作业 **11**

1. 证明命题 2-3 （第 13 讲 P12，P14）：假设线性模型 $\mathbf{y}_{n\times 1} = X_{n\times p}\boldsymbol{\beta}_{p\times 1} + \boldsymbol{\epsilon}_{n\times 1}, \boldsymbol{\epsilon} \sim N(0, \sigma^2 I_n)$, 记 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{\sigma}^2$ 分别是 $\boldsymbol{\beta}, \sigma^2$ 的最小二乘估计，RSS 为残差平方和，R^2 为决定系数。假设 A 是一个 $q \times p$ 行满秩矩阵 $(q \le p)$, 定义零假设 $H_0 : A\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}_{q\times 1}$ 的 F 检验统计量为

$$F = (A\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top (A(X^\top X)^{-1}A^\top)^{-1}(A\hat{\boldsymbol{\beta}})/q\hat{\sigma}^2,$$

记 $V = C(X), V_0 = \{X\boldsymbol{\beta} : A\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}\}$, $\hat{\mathbf{y}} = P_V\mathbf{y}$, $\hat{\mathbf{y}}_0 = P_{V_0}\mathbf{y}$.

   (a) 试验证
   $$F = \frac{n-p}{q} \times \frac{\|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_0\|^2}{\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2},$$

   (b) 利用 (a) 的表达，证明原假设 H_0 成立时，$F \sim F_{q,n-p}$。

   (c) 证明 $F = \frac{n-p}{q} \times \frac{RSS_0 - RSS}{RSS}$, 其中 RSS_0 为原假设 H_0 成立时拟合模型得到的残差平方和。

   (d) 证明 $F = \frac{n-p}{q} \times \frac{R^2 - R_0^2}{1 - R^2}$, 其中 R_0^2 为原假设 H_0 成立时拟合模型得到的决定系数。

2. 假设模型 $\mathbf{y}_{n\times 1} = X_1\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1}} + X_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\epsilon}$, 其中 X_2 是 $n \times q$ 矩阵，X_1 是 $n \times (p-q)$ 矩阵。假设 W 是一个 $n \times q$ 常数矩阵，满足条件：$W^\top X_1 = 0, W^\top X_2$ 可逆令 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2 = (W^\top X_2)^{-1}W^\top\mathbf{y}$, 证明 $E(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2) = \boldsymbol{\beta}_2$, 并证明

$$var(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2|X) \ge var(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2|X),$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$ 是 $\boldsymbol{\beta}_2$ 的最小二乘估计, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 = (X_2^{\perp\top}X_2^{\perp})^{-1}X_2^{\perp\top}\mathbf{y}$, $X_2^\perp = X_2 - P_{X_1}X_2$。