

## 作业 9

1. 假设  $A$  是一个实数矩阵,  $P_A = A(A^T A)^{-1} A^T$  为对应的投影阵, 证明  $C(P_A) = C(A)$ 。
2. 假设矩阵  $A_{n \times m} = B_{n \times r} C_{r \times m}$ , 假设  $C$  是行满秩的, 证明  $C(A) = C(B), P_A = P_B$  (特别地, 当  $B$  是可逆矩阵时, 结论成立, 从而第 11 讲命题 5(4) 成立)。
3. 若  $A_1^T A_1 B A_2^T A_2 = 0$ , 则  $A_1 B A_2^T = 0$ , 其中  $A_1, A_2, B$  都是矩阵。
4. 按列划分  $A_{n \times m} = (A_1, A_2)$ , 假设  $A_1^T A_2 = 0$ , 证明  $P_A = P_{A_1} + P_{A_2}$  (提示: 可利用上题结果)。
5. 按列划分  $A_{n \times m} = (A_1, A_2)$ , 令  $A_2^\perp = A_2 - P_{A_1} A_2$ , 证明  $P_A = P_{A_1} + P_{A_2^\perp}$ 。
6. (a) 若  $A \geq B > 0$ , 证明  $B^{-1} \geq A^{-1} > 0$ 。  
(b) 举例说明  $A \geq B \geq 0$  未必蕴含  $A^2 \geq B^2$ 。  
(c) (挑战) 若  $A \geq B > 0$ , 证明  $A^{1/2} \geq B^{1/2} > 0$ 。