作业 **8**

1. 设 A 是一个 $n\times m$ 实数矩阵，$\mathbf{x}\in R^m$, 证明 $A\mathbf{x}=0\Leftrightarrow A^\top A\mathbf{x}=0$.

2. 若 $A_1^\top A_1 B A_2^\top A_2=0$, 则 $A_1 B A_2^\top=0$，其中 A_1,A_2,B 都是矩阵。

3. 假设 $A_{n\times m}$ 有奇异值分解 $A=UDV^\top$, 其中 U,V,D 分别是 $n\times r$, $m\times r$, $r\times r$ 矩阵（$r=rank(A)$），满足 $U^\top U=V^\top V=I_r$, $D=diag(\sqrt{\lambda_1},...,\sqrt{\lambda_r})$ (可逆), 证明 $C(U)=C(A),C(V)=C(A^\top)$。

4. 假设 A 是一个实数矩阵，$P_A=A(A^\top A)^- A^\top$ 为对应的投影阵，证明 $C(P_A)=C(A)$。

5. 假设矩阵 $A_{n\times m}=B_{n\times r}C_{r\times m}$，假设 C 是行满秩的，证明 $C(A)=C(B),P_A=P_B$。

6. 按列划分 $A_{n\times m}=(A_1,A_2)$, 假设 $A_1^\top A_2=0$, 证明 $P_A=P_{A_1}+P_{A_2}$ 。

7. 按列划分 $A_{n\times m}=(A_1,A_2)$, 令 $A_2^\perp=A_2-P_{A_1}A_2$, 证明 $P_A=P_{A_1}+P_{A_2^\perp}$.

8.（选做）通常，逆矩阵的定义如下

   “对于一个 n 阶实方阵 A，若方阵 B 使得 $AB=BA=I_n$，则称 B 是 A 的逆矩阵.”

   事实上，该定义中的两个条件有一个是多余的。试证明如下事实：

   “若 A 是一个 $n\times n$ 实方阵，若方阵 B 使得 $AB=I_n$，则必有 $BA=I_n$”。

9. 本练习题利用特征根证明矩阵不等式。首先介绍一些记号或定义：

   （1）$A\geq 0$ (A 是半正定矩阵)；$A>0$ (A 是正定矩阵)；$A\geq B\Leftrightarrow A-B\geq 0$; $A>B\Leftrightarrow A-B>0$。

   （2）定义平方根矩阵：若 $A_{n\times n}\geq 0$ 的谱分解为 $A=O\Lambda O^\top$, 其中对角阵 $\Lambda=diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$ 的对角元为 A 的特征根，O 是正交矩阵，则半正定矩阵的（唯一）平方根定义为 $A^{1/2}=O\Delta O^\top$ ，其中 $\Delta=diag(\sqrt{\lambda_1},...,\sqrt{\lambda_n})$。定义 $A^{-1/2}=(A^{1/2})^{-1}$。证明如下事实：

   (a) 以 $\lambda(A)$ 表示 A 的任一特征根，则 $A\leq I_n\Leftrightarrow\lambda(A)\leq 1$，且 $A\geq I_n\Leftrightarrow\lambda(A)\geq 1$.

   (b) 若 $0<A\leq I_n$, 则 $A^{-1}\geq I_n$.

   (c) 若 $A\geq B>0$, 则对任何 $k\times n$ 矩阵 C 有 $CAC^\top\geq CAC^\top\geq 0$，特别地，$B^{-1/2}AB^{-1/2}\geq I_n$.

   (d) 若 $A\geq B>0$, 则 $B^{-1}\geq A^{-1}>0$。

   (e) (挑战) 若 $A\geq B>0$，则 $A^{1/2}\geq B^{1/2}>0$。举例说明 $A\geq B\geq 0$ 未必蕴含 $A^2\geq B^2$。