作业 **10**

1. 假设 $y_1,\dots,y_n$ iid $\sim(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2 是未知参数。记样本均值和样本方差分别为 $\bar{y}$ 和 s^2。令 $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_n)^\top$, $\boldsymbol{\epsilon}=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)^\top$, $\mathbb{1}=(1,\dots,1)^\top$, 则上述模型可表示为矩阵向量形式
$$\mathbf{y}=\mathbb{1}\mu+\boldsymbol{\epsilon},\ \boldsymbol{\epsilon}\sim(0,\sigma^2 I_n).$$
求 $\mathbf{y}$ 在 $C(\mathbb{1})$ 上的投影 $\hat{\mathbf{y}}$，以及 μ,σ^2 的 LS 估计.

2. 假设随机样本数据 $(x_i,y_i), i=1,\dots,n$ 满足简单线性回归模型
$$y_i=a+bx_i+\epsilon_i,\epsilon_i,i=1,\dots,\text{iid}\sim N(0,\sigma^2),\text{且 } x_i \text{ 与 } \epsilon_i \text{ 独立}, i=1,\dots,n.$$
将模型写成矩阵-向量的形式
$$\mathbf{y}=X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\epsilon}=\mathbb{1}a+\mathbf{x}b+\boldsymbol{\epsilon}$$
其中设计阵 $X=(\mathbb{1},\mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)^\top$, $\boldsymbol{\beta}=(a,b)^\top$.
   (a) 记 $\bar{x}=(x_1+\dots+x_n)/n=\mathbf{x}^\top\mathbb{1}/n$. 证明 $C(X)$ 的投影矩阵
$$P_X=\frac{\mathbb{1}\mathbb{1}^\top}{n}+\frac{(\mathbf{x}-\mathbb{1}\bar{x})(\mathbf{x}-\mathbb{1}\bar{x})^\top}{\|\mathbf{x}-\mathbb{1}\bar{x}\|^2}.$$
   (提示：可以先求 $\mathbf{x}$ 关于 $\mathbb{1}$ 的正交化向量 $\mathbf{x}^\perp$).
   (b) 求 $\mathbf{y}$ 在 $C(X)$ 上的投影 $\hat{\mathbf{y}}=P_X\mathbf{y}$。投影表达式决定了参数 a,b 的 LS 估计: 若 $\hat{\mathbf{y}}=\mathbb{1}\xi+\mathbf{x}\eta$，则 $\mathbb{1},\mathbf{x}$ 的系数即是 LS 估计 $\hat{a}=\xi,\hat{b}=\eta$，试由 $\hat{\mathbf{y}}$ 的表达式求出 $\hat{a},\hat{b}$.

3. 假设线性模型 $y_i=\beta_0+\mathbf{x}_i^\top\mathbf{b}+\epsilon_i$, $i=1,2,\dots,n$, 写成矩阵-向量形式为
$$\mathbf{y}_{n\times1}=X_{n\times p}\boldsymbol{\beta}_{p\times1}+\boldsymbol{\epsilon}=\mathbf{1}\beta_0+Z\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\epsilon},$$
其中 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_0,\mathbf{b}^\top)^\top$, $X=(\mathbf{1},Z)$ 列满秩,
$$Z=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1^\top\\ \vdots\\ \mathbf{x}_n^\top\end{pmatrix}$$
为所有自变量按行排成的 $n\times(p-1)$ 矩阵, 记 $Z_c=Z-\mathbf{1}\bar{\mathbf{x}}^\top$ 为 Z 的中心化，其中 $\bar{\mathbf{x}}=(\mathbf{x}_1+\dots+\mathbf{x}_n)/n=Z^\top\mathbf{1}/n$ 为样本均值。记
$$S_{\mathbf{xx}}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(\mathbf{x}_i-\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i-\bar{\mathbf{x}})^\top=\frac{1}{n-1}Z_c^\top Z_c,\quad S_{\mathbf{x}y}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(\mathbf{x}_i-\bar{\mathbf{x}})y_i=\frac{1}{n-1}Z_c^\top\mathbf{y},$$
分别为样本方差和样本协方差矩阵。我们已知 $\boldsymbol{\beta}$ 的最小二乘估计为 $\hat{\boldsymbol{\beta}}=(X^\top X)^{-1}X^\top\mathbf{y}$，试分别通过投影、分块矩阵求逆和误差平方和求导三种方法证明 $\mathbf{b}$ 的最小二乘估计
$$\hat{\mathbf{b}}=(Z_c^\top Z_c)^{-1}Z_c\mathbf{y}=S_{\mathbf{xx}}S_{\mathbf{x}y}.$$