

作业 4

1. 假设单因子模型

$$\begin{cases} x = z + \epsilon_1 \\ y = z + \epsilon_2 \end{cases}$$

其中随机变量 $z, \epsilon_1, \epsilon_2$ 独立, $\text{var}(z) = \sigma^2, \text{var}(\epsilon_i) = \tau_i^2, i = 1, 2$.

- (a) 求三元随机向量 $(x, y, z)^\top$ 的方差-协方差矩阵。
- (b) 求 x, y 关于 z 的去相关化 x^\perp, y^\perp 。
- (c) 求偏相关系数 $\rho_{xy \cdot z}$ 。

2. 假设三元随机向量 $(x, y, z)^\top$ 的相关系数矩阵如下

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{yx} & 1 & \rho_{yz} \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) 求 y 与 (x, z) 的决定系数。
 - (b) 求控制 z 后, x, y 的偏决定系数。
3. 假设 $n \times 1$ 随机向量 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ 的各分量方差都是 1, 每两个分量的协方差 (即相关系数) 都是 $\rho > 0$, 求 x_1 与 $(x_2, \dots, x_n)^\top$ 的决定系数。