## 4.4 HW 4

作业 4 链接

**练习 4.1** 假设单因子模型

$$\begin{cases} x = z + \epsilon_1 \\ y = z + \epsilon_2 \end{cases}$$

其中随机变量 $z, \epsilon_1, \epsilon_2$ 独立, $\operatorname{var}(z) = \sigma^2, \operatorname{var}(\epsilon_i) = \tau_i^2, i = 1, 2.$

1. 求三元随机向量 $(x, y, z)^\top$ 的方差-协方差矩阵。
2. 求 $x, y$ 关于 $z$ 的去相关化 $x^\perp, y^\perp$ 。
3. 求偏相关系数 $\rho_{xy\bullet z}$ 。

**解**

1.

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(x) &= \operatorname{var}(z) + \operatorname{var}(\varepsilon_1) = \sigma^2 + \tau_1^2 \\ \operatorname{cov}(x, y) &= \operatorname{cov}(z + \varepsilon_1, z + \varepsilon_2) = \sigma^2 \\ \operatorname{cov}(x, z) &= \operatorname{cov}(z + \varepsilon_1, z) = \sigma^2 \end{aligned}$$

故 $(x, y, z)$ 的协方差阵为 $\begin{pmatrix} \sigma^2 + \tau_1^2 & \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 + \tau_2^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}$

2.

$$\begin{aligned} x^\perp &= x - \frac{\sigma^2}{\sigma^2} z = \varepsilon_1 \\ y^\perp &= y - \frac{\sigma^2}{\sigma^2} z = \varepsilon_2 \end{aligned}$$

3.

$$\rho_{xy\cdot z} = \frac{\operatorname{cov}(x^\perp, y^\perp)}{\sqrt{\operatorname{Var}(x^\perp) \operatorname{Var}(y^\perp)}} = 0$$

**练习 4.2**

假设三元随机向量 $(x, y, z)^\top$ 的相关系数矩阵如下

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{yx} & 1 & \rho_{yz} \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & 1 \end{pmatrix}$$

1. 求 $y$ 与 $(x, z)$ 的决定系数。
2. 求控制 $z$ 后, $x, y$ 的偏决定系数。

**解**

1.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \rho_{yx} & \rho_{yz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{xz} \\ \rho_{zx} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_{xy} \\ \rho_{zy} \end{pmatrix}. \\ =& \begin{pmatrix} \rho_{yx} & \rho_{yz} \end{pmatrix} \frac{1}{1 - \rho_{xz}^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho_{xz} \\ -\rho_{xz} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{xy} \\ \rho_{zy} \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{1 - \rho_{xz}^2} \left( \rho_{xy} - \rho_{yz}\rho_{xz} - \rho_{xy}\rho_{xz} + \rho_{yz} \right) \begin{pmatrix} \rho_{xy} \\ \rho_{zy} \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{1 - \rho_{xz}^2} \left( \rho_{xy}^2 - 2\rho_{xy}\rho_{yz}\rho_{zx} + \rho_{yz}^2 \right). \end{aligned}$$

2. 可以直接按照偏决定系数的定义计算。当然，两个随机变量（一维）的偏决定系数就是偏相关系数的平方，而偏相关系数 $\rho_{xy\bullet z}$ 的表达式已知。故

$$\phi_{xy\bullet z} = \rho^2_{xy\bullet z} = \frac{(\rho_{xy} - \rho_{xz}\rho_{yz})^2}{(1-\rho^2_{xz})(1-\rho^2_{yz})}.$$

✍ **练习 4.3** 假设 $n \times 1$ 随机向量 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ 的各分量方差都是 1，每两个分量的协方差（即相关系数）都是 $\rho > 0$，求 $x_1$ 与 $(x_2, \ldots, x_n)^\top$ 的决定系数。

**解** $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ 的协方差阵形如

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{u} = (x_2, x_3, \ldots, x_n)^T$，则 $x_1$ 关于 $u$ 的决定系数可以写为：

$$\phi_1 = \frac{\Sigma_{x_1\boldsymbol{u}}\Sigma^{-1}_{\boldsymbol{uu}}\Sigma_{\boldsymbol{u}x_1}}{\Sigma_{x_1x_1}} = \frac{\rho^2(n-1)}{(n-2)\rho+1},$$

便是我们要的答案。这里我们可以像上次作业一样计算逆矩阵

$$\Sigma^{-1}_{\boldsymbol{uu}} = \frac{1}{((n-2)\rho+1)(1-\rho)} \begin{pmatrix} (n-3)\rho+1 & -\rho & \cdots & -\rho \\ -\rho & (n-3)\rho+1 & \cdots & -\rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho & -\rho & \cdots & (n-3)\rho+1 \end{pmatrix}.$$

另外，有同学在作业中提供了不用求逆的巧妙方法，可以直接猜出以下式子的值:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1}_{(n-1\times n-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

假设

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

同乘协方差矩阵，得

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

由对称性，容易看出解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(n-2)\rho+1} \\ \frac{1}{(n-2)\rho+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{(n-2)\rho+1} \end{pmatrix}.$$

因此容易计算形如

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

的值，代入原式即可得到答案。