作业 **4**

1. 假设三元随机向量 $(y, x_1, x_2)^\top$ 的样本相关系数矩阵如下

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{y1} & \rho_{y2} \\ \rho_{1y} & 1 & \rho_{12} \\ \rho_{2y} & \rho_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

求控制 x_1 条件下，y 与 x_2 的部分决定系数（提示：建议重排矩阵的行和列的次序为 y, x_2, x_1）。

2. 假设四元随机向量 $(y, x_1, x_2, x_3)^\top$ 的样本相关系数矩阵如下

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{y1} & \rho_{y2} & \rho_{y3} \\ \rho_{1y} & 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{2y} & \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{3y} & \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) 求控制 x_3 条件下，y 与 $(x_1, x_2)^\top$ 的部分决定系数。

   (b) 求控制 $(x_1, x_3)^\top$ 条件下，y 与 x_2 的部分决定系数。

3.（选）若 $\mathbf{x}_{m\times 1}, \mathbf{y}_{n\times 1}$ 为任意两个随机向量，条件期望 $E(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 称为回归函数，记误差 $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{y} - E(\mathbf{y}|\mathbf{x})$（注意这里回归函数是一般的条件期望，我们不假设回归函数具有线性形式）。

   (a) 证明 $\boldsymbol{\epsilon}$ 与 $\mathbf{x}$ 不相关. 因此 $\mathbf{y}$ 可分解为两个不相关的部分: $\mathbf{y} = E(\mathbf{y}|\mathbf{x}) + \boldsymbol{\epsilon}$；

   (b) 利用 (a) 的结果证明 $\min_{f: R^m \to R^n} E\|\mathbf{y} - f(\mathbf{x})\|^2 = E\|\mathbf{y} - E(\mathbf{y}|\mathbf{x})\|^2$. （提示：首先证明在给定 $\mathbf{x}$ 的条件下，$E(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 使得 $E\left\{\|\mathbf{y} - f(\mathbf{x})\|^2 | \mathbf{x}\right\}$ 最小）。

   (c) 利用 (a) 的结果证明方差矩阵分解公式：$\mathrm{var}(\mathbf{y}) = \mathrm{var}[E(\mathbf{y}|\mathbf{x})] + E[\mathrm{var}(\mathbf{y}|\mathbf{x})]$.