作业 **3**

记号: 对于任何随机变量或向量 a,b,c, 我们记 $\Sigma_{ab} = \mathrm{cov}(a,b)$, $\Sigma_{ab\bullet c} = \Sigma_{ab} - \Sigma_{ac}\Sigma_{cc}^{-1}\Sigma_{cb}$

1. 假设 $n\times 1$ 随机向量 $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)^\top \sim (\boldsymbol{\mu},\Sigma)$，即 $E(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}, \mathrm{cov}(\mathbf{x}) = \Sigma$，设 $\mathbf{a},\mathbf{b}\in R^n$ 为任意两个常数向量

   (a) 求随机变量 $\mathbf{a}^\top\mathbf{x}$ 的均值和方差;

   (b) 求 $(x_1+\dots+x_n)/n$ 的均值和方差；

   (c) 求 $\mathbf{a}^\top\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{b}^\top\mathbf{x}$ 的协方差和相关系数 $\rho(\mathbf{a}^\top\mathbf{x},\mathbf{b}^\top\mathbf{x})$。

   (d) 求 $E\|\mathbf{x}\|^2$.

2. 假设 $\mathbf{y},\mathbf{x}$ 为两个随机向量，记 $\Sigma_{\mathbf{yx}} = cov(\mathbf{y},\mathbf{x})$, $\Sigma_{\mathbf{xy}} = cov(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $\Sigma_{\mathbf{xx}} = var(\mathbf{x})$。假设 $\mathbf{y}$ 的去相关化 $\mathbf{y}^\perp = \mathbf{y} - \Sigma_{\mathbf{yx}}\Sigma_{\mathbf{xx}}^{-1}\mathbf{x}$, 证明 $var(\mathbf{y}^\perp) = \Sigma_{\mathbf{yy\bullet x}}$，$cov(\mathbf{y}^\perp,\mathbf{x}) = 0$。

3. 假设 y, 是随机变量, $\mathbf{x}$ 是 $p\times 1$ 随机向量, 对任何常数向量 $\mathbf{a}\in R^p$，证明 $\mathbf{a}^\top\mathbf{x}$ 和 y 的相关系数 $\rho(\mathbf{a}^\top\mathbf{x},y) \le \sqrt{\frac{\Sigma_{y\mathbf{x}}\Sigma_{\mathbf{xx}}^{-1}\Sigma_{\mathbf{x}y}}{\Sigma yy}}$.

4. 假设 x,y,z 是三个随机变量, 其相关系数矩阵为 3×3 正定矩阵

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{yx} & 1 & \rho_{yz} \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) 证明

$$1 - \rho_{xy}^2 - \rho_{xz}^2 - \rho_{zy}^2 + 2\rho_{xy}\rho_{yz}\rho_{zx} \ge 0.$$

   (b) (选) 证明 $\rho_{xy\bullet z} = 0 \Leftrightarrow \left(R^{-1}\right)_{12} = 0$ (即 R^{-1} 的 (1,2) 元为 0).

   (c) (选) 假设 x,y,z 服从三元正态分布 $N_3(0,R)$，其概率密度函数为

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\det(R)}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{u}^\top R^{-1}\mathbf{u}\right), \quad \mathbf{u} = (x,y,z)^\top \in R^3.$$

   证明 $\rho_{xy\bullet z} = 0 \;\Leftrightarrow\;$ 给定 z 时, x,y 条件独立。

5. 设 $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$ 为 n 阶正定矩阵，其中 Σ_{11} 为 k 阶方阵 $(1\le k\le n-1)$。

   记 $\Sigma_{11\bullet 2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$, $\Sigma_{22\bullet 1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$。证明:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11\bullet 2}^{-1} & -\Sigma_{11\bullet 2}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ -\Sigma_{22\bullet 1}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & \Sigma_{22\bullet 1}^{-1} \end{pmatrix},$$

   记 Σ^{-1} 的左上角 $k\times k$ 子矩阵 $\Sigma_{11\bullet 2}$ 为 $\left(\Sigma^{-1}\right)_{11}$, 证明

$$\left(\Sigma^{-1}\right)_{11} \ge \Sigma_{11}^{-1}$$

   其中矩阵 $A\ge B \Leftrightarrow A - B \ge 0$ (非负定)。