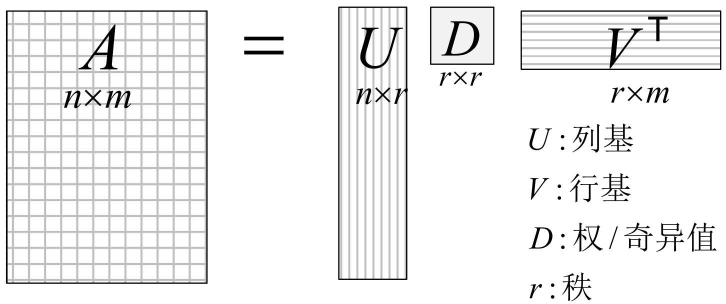
第九讲 线性代数

2022.10.28

$$SVD: A = UDV^{\mathsf{T}}$$



U: 列基

V: 行基

D: 权 / 奇异值

r: 秩

内容

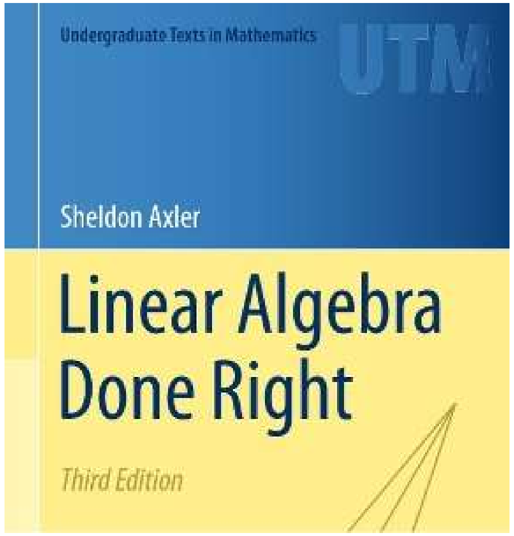
1. 线性代数教材介绍
2. 线性代数起源背景
3. 向量空间与线性变换

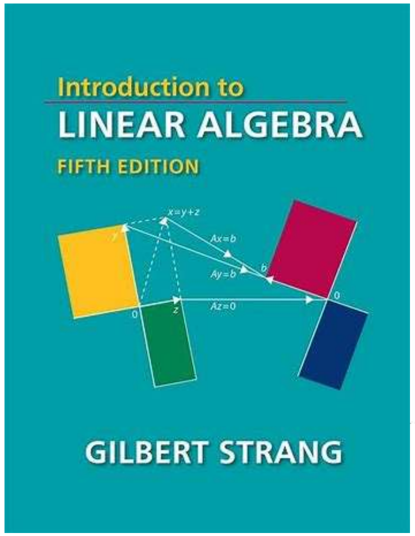
矩阵论

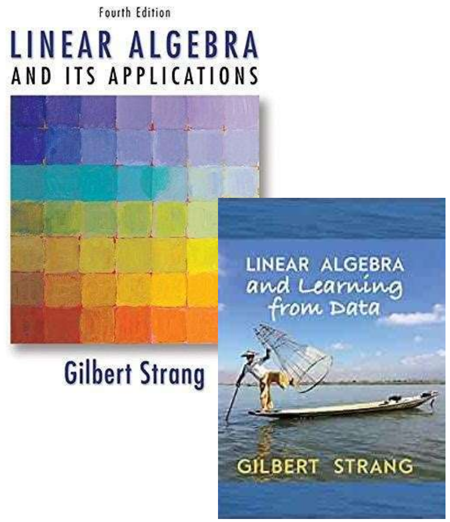
4. 矩阵的行与列
5. 方阵的谱分解
6. 矩阵的奇异值分解
7. 广义逆
8. 欧氏空间中的正交投影

1. 线性代数教材

1. S. Axler, Linear algebra done right, 3ed. （进阶）
2. G.Strang, Introduction to linear algebra,5ed. （入门）
3. G.Strang, Linear algebra and its applications 4ed. （应用）
4. G.Strang, Linear algebra and learning from data. （深度学习）

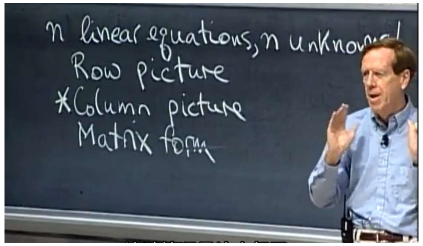






下载：2022/books/LA1.pdf, LA2.pdf,LA3.pdf, LA4.pdf

2. 起源：线性方程组、笛卡尔坐标



https://www.bilibili.com/video/BV18s41167ZT/

最初的线性代数发展与线性方程组求解问题密切相关。Gilbert Strang的MIT视频课程第一讲开篇以一个二元一次方程组为例，介绍向量、矩阵，尤其是为何引入向量的线性组合概念:

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

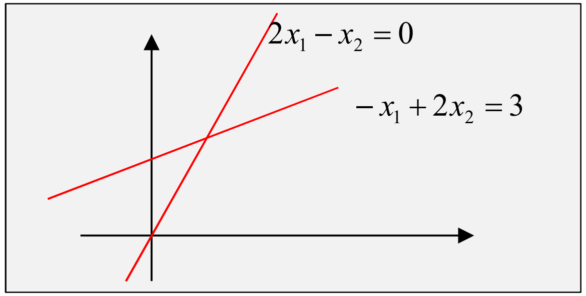
线性方程组(linear system) : $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

其中$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

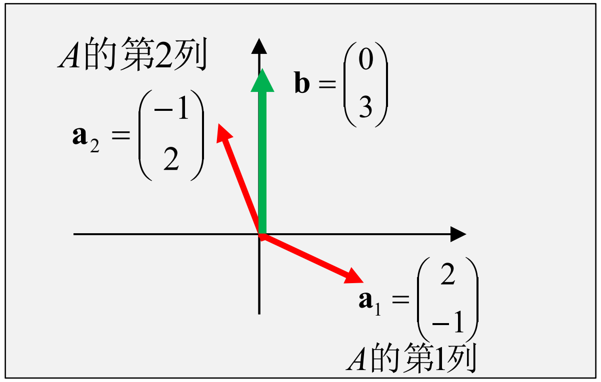
$$A\mathbf{x}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}=\mathbf{b}$$

$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$
Row picture



直线/平面的交点
为方程的解

$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$
Column picture



方程组写成线性组合形 式

$$\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}x_2=\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2=\mathbf{b}$$

解方程即求$\mathbf{b}=(0,3)^{\mathrm{T}}$在$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$下的坐标。

线性组合

求解方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b} \Leftrightarrow$ 求A的两列 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$的组合系数 (坐标)$x_1,x_2$,
使得$\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2=\mathbf{b}$.

列空间C(A)

何时有解？当 $\mathbf{b}$为$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$的线性组合 ,即$\mathbf{b}\in C(A)=\{\mathbf{a}_1\lambda_1+\mathbf{a}_2\lambda_2:\lambda_1,\lambda_2\in R\}$.

核空间$N(A)$ $=C(A^T)^{\perp}$

何时解唯一？$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$的解组成的子空间，由所有与A的行正交的向量组成。
若核空间$N(A)=\{\mathbf{x}:A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}=\{\mathbf{0}\}$，解唯一。

若解不唯一 ,若$\mathbf{x}_0$是$A\mathbf{x}_0=\mathbf{b}$一个解,则通解 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+N(A)$.

四个基本空间

$C(A)$: A 的列空间
$N(A^T)$: 与A的列正交的向量组成的子空间 $N(A^T)=C(A)^{\perp}$
$C(A^T)$: A的行空间
$N(A)$：与A的行正交的向量组成的子空间 $N(A)=C(A^T)^{\perp}$

3. 向量空间与线性变换

参考：Sheldon Axler. 第1，3，7章
（1：向量空间、3：变换、7：内积空间）

线性代数起源于笛卡尔坐标系方法以及线性方程组求解问题。

笛卡尔坐标方法提供了一个代数方法研究几何的工具。二、三维空间中坐标向量的加法和数乘运算是算术运算的拓展。类似的运算或代数结构进一步拓展到高维实空间R^n甚至更一般的集合，即一般的向量空间或线性空间。

向量空间或线性空间是定义了两个二元运算、满足通常的运算法则（交换律,分配律,结合律）并含单位元的封闭集合。

线性代数研究有限维向量空间之间的线性映射 / 变换。

3.1 向量/线性空间 （向量：运算对象）

向量空间

如果一个集合V配备如下两个二元运算，且它们满足下面的运算公理，则V称为是一个向量空间或线性空间， V的元素称为向量。

二元运算：

- 加法（向量加法）：任何两个元素 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ 对应于V中唯一的某个元素，记作$\mathbf{u}+\mathbf{v}\in V$
- 数乘（纯量乘法/标量乘法）：任何$\mathbf{u}\in V$ 和任何 $a\in R$（实数域）对应于V中唯一的某个元素，记作$a\mathbf{u}\in V$

运算公理/法则： $\forall\ \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V,\forall\ a,b\in R$

- 交换律： $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$;
- 结合律： $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$; $(ab)\ \mathbf{v}=a(b\mathbf{v})$;
- 分配律：$a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$, $(a+b)\mathbf{v}=a\mathbf{v}+b\mathbf{v}$
- 加法单位元(**0**)：存在一个元素$\mathbf{0}\in V$，使得$\mathbf{0}+\mathbf{v}=\mathbf{v}$， $\forall\mathbf{v}\in V$
- 加法逆：对任何$\mathbf{v}\in V$，存在$\mathbf{u}\in V$使得$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{0}$
- 数乘单位元(1)：1**v**= **v**，$\forall\mathbf{v}\in \boldsymbol{V}$

V的关于上述运算的封闭的子集称为线性子空间

例1. 所有实数域R上的多项式集合构成向量空间。
例2. 函数空间R^S是一类常见的向量空间（下页）。

R^S空间

假设S是一个非空集合，R是实数集合，S 上所有实函数组成的集合记作

$$R^S = \{f: S \to R\}$$

定义R^S上的两个函数的加法以及实数与函数的乘法如下 ($\forall s \in S$)

- $\forall f, g \in R^S$, 定义加法$f + g$：$(f + g)(s) = f(s) + g(s)$,
- $\forall f \in R^S$，$\forall c \in R$, 定义数乘：$(cf)(s) = c \times f(s)$,

容易验证所有运算法则都满足，且映射f_0：$f_0(s) \equiv 0$为加法单位元（零），所以函数空间R^S是一个向量空间。

Axler书中引入了记号R^S，虽然不是一个常用记号，但它可以把若干常用的向量空间联系起来：

当$S = R$、$\{1, \dots, n\}$、样本空间时，R^S分别是实函数空间（泛函）、n维实空间R^n（线性代数）和随机变量空间（概率论）.

$R^{[0,1]}$

函数空间$R^{[0,1]} = \{f: [0,1] \to R\}$:

[0,1]区间上的所有函数构成的函数空间。

泛函分析研究函数空间之间的线性变换（如卷积变换），研究内积(距离、拓扑)向量空间的泛函（函数的函数）的连续、收敛等分析性质。简单来说，泛函分析=无穷维线性代数+数学分析。

希尔伯特空间L^2：函数向量空间定义内积$< f, \; g > = \int f(t)g(t)dt$

R^{Ω}

随机变量$R^{\Omega} = \{x: \Omega \to R, \omega \to x(\omega)\}$

变量概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$

随机变量L^2空间,$r.v.\ x, y$的内积

$$< x, y > = Exy - \mu_x \mu_y = \int x(\omega) y(\omega) dP(\omega) - \mu_x \mu_y$$

R^∞

$R^\infty = R^{\{1,2,\dots\}}$ = 所有无限序列的集合

R^n

n维实空间 $R^n \triangleq R^{\{0,1,\dots,n\}} = \{x:\{1,\dots,n\} \to R\}$：

$\{1,\dots,n\}$上所有函数的集合， 通常记$x_i = x(i)$，$x \in R^n$可表示为

$$x = (x_i, i = 1,\dots,n) = (x_i)$$

后面我们将以黑体小写字母$\mathbf{x} \in R^n$和列向量的形式表示：

$$\mathbf{x} = (x_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

R^n中的向量加法和数乘为：

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_i + y_i) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad c\mathbf{x} = (cx_i) = \begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}$$

实轴上的实函数是长度无限的向量， R^n 中的向量是定义在有限定义域上的函数。

3.2 向量空间之间的线性变换（矩阵）

保持向量空间线性结构 的映射称为线性映射或线性变换

线性变换

定义：V, W 是两个向量空间 (比如$V = R^m, W = R^n$).

映射$T: V \to W$称为是线性变换或线性 映射，如果对任何 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ 和任何实数λ_1, λ_2有

$$T(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_1 T(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{x}_2).$$

- 任何线性映射 $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{x} \in R^n$, $A\mathbf{x}$是线性变换，$A\mathbf{x} + \mathbf{b}$不是线性变换，是仿射变换。
- V到V的线性变换称为算子($operator$),V到R^1的线性变换称为泛函($functional$).

例1. $T: R^3 \to R^2$, $T(x,y,z)=(2x+y,\ y+z)$ (线性变换，对应2×3矩阵)

例2. $T: R^3 \to R^1$, $T(x,y,z)=2x+y-z$ （泛函，对应行向量）

例3. $T: R^3 \to R^3$, $T(x,y,z)=(y,\ x-y,\ x-z)$ （算子, 对应方阵）

例4. $T: R^\infty \to R^\infty$, $T(x_1,x_2,x_3,\ldots)=(x_2,x_3,\ldots)$ （算子）

矩阵 ⇔ 线性变换

定理1. 假设有限维向量空间V，W的基分别是$\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m;\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n$,
线性变换 $T:\mathbf{v}\in V \to T(\mathbf{v})\in W$
对应的坐标变换: $\mathbf{x}\in R^m \to A\mathbf{x}\in R^n$
其中$A=(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m)$, A的第j列$\mathbf{a}_j$为$T(\mathbf{v}_j)$的坐标。

验证：$\forall\mathbf{v}\in V$，假设$\mathbf{v}=\mathbf{v}_1x_1+\ldots+\mathbf{v}_mx_m$，即$\mathbf{v}$的坐标表示为$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m)^{\mathsf{T}}$,
假设$T(\mathbf{v}_j)=\mathbf{w}_1a_{1j}+\ldots+\mathbf{w}_na_{nj}$，即$\mathbf{v}_j$的坐标表示为$\mathbf{a}_j=(a_{1j},\ldots,a_{nj})^{\mathsf{T}}$，则

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{v})=T(\mathbf{v}_1x_1+\ldots+\mathbf{v}_mx_m)&=T(\mathbf{v}_1)x_1+\ldots+T(\mathbf{v}_m)x_m\\
&=(\mathbf{w}_1a_{11}+\ldots+\mathbf{w}_na_{n1})x_1+\ldots+(\mathbf{w}_1a_{1m}+\ldots+\mathbf{w}_na_{nm})x_m\\
&=\mathbf{w}_1(a_{11}x_1+\ldots+a_{1m}x_m)+\ldots+\mathbf{w}_n(a_{n1}x_1+a_{nm}x_m)
\end{aligned}
$$

$T(\mathbf{v})\in W$的坐标为$A\mathbf{x}$,其中$A_{n\times m}=(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m)$由映射 T 和两组基唯一决定。

矩阵记号

$$
A_{n\times m}=(a_{ij},1\le i\le n,1\le j\le m)=(a_{ij})=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathsf{T}}-\\ \vdots\\ -\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathsf{T}}-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & & |\\ \mathbf{a}_1, & \cdots & \mathbf{a}_m\\ | & & |\end{pmatrix}
$$

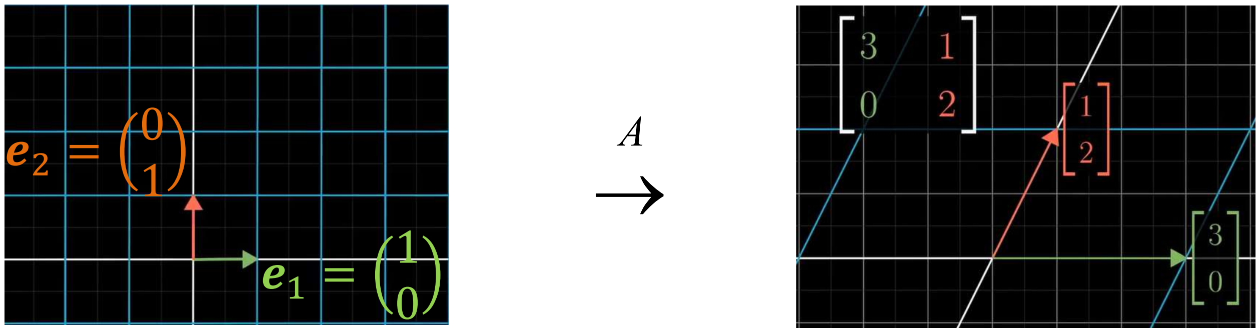
$A_{n\times m}$的各列是标准基的A-变换: $AI_m = A$

在欧氏空间中（$U=R^m$，$V=R^n$），在普通的标准基 $\mathbf{e}_j=(0,\ldots,1,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$ 下变换 $A=(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m)$，$A\mathbf{e}_j=\mathbf{a}_j$，$A$的第$j$列$=$坐标轴$\mathbf{e}_j$的$A$变换.

例1. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$， A的两列分别是 $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，

它们分别是标准基$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$的A-变换

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\to A\mathbf{x}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_2,\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\text{是新基下的坐标}$$



来源：Essence of linear algebra, 3Blue1Brown

线性变换空间$L(V,W)$

所有向量空间V到W的线性变换组成的集合$L(V,W)$也是一个向量空间，对任何两个线性变换$S,T\in L(V,W)$, 二元运算$S+T,cT$定义为:

$$(S+T)(\mathbf{v})=S(\mathbf{v})+T(\mathbf{v}),(cT)(\mathbf{v})=cT(\mathbf{v}),\forall\ \mathbf{v}\in V$$

则容易验证 $L(V,W)$也是一个向量空间。

一种重要的特殊情况是：

向量空间V到实数域 R（ R是向量空间）的线性映射称为线性泛函(linear functional，或实函数),

对偶空间：线性泛函空间$L(V,R)$

所有V到R的线性泛函组成的空间$L(V,R)$ 称为V的对偶空间（dual space)，记为$V'=L(V,R)$.

3.3 复合线性变换（矩阵乘积）

向量之间没有定义乘法（无意义），变换之间可以定义某种"乘法"，即复合变换，对应于矩阵乘积：

复合线性变换：矩阵乘积

假设线性变换S,T对应的坐标变换分别为矩阵B,A，

$$S: U \to V, \quad \text{坐标}\,\mathbf{x} \in R^m \to B\mathbf{x} \in R^p;$$

$$T: V \to W, \quad \text{坐标}\,\mathbf{y} \in R^p \to A\mathbf{y} \in R^n,$$

则复合变换$T \circ S(\cdot) = T(S(\cdot)): U \to W$的坐标变换为矩阵$AB$：

$$T \circ S: \quad \mathbf{x} \in R^m \xrightarrow{S} \mathbf{y} = B\mathbf{x} \in R^p \xrightarrow{T} \mathbf{z} = A\mathbf{y} = AB\mathbf{x} \in R^n$$

多个变换的复合对应于多个矩阵相乘，不满足交换律。

$$\boxed{A_{n\times p}B_{p\times m}=(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj})_{n\times m}\text{，即}C=AB\text{的}(i,j)\text{元}c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}}$$

复合（变量代换）决定了矩阵乘法如上定义

以$n=m=k=2$为例：$\mathbf{y}=B\mathbf{x},\mathbf{z}=A\mathbf{y}$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}x_1+b_{12}x_2\\b_{21}x_1+b_{22}x_2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}z_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}y_1+a_{12}y_2\\a_{21}y_1+a_{22}y_2\end{pmatrix},$$

$\mathbf{z}=A\mathbf{y}$中代入$\mathbf{y}=B\mathbf{x}$，即$y_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2$，$y_2=b_{21}x_1+b_{22}x_2$，得

$$\mathbf{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_1\end{pmatrix}=B\mathbf{y}=\begin{pmatrix}a_{11}(b_{11}x_1+b_{12}x_2)+a_{12}(b_{21}x_1+b_{22}x_2)\\a_{21}(b_{11}x_1+b_{12}x_2)+a_{22}(b_{21}x_1+b_{22}x_2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=AB\mathbf{x}$$

所以$AB=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$

对偶变换 Dual map

假设线性空间V,W的对偶空间分别是V',W'。假设$T\in L(V,W)$.
T与任何$\varphi\in L(W,R)=W'$ 的复合$\varphi\circ T$

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{\varphi} R$$

是$V\to R$的线性泛函，$\varphi\circ T\in V'$ 。这样，给定T, 任何$\varphi\in W'$对应于V'中的一个泛函$\varphi\circ T$， 即我们建立了（T诱导出了）一个$W'\to V'$的（线性）映射（记为T'):

$$T':\ \varphi\in W'\to\varphi\circ T\in V'$$

即对任何$\varphi\in W'$，$T'(\varphi)=\varphi\circ T$.

若$T\in L(V,W)$的矩阵表示为A, 则（在对偶基下）对偶变换$T'\in L(W',V')$的矩阵表示为A^T (A的转置矩阵，参见Axler P110）

3.4 内积向量空间 （伴随、转置）

内积

向量空间 V 的任何两个向量$\mathbf{u},\mathbf{v}$定义内积$(\mathbf{u},\mathbf{v})\in R$, 满足

- $(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq 0$, $=0$当且仅当$\mathbf{v}=\mathbf{0}$
- $(\mathbf{u},\mathbf{v})=(\mathbf{v},\mathbf{u})$,
- 双线性bilinear（对其中一个向量线性）：
  $(\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{v})=(\mathbf{u},\mathbf{v})+(\mathbf{w},\mathbf{v})$, $(\lambda\mathbf{u},\mathbf{v})=\lambda(\mathbf{u},\mathbf{v})$

例1. $\mathbf{u},\mathbf{v}\in R^n$, $(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}=\sum u_i v_i$

例2. $\mathbf{u},\mathbf{v}\in R^{[-1,1]}$, $(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_{-1}^{1} u(t)v(t)f_0(t)dt$, 给定的权重函数$f_0(t)$

模、距离、勾股定理、投影、Gram-Shmidt正交化… （略）

Riesz 表示定理

定理. 假设V是一个有限维内积向量空间，φ是V上的一个线性泛函 ($\varphi\in V'$)，则存在唯一的$\mathbf{u}_0\in V$使得

$$\varphi(\mathbf{v})=(\mathbf{v},\mathbf{u}_0), \forall\mathbf{v}\in V$$

假设两个向量空间V, W， T是V到W的线性变换，即 $T \in L(V, W)$。
对任何固定的$\mathbf{w} \in W$， 容易验证$(T\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in R$是$V \to R$的线性泛函。由Riesz表示定理，存在唯一的$\mathbf{u}_0 \in V$（$\mathbf{u}_0$与$\mathbf{w}$有关，我们记之为$T^*\mathbf{w}$），使得

$$(T\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_0) = (\mathbf{v}, T^*\mathbf{w})$$

可以验证$T^* \in L(W, V)$, T^*称为T的伴随或共轭变换。

下述例子演示了T^*的求法，表明在有限维向量空间中T^*对应的矩阵是T对应的矩阵的转置（一般情况下的证明与此例类似）。

例（Axler ,2004）. 假设线性变换$T: R^3 \to R^2, T(\mathbf{x}) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$是$T$的矩阵表示。求$T^*$

对任何$\mathbf{x} \in R^3$，$T(\mathbf{x}) \in R^2$，它和像空间中的任一给定的$\mathbf{y}_0 \in R^2$的内积
$(T(\mathbf{x}), \mathbf{y}_0)$是$\mathbf{x}$的线性函数($R^3 \to R^1$)，假设其矩阵表示为$1 \times 3$矩阵$\mathbf{a}^\top$
（$\mathbf{a}$依赖于$\mathbf{y}_0$和T, 记之为$T^*(\mathbf{y}_0) = \mathbf{a}$）

$$(T(\mathbf{x}), \mathbf{y}_0) = (\mathbf{x}, T^*(\mathbf{y}_0)) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \text{（Riesz表示定理）},$$

下面求$\mathbf{a}$。

$$(T(\mathbf{x}),\mathbf{y}_0)=\left(\begin{pmatrix}x_2+3x_3\\2x_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=x_2y_1+3x_3y_1+2x_1y_2$$

$$=x_1(2y_2)+x_2(y_1)+x_3(3y_1)=\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}=(\mathbf{x},T^*(\mathbf{y}_0)),$$

其中$\mathbf{a}=T^*(\mathbf{y}_0)=\begin{pmatrix}2y_2\\y_1\\3y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$,所以伴随变换

T^*是$R^2\to R^3$的线性变换，其矩阵表示为$A^*=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\\3&0\end{pmatrix}=A^{\mathsf{T}}$,称为$A$的伴随矩阵。

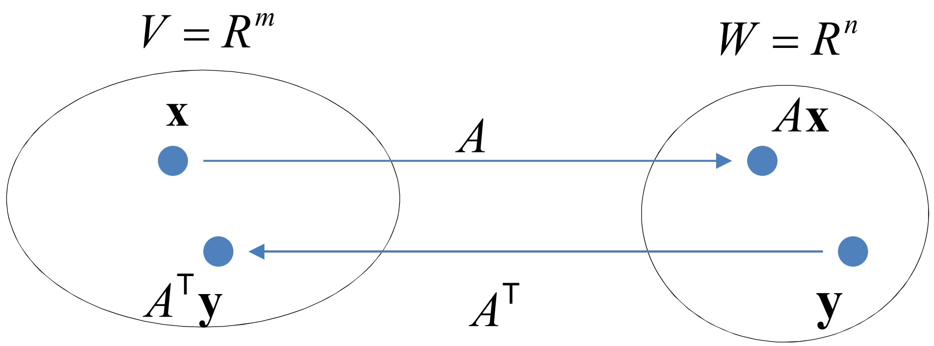
伴随(adjoint)/共轭变换(conjugate)

假设$T\in L(V,W)$, T的伴随变换T^*：$W\to V$, 使得

$$(T\mathbf{v},\mathbf{w})=(\mathbf{v},T^*\mathbf{w}),\quad \forall\mathbf{v}\in V,\mathbf{w}\in W$$

容易证明T^*是线性变换，即$T^*\in L(W,V)$。对于变换的矩阵表示，或V,W是欧氏空间时，T是矩阵A，T^*是转置A^{T}：

$$(A\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},A^{\mathsf{T}}\mathbf{y})$$



图示：伴随变换 $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^\top \mathbf{y})$

欧氏空间中伴随的定义 实际上对应于 $\mathbf{x}^\top A^\top \mathbf{y}$中不同的加括号方式（结合律):

对任何$\mathbf{x} \in R^m, \mathbf{y} \in R^n, A_{n\times m}$，

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (A\mathbf{x})^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top A^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top (A^\top \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^\top \mathbf{y})$$

注意，前者 $(A\mathbf{x}, \mathbf{y})$是在$R^n$中计算的，后者 $(\mathbf{x}, A^\top \mathbf{y})$是在$R^m$中计算的。

换言之，伴随adjoint代表了不同的加括号方 式，同一内积
可以转换到另外一个空 间计算。