作业 **3**

记号: 对于任何随机变量或向量 a,b,c, 我们记 $\Sigma_{ab}=\mathrm{cov}(a,b)$, $\Sigma_{ab\bullet c}=\Sigma_{ab}-\Sigma_{ac}\Sigma_{cc}^{-1}\Sigma_{cb}$

1. 假设 $n\times 1$ 随机向量 $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)^\top\sim(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$，即 $E(\mathbf{x})=\boldsymbol{\mu},\mathrm{cov}(\mathbf{x})=\Sigma$，设 $\mathbf{a},\mathbf{b}\in R^n$ 为任意两个常数向量

   (a) 求随机变量 $\mathbf{a}^\top\mathbf{x}$ 的均值和方差;

   (b) 求 $(x_1+...+x_n)/n$ 的均值和方差；

   (c) 求 $\mathbf{a}^\top\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{b}^\top\mathbf{x}$ 的协方差和相关系数 $\rho(\mathbf{a}^\top\mathbf{x},\mathbf{b}^\top\mathbf{x})$。

   (d) 求 $E\|\mathbf{x}\|^2$.

2. 假设 $\mathbf{y},\mathbf{x},\mathbf{z}$ 为三个随机向量，记它们的方差-协方差矩阵为

$$\Sigma=\mathrm{var}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Sigma_{\mathbf{xx}} & \Sigma_{\mathbf{xy}} & \Sigma_{\mathbf{xz}}\\ \Sigma_{\mathbf{yx}} & \Sigma_{\mathbf{yy}} & \Sigma_{\mathbf{yz}}\\ \Sigma_{\mathbf{zx}} & \Sigma_{\mathbf{zy}} & \Sigma_{\mathbf{zz}}\end{pmatrix}$$

   令 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 关于 $\mathbf{y}$ 的去相关化分别为

$$\mathbf{x}^\perp=\mathbf{x}-\Sigma_{\mathbf{xz}}\Sigma_{\mathbf{zz}}^{-1}\mathbf{z},\ \mathbf{y}^\perp=\mathbf{y}-\Sigma_{\mathbf{yz}}\Sigma_{\mathbf{zz}}^{-1}\mathbf{z}$$

   验证

$$\mathrm{var}\begin{pmatrix}\mathbf{x}^\perp\\ \mathbf{y}^\perp\\ \mathbf{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Sigma_{\mathbf{xx}\bullet\mathbf{z}} & \Sigma_{\mathbf{xy}\bullet\mathbf{z}} & 0\\ \Sigma_{\mathbf{yx}\bullet\mathbf{z}} & \Sigma_{\mathbf{yy}\bullet\mathbf{z}} & 0\\ 0 & 0 & \Sigma_{\mathbf{zz}}\end{pmatrix}$$

3. 假设 y 是随机变量, $\mathbf{x}$ 是 $p\times 1$ 随机向量, 对任何常数向量 $\mathbf{a}\in R^p$，证明 $\mathbf{a}^\top\mathbf{x}$ 和 y 的相关系数 $\rho(\mathbf{a}^\top\mathbf{x},y)=\frac{\mathbf{a}^\top\Sigma_{\mathbf{x}y}}{\sqrt{\mathbf{a}^\top\Sigma_{\mathbf{xx}}\mathbf{a}}\sqrt{\Sigma_{yy}}}$, 且 $|\rho(\mathbf{a}^\top\mathbf{x},y)|\le\sqrt{\frac{\Sigma_{y\mathbf{x}}\Sigma_{\mathbf{xx}}^{-1}\Sigma_{\mathbf{x}y}}{\Sigma yy}}$.

4. 假设 x,y,z 是三个随机变量, 其 Pearson 相关系数矩阵为 3×3 正定矩阵

$$R=\begin{pmatrix}1 & \rho_{xy} & \rho_{xz}\\ \rho_{yx} & 1 & \rho_{yz}\\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & 1\end{pmatrix}.$$

   (a) 证明

$$1-\rho_{xy}^2-\rho_{xz}^2-\rho_{zy}^2+2\rho_{xy}\rho_{yz}\rho_{zx}\ge 0.$$

   (b) 假设 $\rho_{xy}=\rho_{xz}=\rho_{yz}=\rho$, 说明必定 $\rho\ge -1/2$。

5. 假设 $n\times 1$ 随机向量 $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)^\top$ 的诸分量之间的 Pearson 相关系数都是 ρ, 试证明 $1\ge\rho\ge -1/(n-1)$。并求偏相关系数 $\rho_{x_1x_2\bullet x_3\cdots x_n}$。