Lab-2: 简单线性回归 **2023 年 11 月 10-11 月 18 日**

内容**:** 简单线性回归模型.
任务**:** 阅读下面的材料, 重复代码命令（手工输入!），并做练习 1-4，提交结果。

线性回归分析的 R 函数主要包括：

```
lm, summary, plot，coefficient, residual, fitted
```

它们分别被用来完成如下任务：

- lm: 利用最小二乘法分析数据，推断线性回归模组中的参数。模型结构主要以 $y \sim x_1 + x_2 ...$ 的形式指定（R 中称为 formula）, 左侧为响应，右侧 $x_1, x_2, ...$ 为自变量。例如

$$myfit = lm(y \sim x, data = mydata)$$

  其中 y 是响应，x 是自变量，数据集为 mydata. 分析结果存放在 myfit 中。

- summary，plot: 回归分析 lm 输出结果的汇总和图示，调用方式为

$$summary(myfit),\ \ plot(myfit)$$

- coefficient, residual,fitted：调取 lm 输出结果中的回归系数估计值，残差, 拟合值。

例 1. R 程序包 alr4 中有一个数据集 Heights, 是 Karl Pearson 收集的 1100 多个家庭的母女身高数据, 其中每个家庭至多 2 个女儿, 女儿的年龄在 18 岁以上, 母亲年龄小于 65 岁. 我们感兴趣的是母亲身高 Mheight 对女儿身高 Dheight 的影响, 因此假设如下线性模型

$$dheight = a + b \times mheight + \epsilon,\ \epsilon \sim (0, \sigma^2) \qquad (*)$$

R 命令如下：

```
> install.packages("alr4")
> library(alr4)
> Heights
mheight dheight
59.7    55.1
58.2    56.5
60.6    56.0
...
> myfit = lm(dheight~ mheight, data=Heights)
> myfit
Call:
lm(formula = dheight ~ mheight, data = Heights)

Coefficients:
(Intercept)      mheight
29.9174       0.5417
```

回归系数的 LS 估计 $\hat{a} = 29.9174, \hat{b} = 0.5417$，更多的细节通过 summary 函数得到：

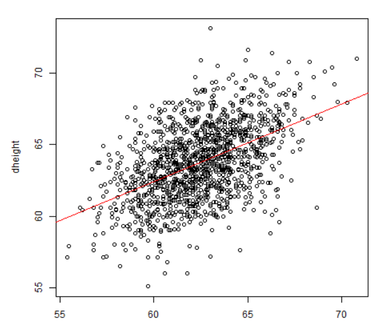
```
> summary(myfit)  ##details
Call:
lm(formula = dheight ~ mheight, data = Heights)

Residuals:
Min     1Q Median     3Q    Max
-7.397 -1.529  0.036  1.492  9.053

Coefficients:
            Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept) 29.91744    1.62247   18.44   <2e-16 ***
mheight      0.54175    0.02596   20.87   <2e-16 ***
---

Residual standard error: 2.266 on 1373 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2408,    Adjusted R-squared:  0.2402
F-statistic: 435.5 on 1 and 1373 DF,  p-value: < 2.2e-16

> coefficients(myfit)
(Intercept)     mheight
29.917437    0.541747
```

汇总 (summary) 主要分三个部分

- Residuals 部分用 5 个数进行了描述 (Min 最小值, 1Q 即 25% 分位数，Median 中位数，3Q 即 75% 分位数和 Max).
- Coefficients 部分列出了回归系数的 LS 估计 (Estimate)、标准差 (Std. error)、t 检验（t value)、p 值 (Pr(>|t|)), 这里有两行，第一行为截距项 (Intercept)，第二行为自变量 mheight 对应的回归系数.
- 最后三行描述了模型整体上的一些性质。Residual standard error: 2.266 为误差的标准差 ($\hat{\sigma}$), 自由度为 $n-2=1373$。Mutiple R-squared: 0.2408 是决定系数 R^2。最后一行为回归方程的显著性 F 检验（同时检验所有自变量的显著性)。

下面通过二维散点图查看拟合效果：首先用 plot 函数画出散点图，然后在其上通过使用 abline 函数添加拟合得到的回归直线：

```
> plot(Heights)
> abline(myfit,col="red") #col=2
```



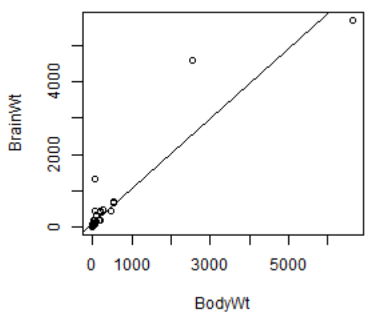
为了考察模型是否很好地拟合了数据，我们通常考察残差是否服从正态分布，以及考察残差是否与自变量存在某种非线性关系。这称为残差分析。

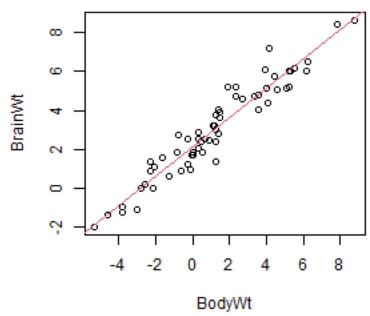
```
# 残差分析
 res=residuals(myfit)  # 残差
 qqnorm(res) # 残差是否正态?
 hist(res)# 残差是否正态?
 plot(Heights[ , "mheight"],res)
 # 残差与自变量 mheight 是否存在某种非线性关系?
 plot(myfit) # 包括了以上几个图
```

这里，你应该能看到残差基本服从正态，残差与自变量 mheight 没有明显的非线性关系，即模型拟合良好。

例 2. alr4 包中的数据集 brains 给出了 62 种哺乳动物的脑重量 (g) 和体重数据 (kg), 我们希望了解脑重 (响应) 与体重（自变量）的关系。

```
# 画出散点图，并拟合简单线性模型
> plot(brains[,2:1]) # 没有明显的线性关系
> a=lm(BrainWt~BodyWt, data= brains )
> abline(a) # 拟合效果不好

# 对两个变量取对数，
> plot(log(brains[,2:1])) # 在对数尺度上线性关系比较明显
> b=lm(BrainWt~BodyWt, data=log(brains))
> abline(b,col=2) # 效果很好
```





原始数据拟合得到的回归直线为

$$BrainWt = 91 + 0.97 \times BodyWt$$

除了拟合效果不好之外，该模型还有其它不合理之处，比如当 BodyWt 趋于 0 时，BrainWt 不会趋近 0。考虑对数变换，对数数据拟合得到的回归直线为

$$\log(BrainWt) = 2.14 + 0.75 \times \log(BodyWt)$$

即 3/4 幂次律：

$$BrainWt = e^{2.14} \times BodyWt^{3/4}$$

现在我们预测某种体重为 4kg 的动物的脑重，第一个模型得到预测

$$91 + 0.97 \times 4 = 94.88(g)$$

第二个模型得到预测

$$e^{2.14} \times 4^{3/4} = 24.04(g)$$

查看体重在 4kg 附近的几种动物数据, 显然第二个模型预测跟准确一些。

```
> brains[brains[,2]<4.5 &brains[,2]>3.5 , ]
BrainWt BodyWt
Vervet                 57.998  4.190
Yellow-bellied marmot  17.000  4.050
Rock hyrax2            21.000  3.600
Raccoon                39.201  4.288
Red fox                50.400  4.235
```

练习 **1.** 福布斯 2019 财富榜前 100 名数据：

http://staff.ustc.edu.cn/~ynyang/2023/lab/forbes2019.txt

第 1 列是排名 (Rank)，第 4 列为财富值 (Wealth), 试研究财富与排名的关系。

练习 **2.** 类似于例 1 中的残差分析，考察例 2 两个模型的拟合效果。

练习 **3.** 因为身高（H:height）越高的人体重（W:weight）也偏大，所以判断体重是否超标不能只看体重，还要考虑其身高。为了消除掉体重中与身高有关的成分，可考虑简单线性回归模型：

$$\log(W) = a + b \times \log(H)) + \epsilon, \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

该模型中 $\xi = \frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{\log(W)-a-b\times\log(H))}{\sigma} \sim N(0,1)$ 与身高 H 无关，所以可认为是一个判断体重是否超标的指标, 如果参数 a, b, σ 已知，那么我们可以用 $\xi > 1.645$ 作为体重超标的判别标准 (1.645=qnorm(0.95))。若 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{\sigma}$ 是参数 a, b, σ 的估计, 那么判别标准为

$$\frac{\log(W) - \hat{a} - \hat{b} \times \log(H))}{\hat{\sigma}} > 1.645$$

等价地，若

$$\xi = \frac{W}{H^{\hat{b}}} > exp(\hat{a} + 1.645\hat{\sigma}) \tag{1}$$

则判别为偏胖。　下载成年人身高-体重数据

http://staff.ustc.edu.cn/~ynyang/2023/lab/height-weight.txt

该数据的三个变量为：sex (1：M, 0: F), weight (kg), height (m).

(a) 应用前述模型，使用所有数据 (不考虑性别) 求出 a, b, σ 的 LS 估计, 计算你自己的体重指数 ξ，判断自己体重是否超标，并计算群体中超过你的体重指数 ξ 值的人的比例。

(b) 检验 $H_0 : b = 2$ ($t = \sqrt{s_{xx}}(\hat{b} - 2)/\hat{\sigma}/$. 如果不显著，则可认为 $b = 2$, 从而你得到了 BMI 计算公式！)。

(c) 我们可以不取对数，直接建立线性模型 $W = a + bH + \epsilon, \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$, 则

$$\epsilon/\sigma = (W - a - bH)/\sigma \sim N(0, 1)$$

拟合该模型求出 a, b, σ^2 的 LS 估计，得到消除了身高影响的体重指数

$$\eta = (W - \hat{a} - \hat{b}H)/\hat{\sigma}$$

计算自己的 η 值，并计算群体中超过你的 η 值的人的比例。与 (a) 的结果是否一致？

(d) 方法 (a) 和 (c) 哪个更合理？这依赖于哪个模型能更好地拟合数据。模仿例 1 的残差分析，考察两个模型的拟合效果。

(e) 显然性别与 W，H 都有关，因此我们应该在对数尺度简单模型中添加一项控制性别：$\log(W) = a + b \times \log(H)) + c \times Sex + \epsilon$, 相应地, R 命令为 $lm(logW \sim logH + Sex)$。此时，你能否推断出 $b = 2$?

练习 **4.** 有人声称如下论断：如果一个正随机变量 x 服从对数正态分布, 即 $\log(x) \sim N(0, 1)$, 则 x 的首位非 0 数字 d 服从 Benford 定律, 即

$$P(d = i) = \log_{10}(1 + 1/i), i = 1, 2, ..., 9.$$

试通过模拟实验验证上述论断是否成立。

提示：你需要产生大量的 $N(0,1)$ 随机数, 例如：

```
n=100000 #n 个随机数
z=rnorm(n) # 标准正态随机样本，样本量 =n
x=exp(z)
d= firstdigit(x)  # 写一个函数计算正数的首位数字
table(d) /n  # 统计各个数字的频率
```