## 4.8 HW 8

作业 8 链接

**练习 4.1** 设 $A$ 是一个 $n\times m$ 实数矩阵, $\mathbf{x}\in R^m$, 证明 $A\mathbf{x}=0\Leftrightarrow A^\top A\mathbf{x}=0$.

**证明**

( $\Rightarrow$ ) 显然

( $\Leftarrow$ )

$$
\begin{aligned}
A^\top Ax&=0\\
x^\top A^\top Ax&=0\\
(Ax)^\top(Ax)&=0\\
Ax&=0
\end{aligned}
$$

**练习 4.2** 若 $A_1^\top A_1BA_2^\top A_2=0$, 则 $A_1BA_2^\top=0$, 其中 $A_1,A_2,B$ 都是矩阵。

**证明**

由于 $Ax=0\Leftrightarrow A^\top Ax=0$

$$
\begin{aligned}
&A_1^\top A_1BA_2^\top A_2=0\\
\Rightarrow &A_1BA_2^\top A_2=0\\
\Rightarrow &A_1BA_2^\top=0
\end{aligned}
$$

**练习 4.3** 假设 $A_{n\times m}$ 有奇异值分解 $A=UDV^\top$, 其中 $U,V,D$ 分别是 $n\times r,m\times r,r\times r$ 矩阵 $(r=\operatorname{rank}(A))$, 满足 $U^\top U=V^\top V=I_r,D=\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_r}\right)$ (可逆), 证明 $C(U)=C(A),C(V)=C\left(A^\top\right)$ 。

**证明**

( $C(U)\supseteq C(A)$ ) 显然

( $C(U)\subseteq C(A)$ )

$$
\begin{aligned}
\forall x,\quad Ux&=UDV^\top VD^{-1}x\\
&=A\left(VD^{-1}x\right)\in C(A)
\end{aligned}
$$

**练习 4.4** 假设 $A$ 是一个实数矩阵, $P_A=A\left(A^\top A\right)^-A^\top$ 为对应的投影阵, 证明 $C\left(P_A\right)=C(A)$ 。

**证明**

( $C(P_A)\subseteq C(A)$ ) 显然

( $C(P_A)\supseteq C(A)$ )

$$
\forall x,\quad Ax=P_AAx\in C\left(P_A\right)
$$

**练习 4.5** 假设矩阵 $A_{n\times m}=B_{n\times r}C_{r\times m}$, 假设 $C$ 是行满秩的, 证明 $C(A)=C(B),P_A=P_B$ 。

**证明**

( $C(A)\subseteq C(B)$ ) 显然

( $C(A)\supseteq C(B)$ ) 由于 $C$ 行满秩, $\forall x\in\mathbb{R}^{r\times 1}$, 存在 $y\in\mathbb{R}^{m\times 1}$ 满足 $x=Cy$

$$
Bx=BCy=Ay\in C(A)
$$

**练习 4.6** 按列划分 $A_{n\times m}=(A_1,A_2)$, 假设 $A_1^\top A_2=0$, 证明 $P_A=P_{A_1}+P_{A_2}$ 。

**证明**

$$
\begin{aligned}
P_A &= A\left(A^\top A\right)^- A^\top \\
&= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} A_1^\top \\ A_2^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}\right)^- \begin{pmatrix} A_1^\top \\ A_2^\top \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^\top A_1 & 0 \\ 0 & A_2^\top A_2 \end{pmatrix}^- \begin{pmatrix} A_1^\top \\ A_2^\top \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (A_1^\top A_1)^- & 0 \\ 0 & (A_2^\top A_2)^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^\top \\ A_1 \end{pmatrix} \\
&= A_1\left(A_1^\top A_1\right)^- A_1^\top + A_2\left(A_2^\top A_2\right)^- A_2^\top \\
&= P_{A_1} + P_{A_2}
\end{aligned}
$$

✍ **练习 4.7** 按列划分 $A_{n\times m} = (A_1, A_2)$, 令 $A_2^\perp = A_2 - P_{A_1}A_2$, 证明 $P_A = P_{A_1} + P_{A_2}$.

**证明**

$$
\begin{aligned}
(A_2^\perp)^\top A_1 &= (A_2 - P_{A_1}A_2)^\top A_1 \\
&= (A_2^\top - A_2^\top P_{A_1})A_1 \\
&= A_2^\top A_1 - A_2^\top P_{A_1} A_1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2^\perp \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\left(A_1^\top A_1\right) A_1^\top A_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} I & -\left(A_1^\top A_1\right)^- A_1^\top A_2 \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{行满秩}
$$

$$
\text{由 5. 可知} \quad P_A = P_{\tilde{A}} = P_{A_1} + P_{A_2^\perp}
$$

✍ **练习 4.8** (选做) 通常, 逆矩阵的定义如下

"对于一个 $n$ 阶实方阵 $A$, 若方阵 $B$ 使得 $AB = BA = I_n$, 则称 $B$ 是 $A$ 的逆矩阵."

事实上, 该定义中的两个条件有一个是多余的。试证明如下事实:

"若 $A$ 是一个 $n\times n$ 实方阵, 若方阵 $B$ 使得 $AB = I_n$, 则必有 $BA = I_n$ "。

**证明**

$$
\text{由于}\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(B)
$$

$$
\operatorname{rank}(B) = n
$$

$$
\forall x, \quad \exists y \quad \text{使} x = By
$$

$$
BAx = BABy = By = x
$$

$$
\text{所以} BA = I
$$

✍ **练习 4.9** 本练习题利用特征根证明矩阵不等式。首先介绍一些记号或定义:

(1) $A \geq 0$ ( $A$ 是半正定矩阵); $A > 0$ ( $A$ 是正定矩阵); $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$; $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$ 。

(2) 定义平方根矩阵: 若 $A_{n\times n} \geq 0$ 的谱分解为 $A = O\Lambda O^\top$, 其中对角阵 $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 的对角元为 $A$ 的特征根, $O$ 是正交矩阵, 则半正定矩阵的 (唯一) 平方根定义为 $A^{1/2} = O\Delta O^\top$, 其中 $\Delta = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ 。定义 $A^{-1/2} = \left(A^{1/2}\right)^{-1}$ 。证明如下事实:

(a) 以 $\lambda(A)$ 表示 $A$ 的任一特征根, 则 $A \leq I_n \Leftrightarrow \lambda(A) \leq 1$, 且 $A \geq I_n \Leftrightarrow \lambda(A) \geq 1$.

(b) 若 $0 < A \leq I_n$, 则 $A^{-1} \geq I_n$.

(c) 若 $A \geq B > 0$, 则对任何 $k \times n$ 矩阵 $C$ 有 $CAC^\top \geq CAC^\top \geq 0$, 特别地, $B^{-1/2}AB^{-1/2} \geq I_n$.

(d) 若 $A \geq B > 0$, 则 $B^{-1} \geq A^{-1} > 0$ 。

(e) (挑战) 若 $A \geq B > 0$, 则 $A^{1/2} \geq B^{1/2} > 0$ 。举例说明 $A \geq B \geq 0$ 未必蕴含 $A^2 \geq B^2$ 。

**证明**

(a) 由谱分解 $A = O\Lambda O^\top, \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

$$\begin{aligned}
& A \leqslant I \\
\Leftrightarrow & I - A \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow & O \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1-\lambda_n \end{pmatrix} O^\top \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow & 1 - \lambda_i \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots n \\
\Leftrightarrow & \lambda(A) \leqslant 1
\end{aligned}$$

同理 $A \geqslant I \Leftrightarrow \lambda(A) \geqslant 1$.

(b) $\quad 0 < A \leqslant I$

$$I - A = O \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1-\lambda_n \end{pmatrix} O^\top \geqslant 0$$

由于 $\lambda_i \geqslant 1$ 和 $\lambda_i > 0$ 则 $\frac{1}{\lambda_i} \geqslant 1$

$$A^{-1} - I = O \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n}-1 \end{pmatrix} O^\top \geqslant 0$$

(c) $\quad A \geqslant B > 0$

$$A - B = O \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} O^\top \geqslant 0$$

$$\begin{aligned}
CAC^\top - CBC^\top &= C(A-B)C^\top \\
&= CO \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} O^\top C^\top \geqslant 0
\end{aligned}$$

$$\text{令} B = I, C = B^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{则} B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}} \geqslant I$$

(d) $\quad$ 由 (c)

$$\begin{aligned}
& B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}} \geqslant I \\
& \lambda\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right) \geqslant 1 \\
\Rightarrow & 0 < \lambda\left(B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant 1 \\
\Rightarrow & 0 < B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}} \leqslant I
\end{aligned}$$

再由 (c)

$$CB^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}C^\top \leqslant CC^\top$$

取 $C=B^{-\frac{1}{2}}$ 则 $A^{-1}\leqslant B^{-1}$

(e)

$A\geqslant B$ , 由 (c) $\quad B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\geqslant I$

$$\forall x, 满足\|x\|=1$$

$$x^{\top}B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}x=\left\|A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{2}}x\right\|^2\geqslant\|x\|^2=1$$

$$\Rightarrow\left\|A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{2}}x\right\|\geqslant 1$$

$$\Rightarrow A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{2}}的特征值大于 1$$

$$由于\left(A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{4}}\right)B^{-\frac{1}{4}}与B^{-\frac{1}{4}}\left(A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{4}}\right)有相同特征值$$

$$\Rightarrow B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{4}}的特征值大于 1$$

$$\Rightarrow\quad B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{4}}\geqslant I$$

$$由 (c)\Rightarrow A^{\frac{1}{2}}\geqslant B^{\frac{1}{4}}B^{\frac{1}{4}}=B^{\frac{1}{2}}$$

反例:

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\geq 0$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$det(A^2-B^2)=-1$$