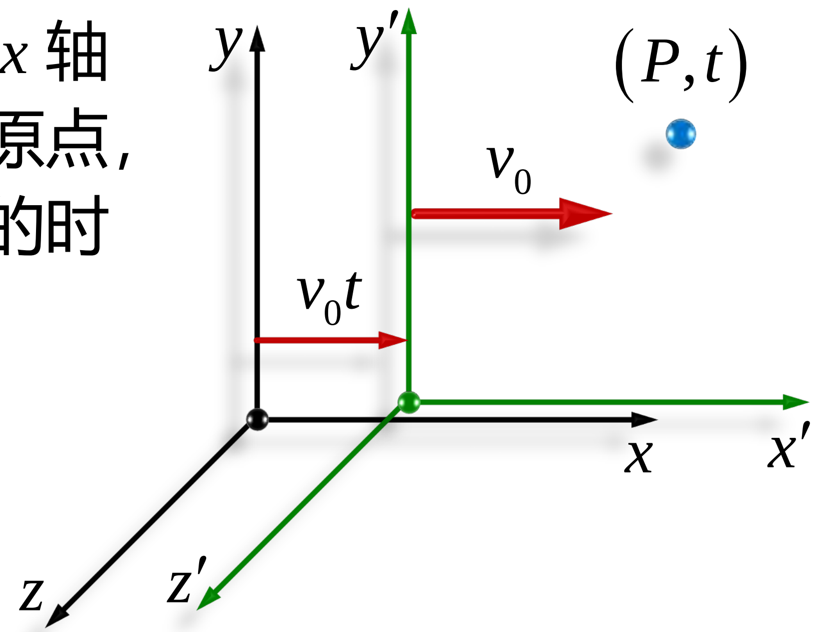
$$c = 299792458 \ \text{m/s} \approx 3\times10^{8} \ \text{m/s}$$

【注】所有与相对论运动学有关的结论皆可在此二假设以及关于时空本身的假设（时间是均匀的；空间是均匀、各向同性的）基础上导出。



二、洛伦兹变换

若 K' 系相对于 K 系以速度 v_0 沿着 x 轴正向运动，并设两系有共同的时空原点，则两个参考系对于同一事件所测量的时空坐标由洛伦兹变换相联系：



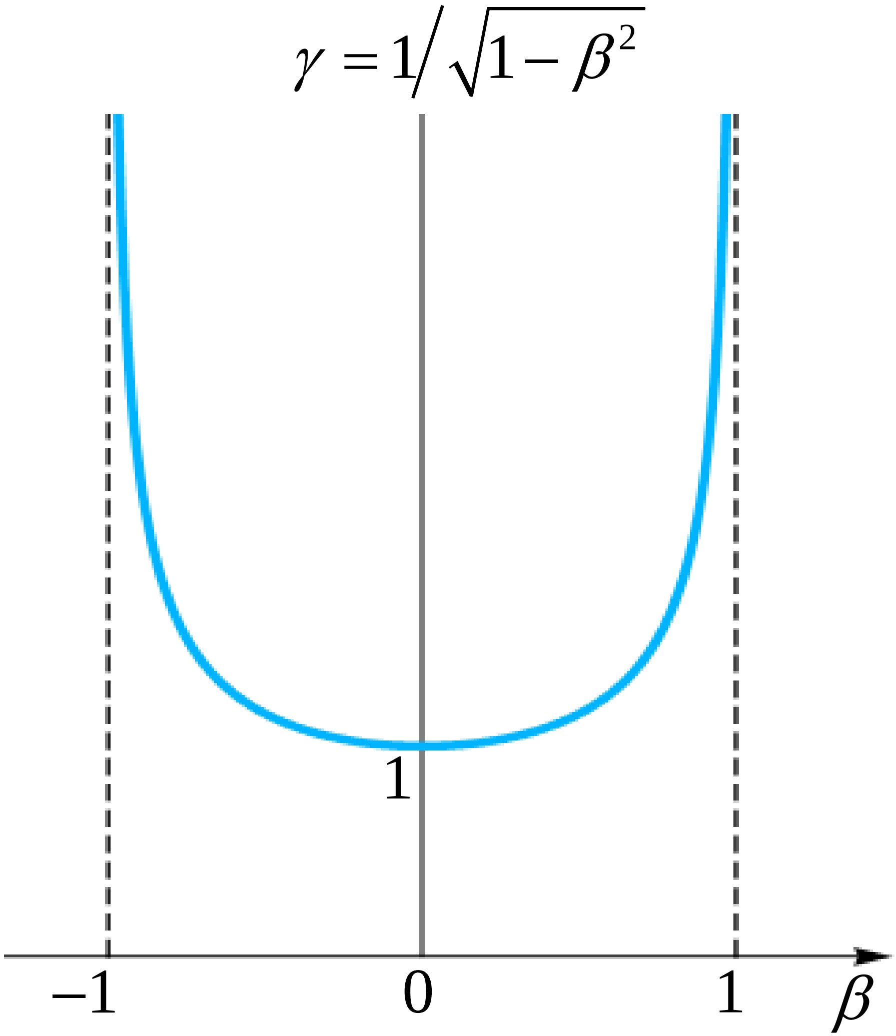
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\beta_0\gamma_0 & 0 & 0 \\ -\beta_0\gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\beta_0 \triangleq \frac{v_0}{c}$$

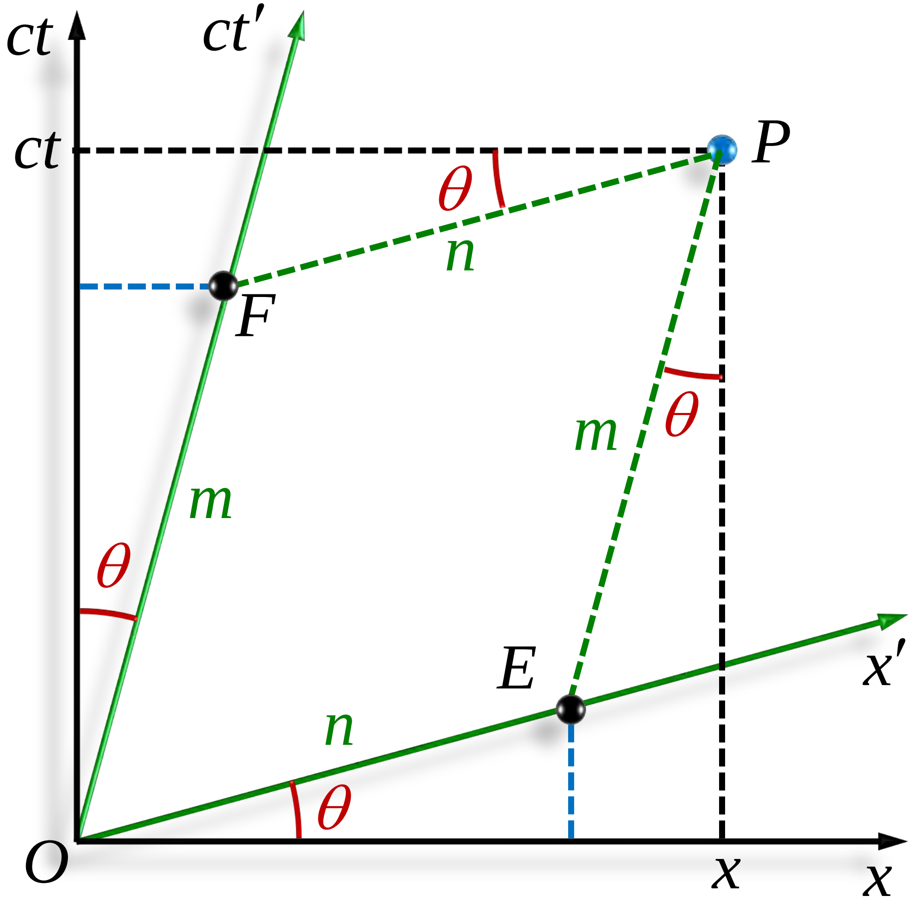
$$\gamma_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$$

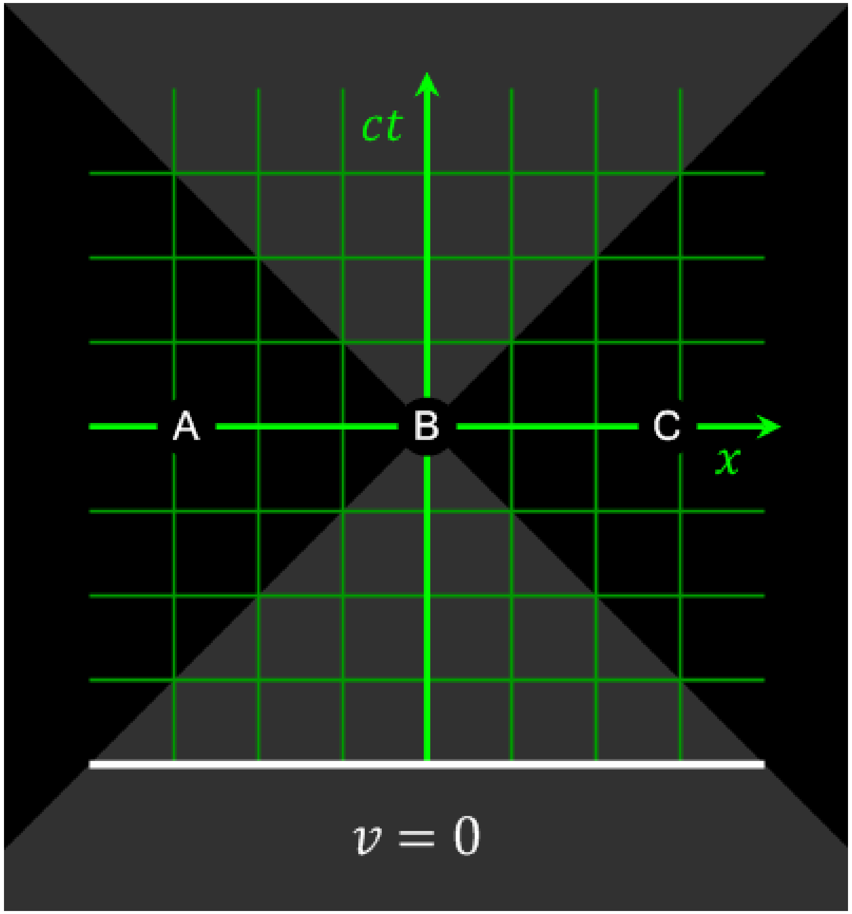
$$\Rightarrow \begin{cases} ct' = \gamma_0 (ct - \beta_0 x) \\ x' = \gamma_0 (x - \beta_0 ct) \\ y' = y, \quad z' = z \end{cases}$$

洛伦兹因子



β	γ
0.50000	1.1547
0.90000	2.2942
0.95000	3.2026
0.99000	7.0888
0.99900	22.366
0.99990	70.712
0.99999	223.61
$1-10^{-10}$	70711



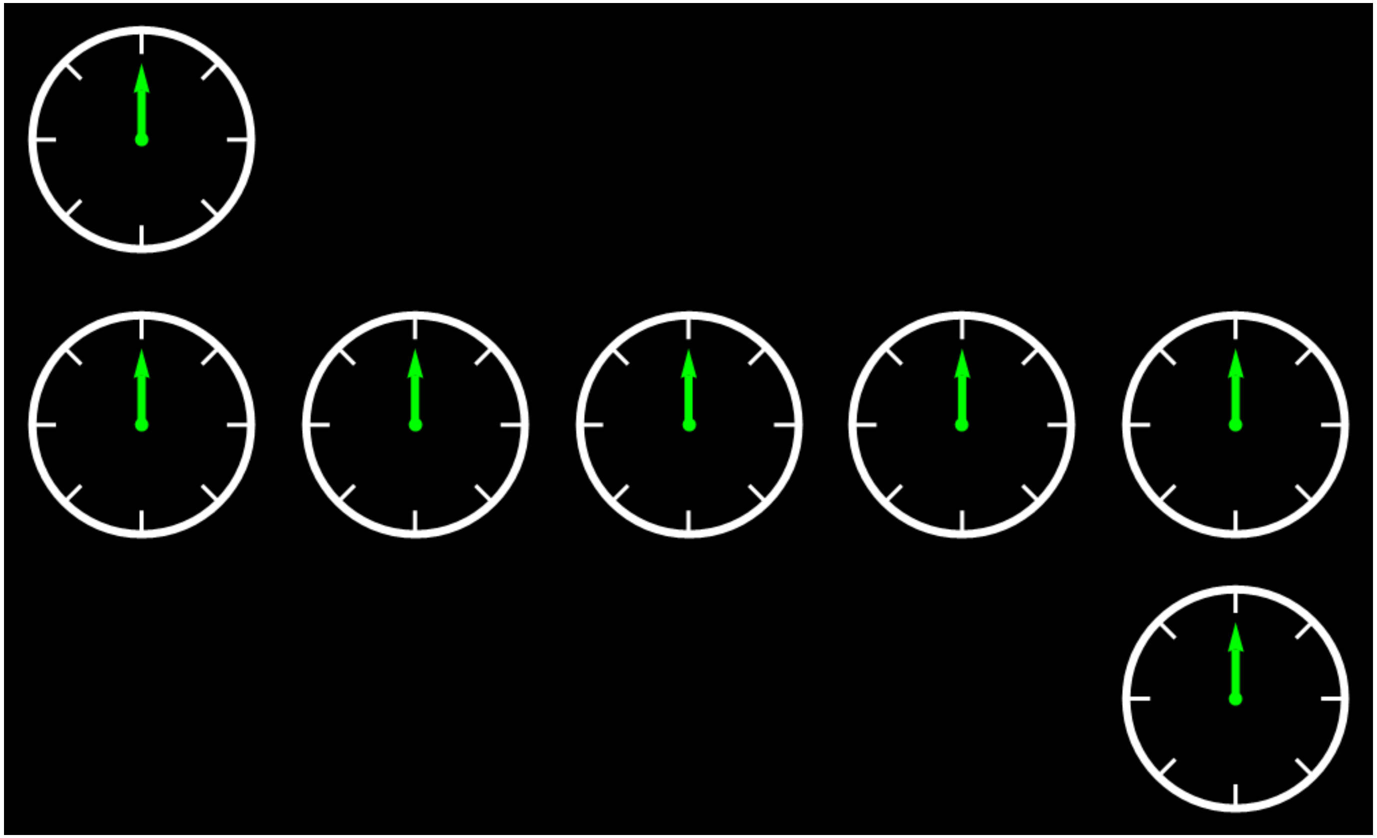


$$\begin{cases} \beta_0 = \tan\theta \\ ct' = \dfrac{m\cos\theta}{\gamma_0}, \qquad x' = \dfrac{n\cos\theta}{\gamma_0} \end{cases}$$

1. 原时

一个以速度 u 相对于地面运动的时钟，时钟静止系中测量的走时（**原时**）为 $d\tau$ 时，地面观测者测量的走时为：

$$dt = \gamma d\tau = \frac{d\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$



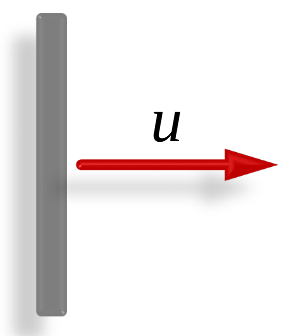
2. 原长

一把以速度 u 相对于地面运动的尺子，设在尺子自身系中的长度（**原长**）设为 dl_0，地面观测者测量的长度为 dl：

（1）如果速度平行于尺子，则

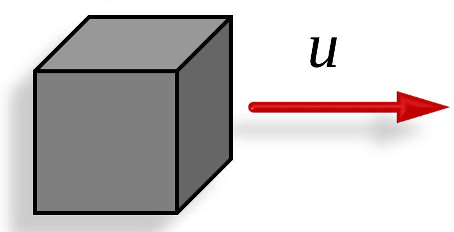
$$dl = \frac{dl_0}{\gamma} = dl_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

（2）如果速度垂直于尺子，则



$$dl = dl_0$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta V_0}{\gamma} = \Delta V_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$



3. 四维速度

粒子的运动就是一系列事件的集合。在 K 中描述某粒子运动的事件用 $(ct, \mathbf{r}) = (ct, x, y, z)$ 表示，其（三维）速度为

$$\vec{u} \triangleq \frac{d\vec{r}}{dt} = (u_x, u_y, u_z)$$

粒子的4–速度定义为：

$$\boxed{U \triangleq \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} c \\ \vec{r} \end{pmatrix}} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c \\ \vec{r} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad U = \gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} c \\ \vec{u} \end{pmatrix}$$

【注】4–速度的分量满足洛伦兹变换。

速度变换

设粒子在 K 系与 K' 系中的速度分别为 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}'$，K' 系相对于 K 系的速度为 v_0，记

$$\gamma_0=\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}},\qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\qquad \gamma'=\frac{1}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}\gamma'c\\ \gamma'u'_x\\ \gamma'u'_y\\ \gamma'u'_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_0 & -\beta_0\gamma_0 & 0 & 0\\ -\beta_0\gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma c\\ \gamma u_x\\ \gamma u_y\\ \gamma u_z\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma' c = \gamma_0 \gamma \left(c - \beta_0 u_x \right) \\ \gamma' u'_x = \gamma_0 \gamma \left(-\beta_0 c + u_x \right) \\ \gamma' u'_{y,z} = \gamma u_{y,z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma' = \gamma_0 \gamma \left(1 - \frac{v_0 u_x}{c^2} \right)$$

$$\Rightarrow u'_x = \frac{u_x - v_0}{1 - v_0 u_x / c^2}$$

$$\Rightarrow u'_{y,z} = \frac{u_{y,z}}{\gamma_0 \left(1 - v_0 u_x / c^2 \right)}$$

【注】若粒子沿着 x 轴方向运动，则

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB} v_{BC} / c^2}$$

4. 四维动量

（静止）质量为 m、速度为 $\boldsymbol{u}$ 的粒子的**4–动量**定义为：

$$P \triangleq mU = \gamma m \begin{pmatrix} c \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

其中，W 和 $\boldsymbol{p}$ 分别为粒子的相对论能量和动量，其定义为：

$$W \triangleq \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} \triangleq \gamma m\vec{u} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

【注1】由定义不难看出：

$$\vec{u} = c^2\vec{p}/W, \qquad W = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

【注2】4–动量的分量满足洛伦兹变换：

$$W'/c = \gamma_0\left(W/c - \beta_0 p_x\right), \quad p'_x = \gamma_0\left(p_x - \beta_0 W/c\right), \quad p'_{y,z} = p_{y,z}$$

三、电荷与电流

- 设在 K 系中有如下的电荷分布和电流分布：

$$\rho \triangleq \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad \vec{j} \triangleq \rho \vec{u}$$

- 如果 K_0 系相对于 K 系以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动，则 K_0 系电荷元静止，电流密度 $\boldsymbol{j}_0 = 0$，而电荷密度为

$$\rho_0 \triangleq \frac{\Delta q_0}{\Delta V_0}$$

（**固有密度**：电荷静止系中的密度）

- 由于 $\Delta q_0 = \Delta q$ 以及 $\Delta V_0 = \gamma \Delta V$，因此

$$\rho = \gamma \rho_0, \quad \vec{j} = \gamma \rho_0 \vec{u} \quad \text{where} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

● 定义**四维电流密度**：

$$J \triangleq \rho_0 U = \rho_0 \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{u} \end{pmatrix}$$

由于 $\rho = \gamma\rho_0$， 因而

$$J = \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

【注】 4–电流密度的分量满足洛伦兹变换：

$$\begin{pmatrix} \rho' c \\ j'_x \\ j'_y \\ j'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\beta_0\gamma_0 & 0 & 0 \\ -\beta_0\gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho c \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

四、粒子动力学

作为Newton方程的直接推广，**假设**相对性情形下粒子的动力学方程为：

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}\quad \text{where } \vec{p}\triangleq\gamma m\vec{u}=\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

【注1】该结论的正确性必须由实验加以检验。

【注2】一般而言，力与加速度并不平行：

$$\vec{F}=\gamma m\frac{d\vec{u}}{dt}+\frac{d\gamma}{dt}m\vec{u}=\gamma m\left[\vec{a}+\gamma^2\frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})\vec{u}}{c^2}\right]$$

（1）若 $\boldsymbol{F}\perp\boldsymbol{u}$，则 $\boldsymbol{F}=\gamma m\boldsymbol{a}$；

（2）若 $\boldsymbol{F}\,//\,\boldsymbol{u}$，则 $\boldsymbol{F}=\gamma^3 m\boldsymbol{a}$。

【注3】利用 $W^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ 可得：

$$2W\frac{dW}{dt} = 2c^2 p\frac{dp}{dt}$$

$$= 2c^2\vec{p}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= 2c^2\vec{p}\cdot\vec{F}$$

再利用 $\boldsymbol{u} = c^2\boldsymbol{p}/W$ 得到：

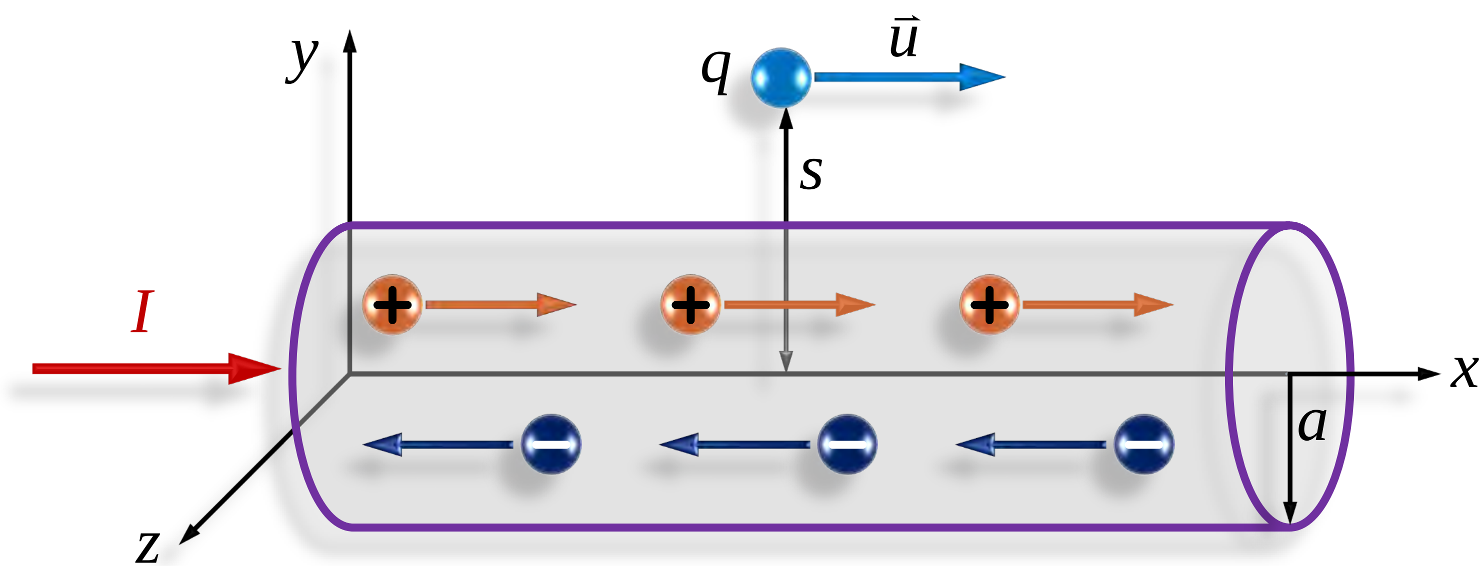
$$\vec{F}\cdot\vec{u} = \frac{dW}{dt}$$

这就是相对论下的动能定理。

【例】在 K 系中，一半径为 a、对称轴为 x 轴的电中性无限长导线载有均匀电流：$I=j\cdot\pi a^2$。某一时刻，距离 x 轴 s 处有一点正电荷 q 以速度 u 沿着 x 轴正向运动（设该时刻电荷的 z 坐标为 0）。试仅仅利用电场基本规律和相对论分别讨论：

（1）该时刻粒子在 K' 系中受到的力（K' 系以速度 u 沿着 x 轴正向运动，由于粒子相对于该系瞬时静止，故称其为粒子的**瞬时共动坐标系**）

（2）该时刻粒子在 K 系中受到的力。



【解】 （1）先求电荷在 K' 系中受到的力。

在 K 系中，$\rho=0$，$j_x=j$，$j_y=j_z=0$。因而在 K' 系中

$$\begin{pmatrix}\rho' c\\ j'_x\\ j'_y\\ j'_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0\\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho c\\ j_x\\ j_y\\ j_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0\\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ j\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho'=-\gamma\frac{u}{c^2}j$$ （K' 系中导线带负电）

由高斯定理：K' 系中，点电荷处的电场只有 y 方向分量，且

$$\vec{E}'=\frac{\rho'\pi a^2}{2\pi\varepsilon_0 s}\hat{y}=-\gamma\frac{u}{c^2}\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 s}\hat{y}$$ （K' 系中静止单位电荷受力）

在 K' 系中，由于点电荷静止，故电荷只受到的电场力作用:

$$\boxed{\vec{F}' = q\vec{E}' = -\gamma \frac{u}{c^2} \frac{Iq}{2\pi\varepsilon_0 s} \hat{y}} \quad = \frac{d\vec{p}'}{dt'} = \frac{dp'_y}{dt'} \hat{y}$$

（2）下面求电荷在 K 系中受到的力。

由于点电荷在 K' 系中静止，故 $dt' = d\tau$，并且动能定理意味着 $dW' = 0$，所以

$$\begin{pmatrix} dW/c \\ dp_x \\ dp_y \\ dp_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW'/c \\ dp'_x \\ dp'_y \\ dp'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dp'_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

由于 $dt=\gamma d\tau=\gamma dt'$，因而在 K 系中，电荷受到的力为：

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\tau}{dt}\frac{d\vec{p}}{d\tau}=\frac{1}{\gamma}\frac{dp_y}{d\tau}\hat{y}=\frac{1}{\gamma}\frac{dp'_y}{dt'}\hat{y}=-\frac{u}{c^2}\frac{Iq}{2\pi\varepsilon_0 s}\hat{y}$$

定义：

$$\mu_0\triangleq\frac{1}{\varepsilon_0 c^2},\quad B\triangleq\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{F}=-quB\hat{y}}$$

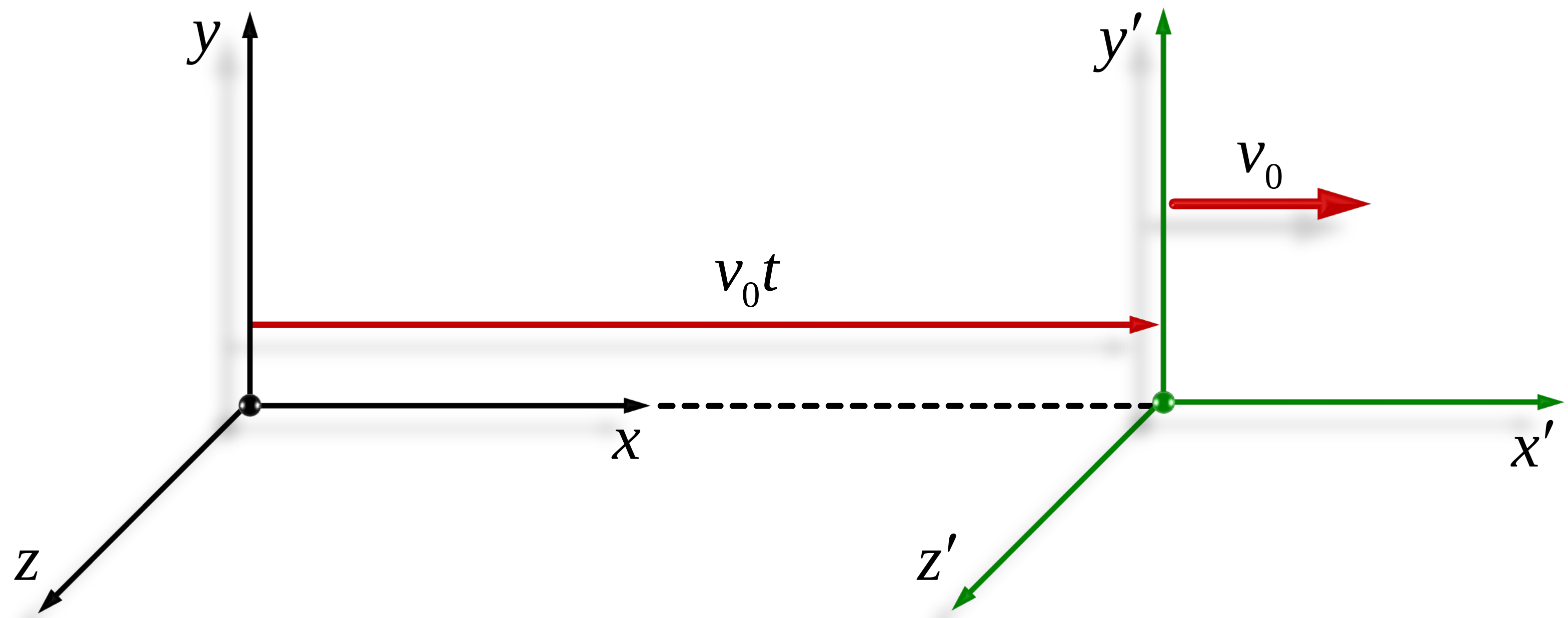
由于点电荷在 K 系中静止，故该力不可能是电场力。因此：

在 K 系中，带电粒子受到的与其速度垂直的力是一种不同于电力的新的作用，谓之**磁力**，而 B 则称为**磁感应强度**。

五、电磁场的变换

(1) 设 K' 系相对于 K 系沿着 x 轴正方向以速度 v_0 运动。令

$$\gamma_0=\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}},\qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\qquad \gamma'=\frac{1}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}$$



(2) 下面所讨论平行板电容器的极板面积皆设为无限大，螺线管则为无限长密绕螺线管。

情形I：在 K 系中静止的电容器
（极板垂直于 y 轴，带电量为 $\pm\sigma_0$ ）

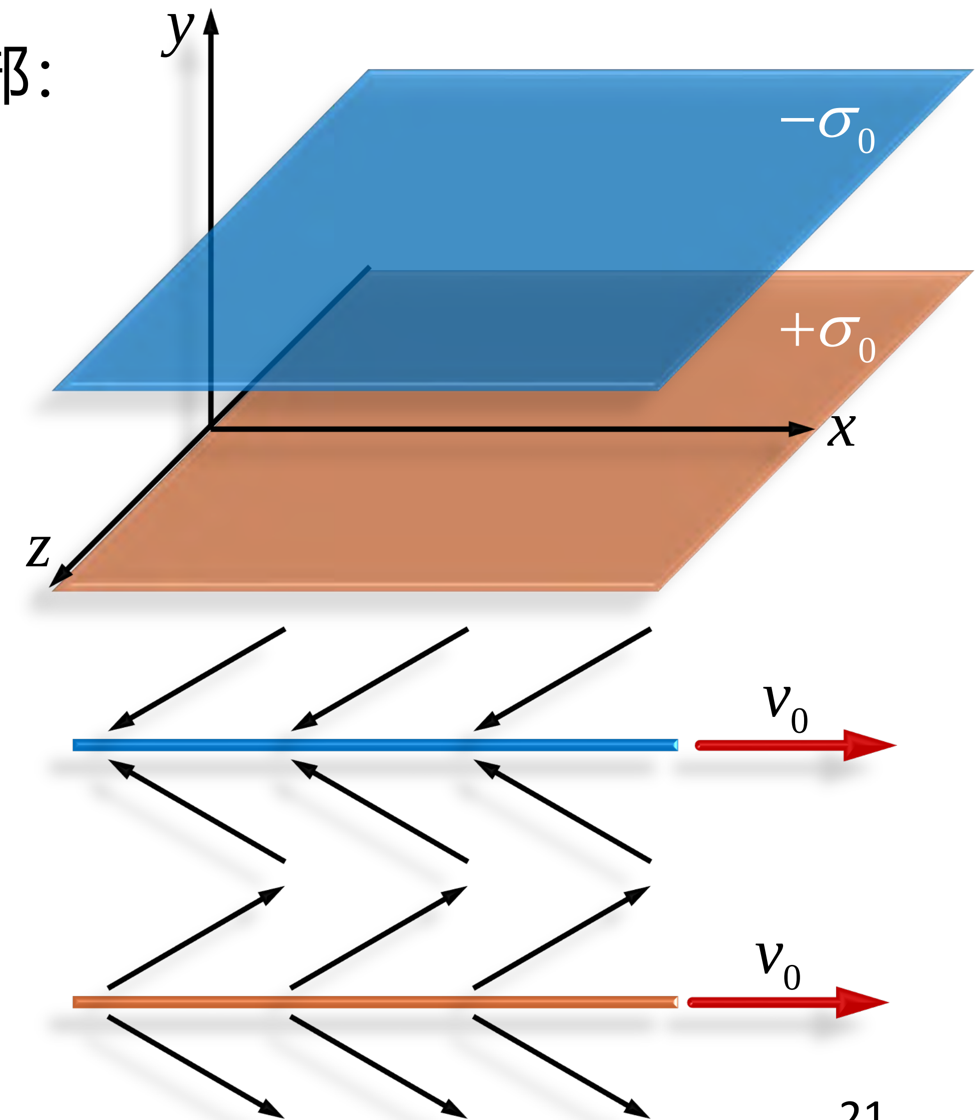
由于 $\sigma=\gamma_0\sigma_0$，因此电容器内部：

$$\vec{E}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{E}'=\frac{\gamma_0\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{y}=\gamma_0\vec{E}$$

若 K 系中磁场为零，则 K 与 K' 系中垂直于运动方向的电场变换关系为：

$$\vec{E}'_\perp=\gamma_0\vec{E}_\perp$$



情形II：在 K 系中静止的电容器
（极板垂直于 x 轴，带电量为 $\pm\sigma_0$ ）

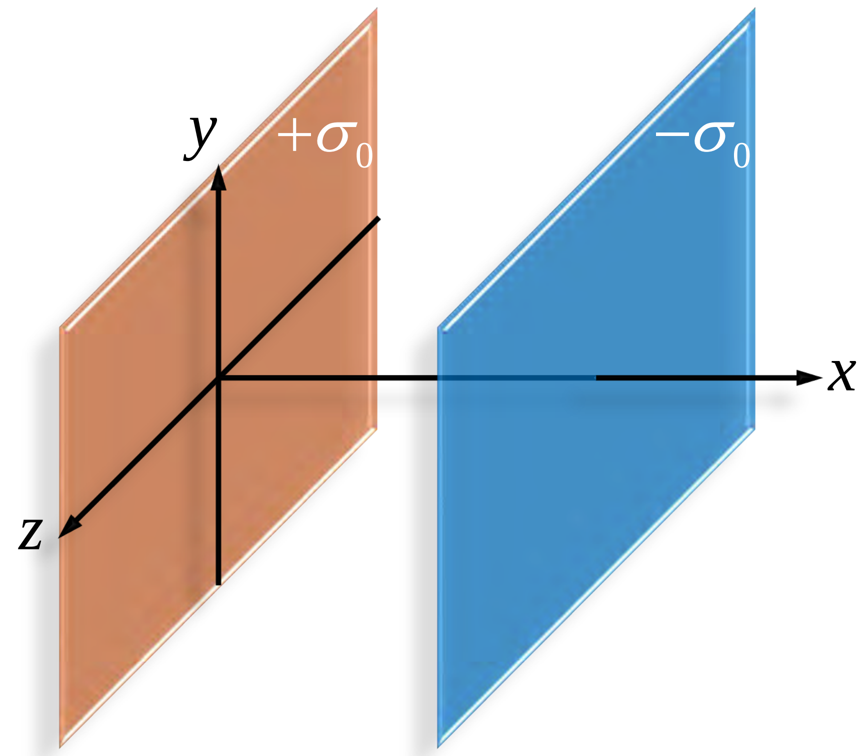
由于 $\sigma = \sigma_0$，因此电容器内部：

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{E}' = \frac{\gamma_0\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{y} = \vec{E}$$

若 K 系中磁场为零，则 K 与 K' 系中平行于运动方向的电场变换关系为：

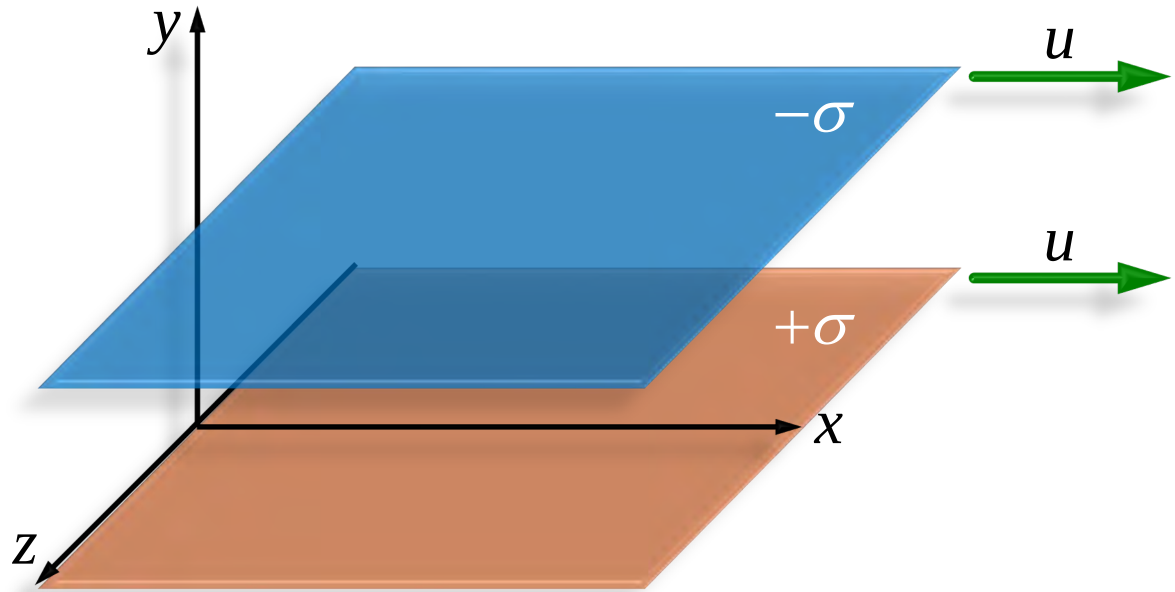
$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$$



情形IV：在 K 系中静止的无限长密绕螺线管（极板垂直于 y 轴，带电量为 $\pm\sigma$）

【注1】电容器相对于 K' 系的速度显然也沿着 x 轴，大小为

$$u' = \frac{u - v_0}{1 - v_0 u / c^2}$$



【注2】设 σ_0 为正极板的固有面电荷密度，则在 K 和 K' 系中相应的面密度分别为 $\sigma = \gamma\sigma_0$ 和 $\sigma' = \gamma'\sigma_0$，而由于

$$\gamma' = \gamma_0 \gamma \left(1 - \frac{v_0 u_x}{c^2}\right) \Rightarrow \sigma' = \frac{\gamma'}{\gamma}\sigma = \gamma_0\left(1 - \frac{v_0 u}{c^2}\right)\sigma$$

- K 系中，电容器的内部电场与磁场分别为（外部为零）：

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{y}, \qquad \vec{B} = \mu_0 \sigma u \hat{z}$$

- K' 系中，电容器内部的电场与磁场分别为

$$\begin{cases} \vec{E}' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}\hat{y} & = \gamma_0\left(1 - \dfrac{v_0 u}{c^2}\right)\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{y} & = \gamma_0\left(E_y - \dfrac{v_0}{c^2\varepsilon_0\mu_0}B_z\right)\hat{y} \\ \vec{B}' = \mu_0\sigma' u'\hat{z} & = \gamma_0\left(1 - \dfrac{v_0 u}{c^2}\right)\mu_0\sigma u'\hat{z} & = \gamma_0\left(B_z - v_0\mu_0\varepsilon_0 E_y\right)\hat{z} \end{cases}$$

利用 $c^2 = 1/(\varepsilon_0\mu_0)$，得到

$$E'_y = \gamma_0\left(E_y - v_0 B_z\right), \qquad B'_z = \gamma_0\left(B_z - \frac{v_0}{c^2}E_y\right)$$

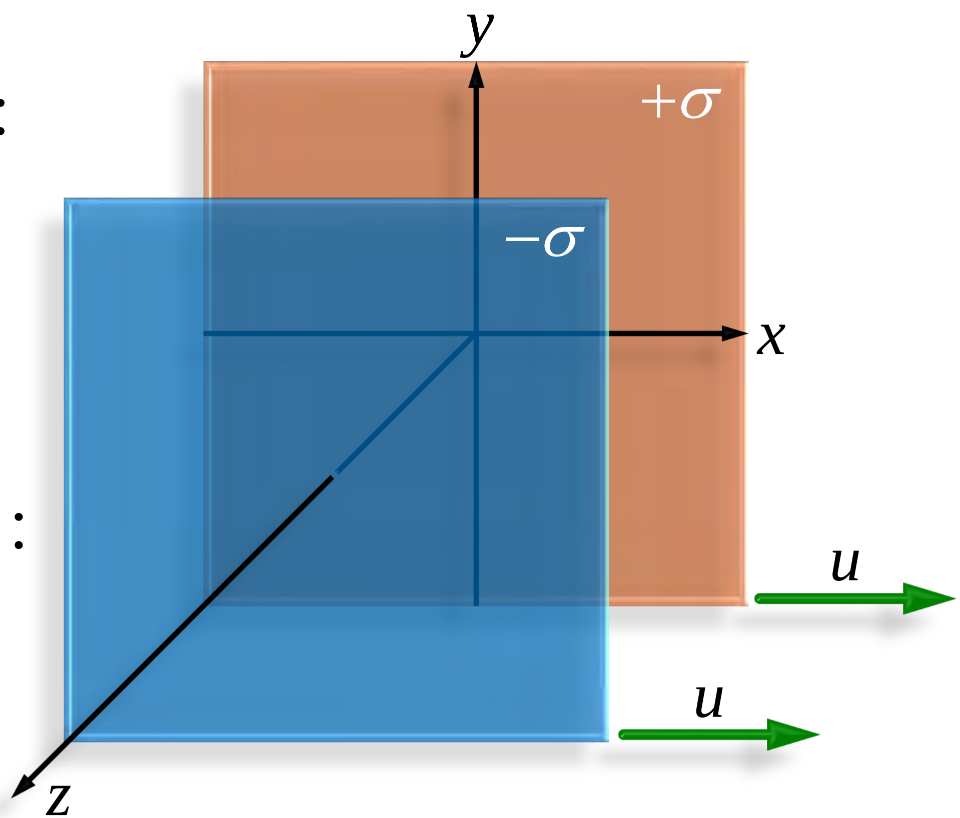
情形V：在 K 系中沿 x 轴以速度 u 匀速运动的电容器（极板垂直于 z 轴，带电量为 $\pm\sigma$）

- K 系中，电场与磁场分别为：

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z}, \qquad \vec{B} = -\mu_0 \sigma u \hat{y}$$

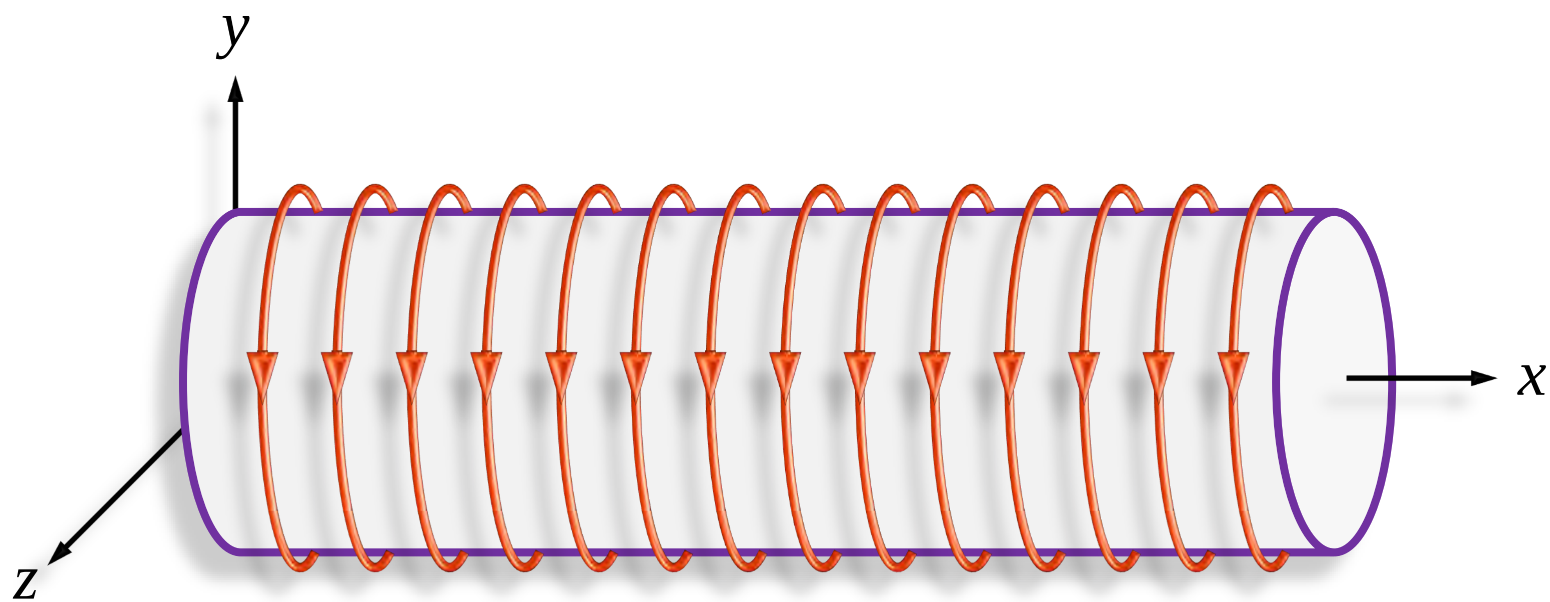
- K' 系中，电场与磁场分别为：

$$\vec{E}' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}\hat{z}, \qquad \vec{B}' = -\mu_0 \sigma' u' \hat{y}$$



$$\Rightarrow \quad E_z' = \gamma_0\left(E_z + v_0 B_y\right), \qquad B_z' = \gamma_0\left(B_y + \frac{v_0}{c^2}E_z\right)$$

情形VI：在 K 系中静止的、对称轴为 x 轴的螺线管（单位长度匝数为 n，每匝电流强度为 I）



- K 系中，磁场为： $\vec{B}=\mu_0 nI\hat{x}$

- K' 系中， 磁场为： $\vec{B}'=\mu_0 n'I'\hat{x}$

（1）运动方向长度收缩，因而 $n' = \gamma_0 n$；

（2）运动始终变慢，因而 $dt' = \gamma_0 dt$

$$\Rightarrow I' = \frac{\Delta q'}{\Delta t'} = \frac{\Delta q}{\gamma_0 \Delta t} = \frac{I}{\gamma_0}$$

$$\Rightarrow B'_x = \mu_0 n' I' = \mu_0 n I = B_x$$

【注】即两系中面电流密度相同。此结论也可如下得到：

（1）两系中螺线管皆呈电中性，且只有横向电流（$\perp x$ 轴）；

（2）K' 中面电荷密度增加为 γ_0 倍，

载流子横向速度则减小为 $1/\gamma_0$：

$$u'_{y,z} = \frac{u_{y,z}}{\gamma_0 \left(1 - v_0 u_x / c^2\right)} = \frac{u_{y,z}}{\gamma_0}$$

总结前面六种情形所得结果，可得一般情形下：

$$
\begin{cases}
E'_x = E_x \\
E'_y = \gamma_0\left(E_y - v_0 B_z\right) \ = \gamma_0\left(\vec{E}_\perp + \vec{v}_0 \times \vec{B}\right)_y \\
E'_z = \gamma_0\left(E_z + v_0 B_y\right) \ = \gamma_0\left(\vec{E}_\perp + \vec{v}_0 \times \vec{B}\right)_z
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
B'_x = B_x \\
B'_y = \gamma_0\left(B_y + v_0 E_z / c^2\right) \ = \gamma_0\left(\vec{B}_\perp - \vec{v}_0 \times \vec{E} / c^2\right)_y \\
B'_z = \gamma_0\left(B_z - v_0 E_y / c^2\right) \ = \gamma_0\left(\vec{B}_\perp - \vec{v}_0 \times \vec{E} / c^2\right)_z
\end{cases}
$$

将电磁场按照平行、垂直于两系相对运动方向分解，得到

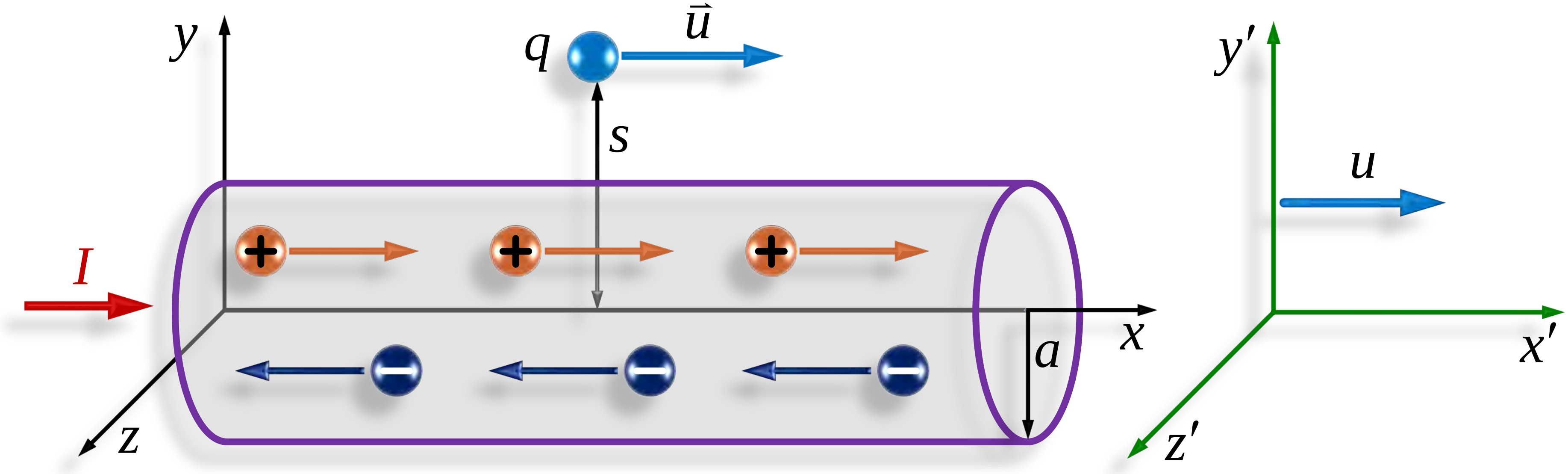
正变换：

$$\begin{cases}\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \vec{E}'_{\perp} = \gamma_0(\vec{E}_{\perp} + \vec{v}_0 \times \vec{B}) \\ \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \vec{B}'_{\perp} = \gamma_0\left(\vec{B}_{\perp} - \dfrac{\vec{v}_0 \times \vec{E}}{c^2}\right)\end{cases} \xrightarrow{\vec{E}=0} \begin{cases}\vec{E}' = \vec{v}_0 \times \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B}_{\parallel} + \gamma_0 \vec{B}_{\perp}\end{cases}$$

反变换：

$$\begin{cases}\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \vec{E}_{\perp} = \gamma_0(\vec{E}'_{\perp} - \vec{v}_0 \times \vec{B}') \\ \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \vec{B}_{\perp} = \gamma_0\left(\vec{B}'_{\perp} + \dfrac{\vec{v}_0 \times \vec{E}'}{c^2}\right)\end{cases} \xrightarrow{\vec{B}'=0} \begin{cases}\vec{E} = \vec{E}'_{\parallel} + \gamma_0 \vec{E}'_{\perp} \\ \vec{B} = \dfrac{\vec{v}_0 \times \vec{E}'}{c^2}\end{cases}$$

【例】点电荷处的电磁场以及点电荷受到的洛伦兹力。



【解】K 系中电场为零，磁场只有横向分量。因此

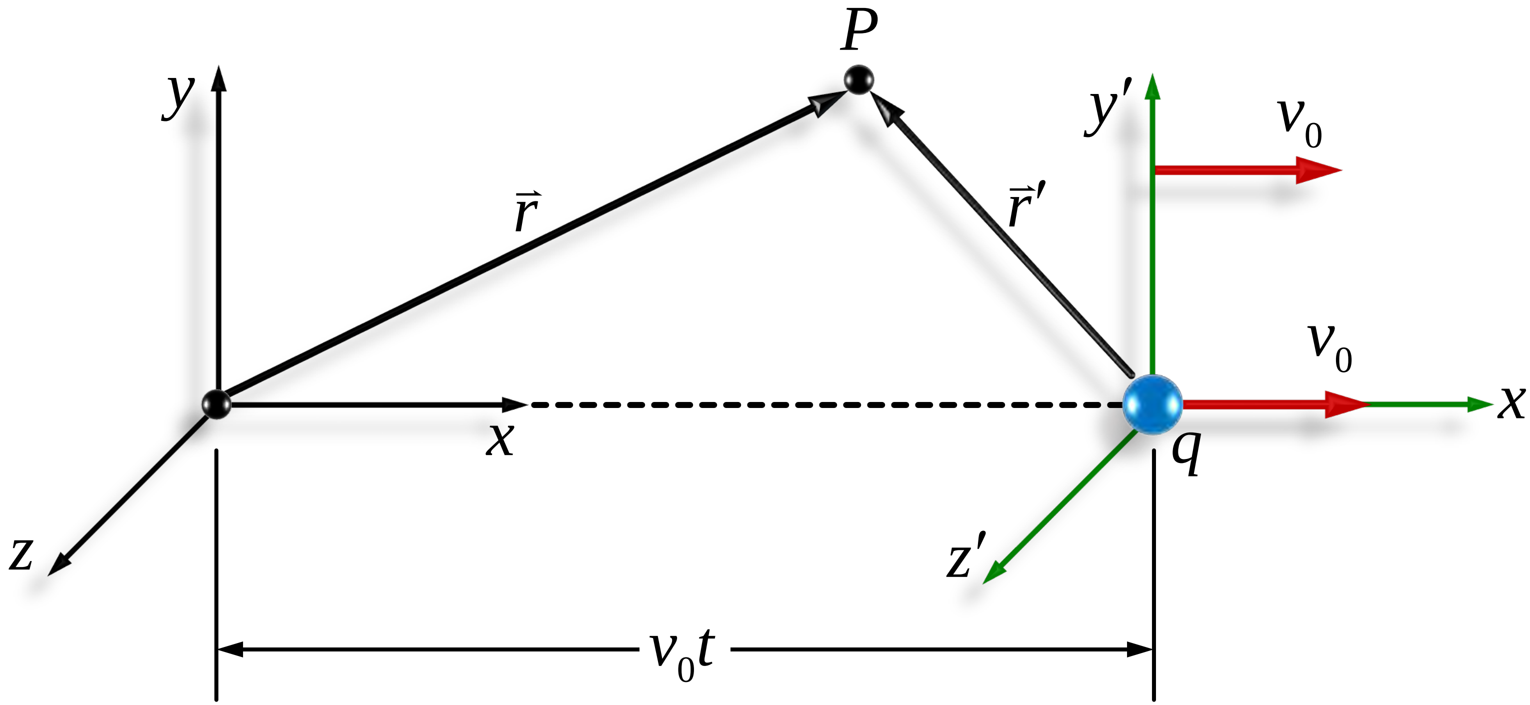
$$\vec{E}=0,\qquad \vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{z}$$

$$\vec{F}=q\vec{u}\times\vec{B}=-qu\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{y}$$

$$\vec{B}'=\gamma\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{z},\qquad \vec{E}'=-\gamma u\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{y}$$

$$\vec{F}'=q\vec{E}'=-\gamma\frac{u}{c^2}\frac{Iq}{2\pi\varepsilon_0 s}\hat{y}$$

【例】匀速运动点电荷的电磁场。

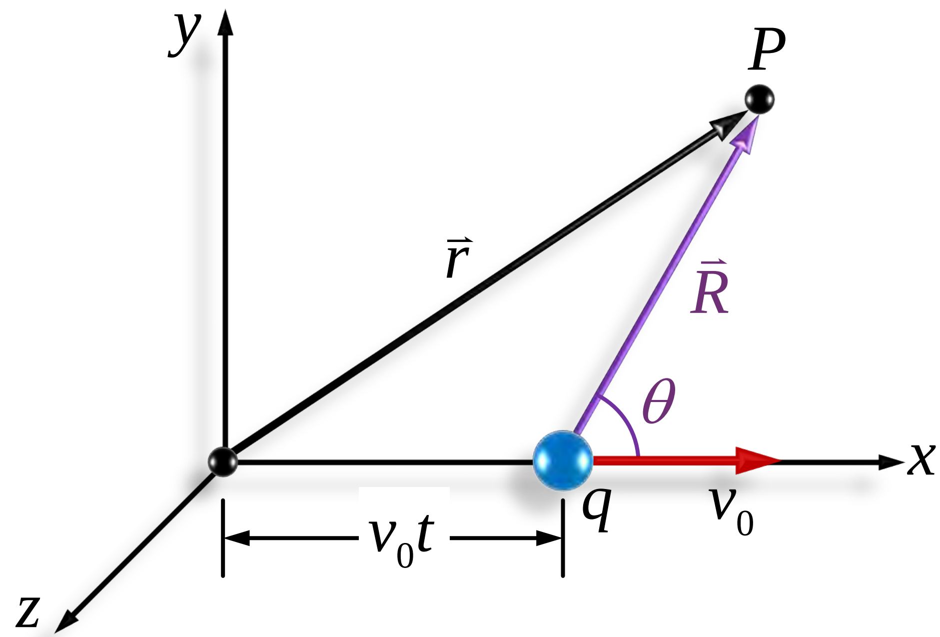


【解】K' 系中磁场为零，而电场为

$$\vec{E}' = \frac{q\vec{r}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \qquad \text{where } \ \vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$$

K 系中，磁场为 $\boldsymbol{B} = \mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{E}/c^2$，其中的 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\begin{cases} E_x = E'_x = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{x'}{r'^3} \\ E_y = \gamma_0 E'_y = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\gamma_0 y'}{r'^3} \\ E_z = \gamma_0 E'_z = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\gamma_0 z'}{r'^3} \end{cases}$$



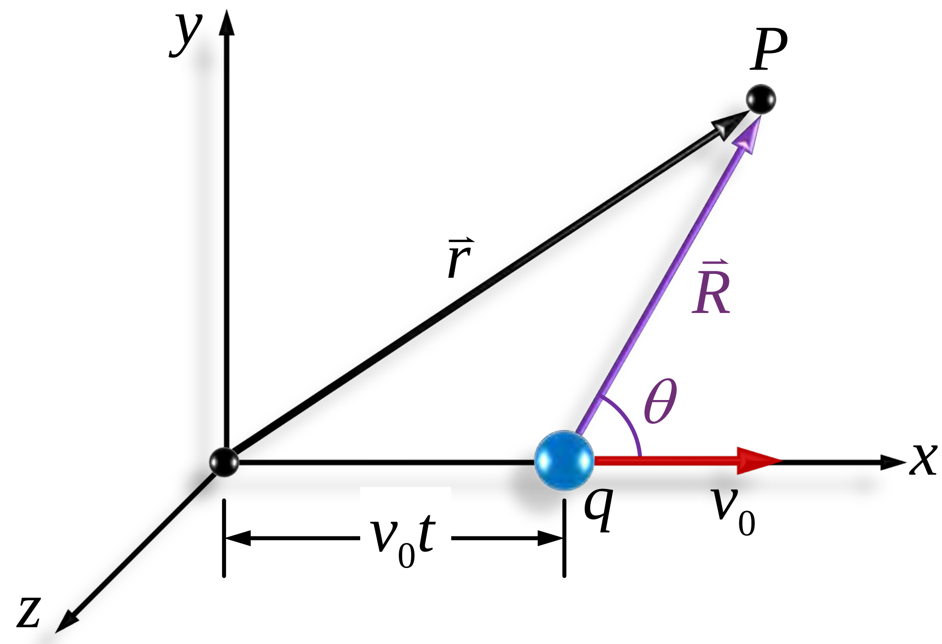
设 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \mathbf{v}_0 t$ 是 K 系中场点相对于粒子所在位置的位矢，而 $\boldsymbol{R}$ 的分量设为 X、Y、Z，根据洛伦兹变换有

$$x' = \gamma_0\left(x - v_0 t\right) = \gamma_0 X,\quad y' = y = Y,\quad z' = z = Z$$

$$\Rightarrow\ r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \gamma_0^2 X^2 + Y^2 + Z^2 = \gamma_0^2 R^2\left(1 - \beta_0^2 \sin^2\theta\right)$$

因此，匀速运动点电荷的电场为：

$$\vec{E} = \frac{q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} g(\theta)$$

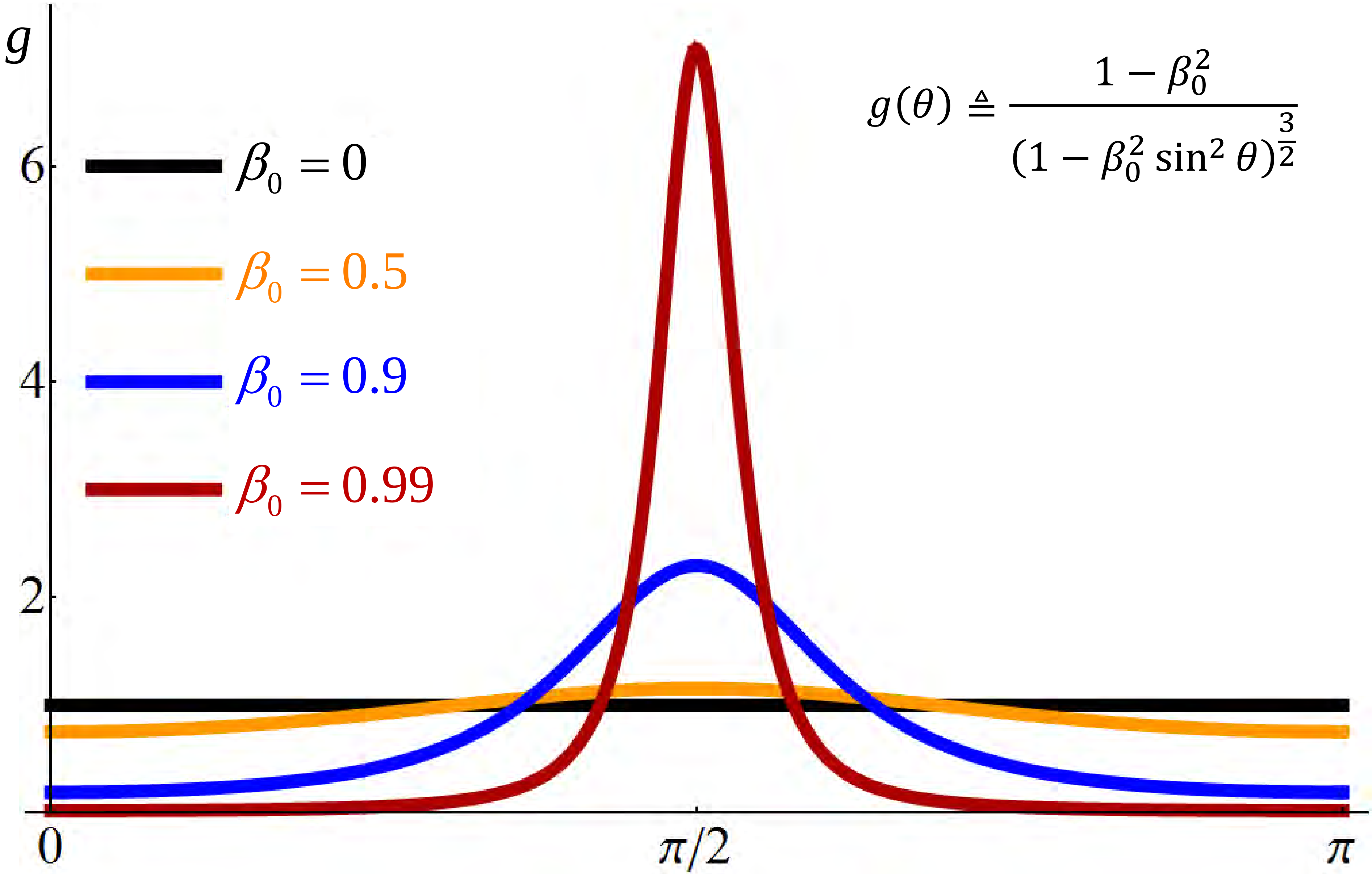


其中

$$g(\theta) \triangleq \frac{1-\beta_0^2}{(1-\beta_0^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

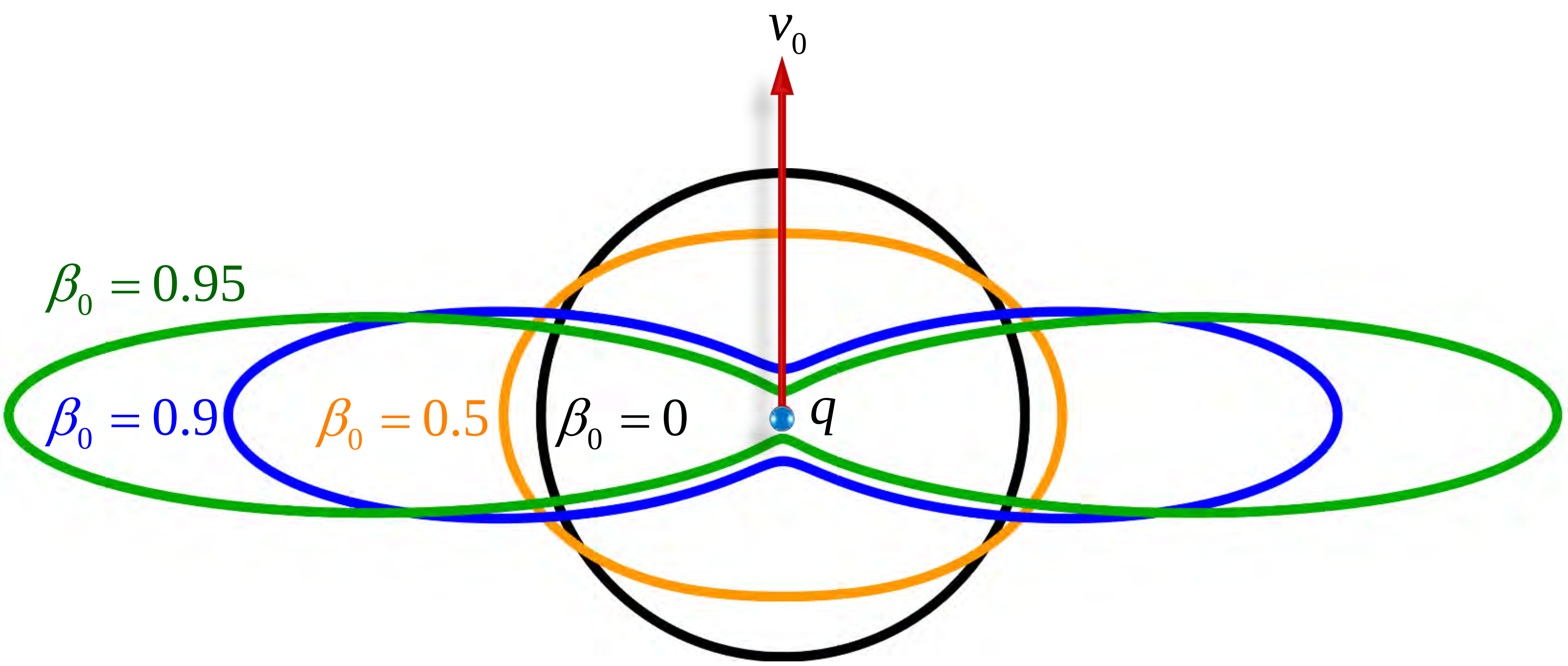
磁场为：

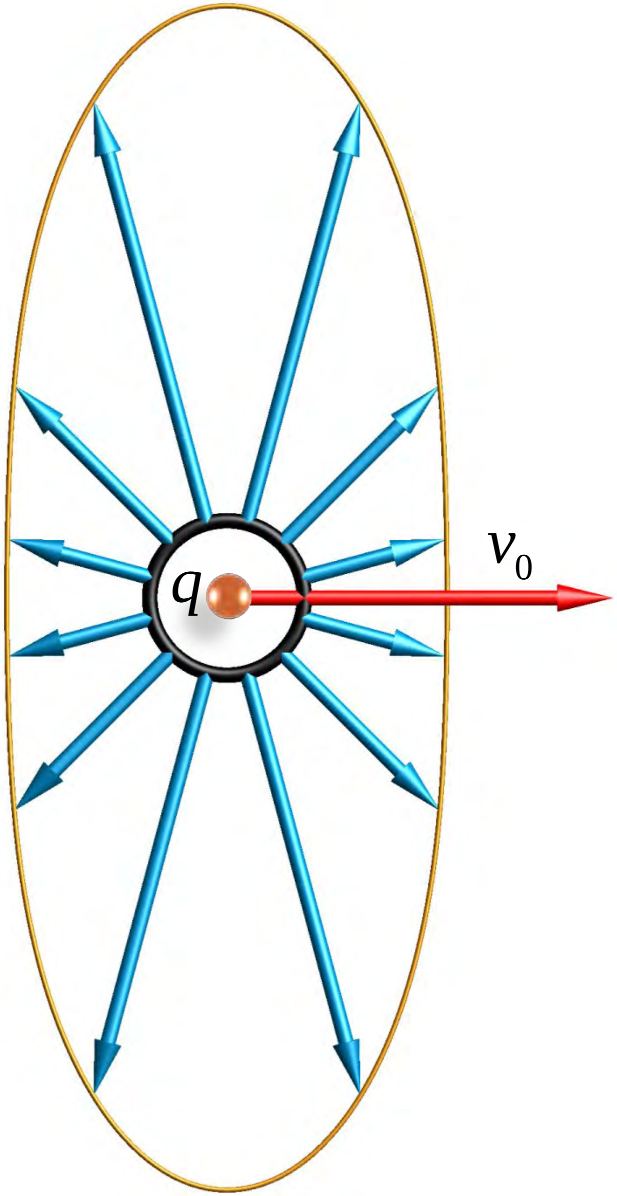
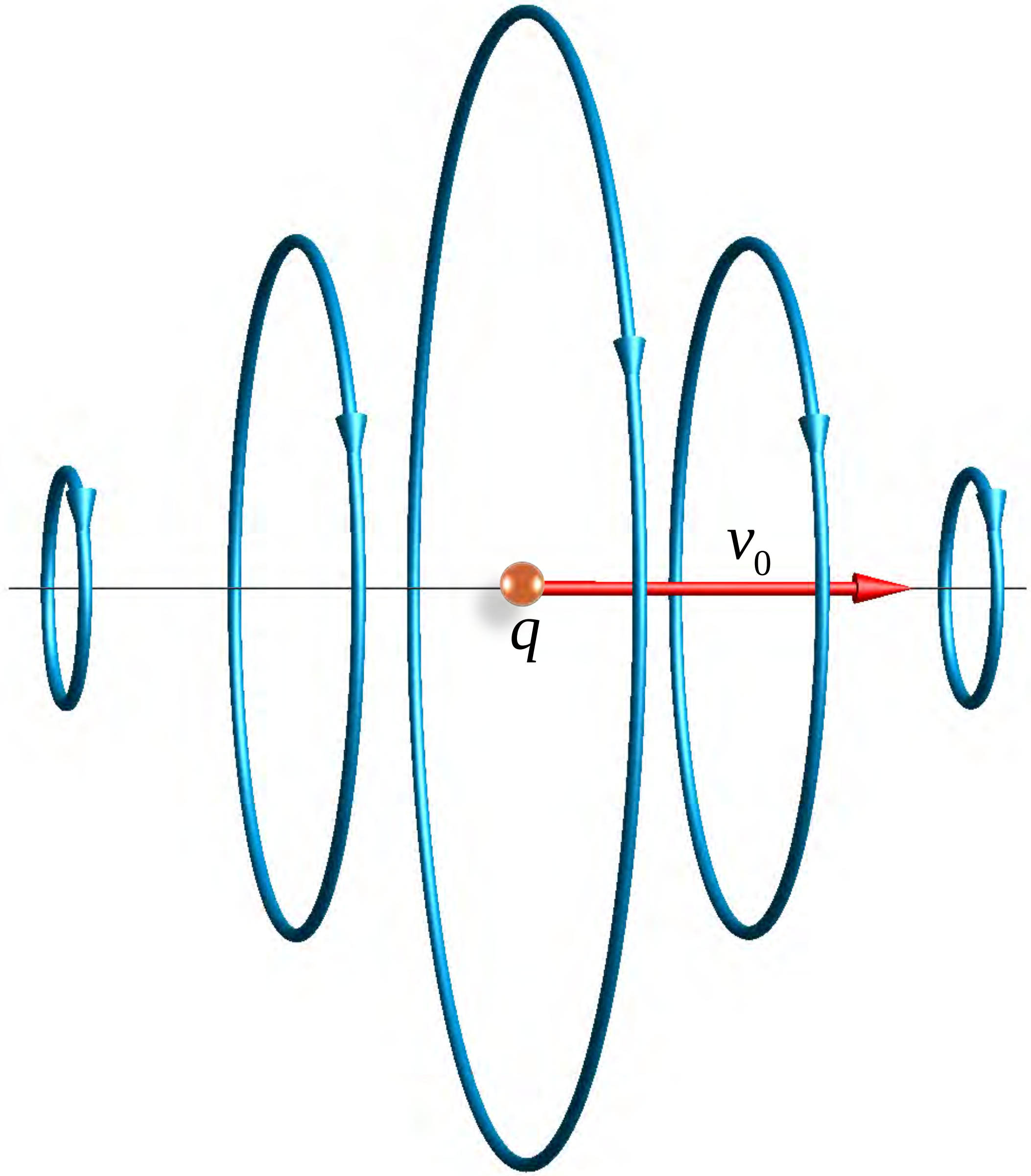
$$\vec{B} = \frac{\vec{v}_0 \times \vec{E}}{c^2} = \frac{\mu_0 q \vec{v}_0 \times \vec{R}}{4\pi R^3} g(\theta)$$



g
6
4
2
0
$\pi/2$
π
$\beta_0 = 0$
$\beta_0 = 0.5$
$\beta_0 = 0.9$
$\beta_0 = 0.99$
$g(\theta) \triangleq \frac{1-\beta_0^2}{(1-\beta_0^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$

$$g(\theta) \triangleq \frac{1-\beta_0^2}{(1-\beta_0^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$




q
v_0

v_0
q

Thank You!