作业解答

hw1

1.1

R^1 中原点为中心的单位球为区间 $B^1 = [-1, 1]$, 球面由两个点构成: $S^0 = \{-1, 1\}$ 。
(a) 假设随机变量 x 服从球内均匀分布, 即 $x \sim U(-1, 1)$, 证明半径 $r = |x| \sim U(0, 1)$
(b) 令 $u = x/|x|$, 证明 $u \sim U(S^0)$ (球面均匀分布), 即 $P(u = \pm 1) = 1/2$ 。
Solution:
(a)

$$P(r \leq t) = P(|x| \leq t) = P(-t \leq x \leq t) = t.$$

所以 $r \sim U(0, 1)$
(b)

$$P(u = 1) = P(x > 0) = \frac{1}{2}, \quad P(u = -1) = P(x < 0) = \frac{1}{2}.$$

所以 $P(u = \pm 1) = \frac{1}{2}$

1.2

(a) 假设二元随机向量 $(x, y) \sim U(B^2)$, 即有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

试求 x 的边际分布。
(b) 假设二元随机向量 $(x, y) \sim U(S^1)$ (原点为中心的单位圆周上的均匀分布), 试求 x 的边际分布。
Solution:
(a) x 的边际密度函数为:

$$f_x(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\mathrm{d}y = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, \quad x \in [-1, 1].$$

(b) 引入极坐标 $x = cos\theta$, 有 $\theta \sim U(0, 2\pi)$

$$P(x \leq t) = P(cos\theta \leq t) = 1 - 2P(\theta < arccos(t)) = 1 - 2arccos(t)$$

求导可得

$$f_x(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in [-1, 1].$$

1.3

(a) 假设 x 是关于 0 对称的随机变量, $P(x=0)=0$, 令 $u=x/|x|$, 证明 $P(u=\pm 1)=1/2, u \perp\!\!\!\perp |x|$.
(b) 条件同 (a), 假设 $\sigma \perp\!\!\!\perp x, \sigma \sim U\left(S^0\right)$ 即 $P(\sigma=\pm 1)=1/2$, 证明 $x \stackrel{d}{=} x\sigma \stackrel{d}{=} |x|\sigma$ 。
(c) 假设 x, y 都是关于 0 对称的独立随机变量, $P(y=0)=0$, 证明 $x/y \stackrel{d}{=} x/|y|$ 。
(d) 假设 x, y iid $\sim N(0,1)$, 证明 $x/y \sim t_1$ (自由度为 1 的 t 分布, 也是 Cauchy 分布)。

Solution:

(a)

$$P(x>0)=P(u=1)$$

$$P(x<0)=P(u=-1)$$

由于 x 是关于 0 对称和 $P(x=0)=0$，可知 $P(u=1)=P(u=-1)=\frac{1}{2}$

$$P(u=1 \mid |x| \leq t)=P(x>0 \mid |x| \leq t)=\frac{1}{2}=P(u=1), \quad t>0$$

所以 $u \perp\!\!\!\perp |x|$

(b)

$$\begin{aligned} P(x\sigma \leq t) &= P(x \leq t, \sigma=1)+P(x \geq -t, \sigma=-1) \\ &= \frac{1}{2}P(x \leq t)+\frac{1}{2}P(x \geq -t) \\ &= P(x \leq t). \end{aligned}$$

所以 $x \stackrel{d}{=} x\sigma$

由于 $x=u|x|$ 和 $u \stackrel{d}{=} \sigma$,

$$|x|\sigma = xu\sigma$$

由于 $u \perp\!\!\!\perp x$ 和 $\sigma \perp\!\!\!\perp x$,

$$u\sigma \perp\!\!\!\perp x$$

$$P(u\sigma=\pm 1)=\frac{1}{2}$$

所以 $x \stackrel{d}{=} x\sigma \stackrel{d}{=} |x|\sigma$.

(c) 记 $v=y/|y|$,

可知 $P(v=\pm 1)=1/2$ 和 $v \perp\!\!\!\perp x, y$

根据 (b) 可得,

$$\frac{x}{y}=\frac{x}{|y|}v \stackrel{d}{=} \frac{x}{|y|}.$$

(d) 根据 (c) 可知,

$$x/y \stackrel{d}{=} x/|y| = x/\sqrt{y^2} \stackrel{d}{=} t_1$$

1.4

假设二元随机向量 $\mathbf{x}=(x_1, x_2)^{\top} \in R^2$ 的概率密度函数 $f(\mathbf{x})$ 仅与 $\|\mathbf{x}\|$ 有关, 即存在某个一元函数 h 使得

$$f(\mathbf{x})=h(\|\mathbf{x}\|)$$

这意味着在正交旋转下 $\mathbf{x}$ 的分布不变, 此时我们称 $\mathbf{x}$ 服从球对称分布。令极坐标变换

$$x_1=r\cos(\theta), x_2=r\sin(\theta), \quad r>0, 0 \leq \theta < 2\pi,$$

记 r 的概率密度函数为 $p(r)$ 。

(a) 试证明 r 与 θ 独立, 且 $\theta \sim U(0,2\pi), r$ 的概率密度 $p(r)=2\pi r h(r)$ 。

(b) 若 $p(r)=2r1_{(0<r<1)}$, 证明 $\mathbf{x} \sim U\left(B^2\right)$ 。

(c) (Box-Muller transform) 假设 r 服从自由度为 2 的 χ 分布（记作 $r \sim \chi_2$, 也称为 Rayleigh 分布）, 即 r 的概率密度函数为

$$p(r)=re^{-r^2/2}, r>0,$$

证明 x_1, x_2 iid $\sim N(0,1)$ 。注: Box-Muller transform 方法是标准正态随机数最常用的产生方法, 其中 $r \sim \chi_2$ 可由均匀分布随机数 $U \sim U(0,1)$ 生成如下 (inversion sampling): $r=\sqrt{-2\log(U)}$

(d) 若 r 服从 $U(0,1)$, 即 $p(r)=1, 0<r<1$, 求 $f(\mathbf{x})$, 它在球心处的密度是多少?

$$p(r)=re^{-r^2/2}, r>0,$$

Solution:

(a)

$$f(\mathbf{x})=h(\|\mathbf{x}\|)$$

Jacobi 矩阵行列式为 r，所以

$$f(r,\theta)=rh(r)=(\frac{1}{2\pi})(2\pi r f(r))=p(\theta)p(r)$$

所以

$$p(\theta)=\frac{1}{2\pi}$$

$$p(r)=2\pi r f(r)$$

$$\theta \sim U(0,2\pi)$$

(b)

$$f(\mathbf{x})=h(r)=\frac{1_{(0,1)}(r)}{\pi}=\frac{1_{(0,1)}(\|\mathbf{x}\|)}{\pi}.$$

所以 $\mathbf{x} \sim U\left(B^2\right)$

(c)

$$f(\mathbf{x})=h(r)=\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}=\frac{1}{2\pi}e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2}.$$

所以 x_1, x_2 iid $\sim N(0,1)$

(d)

$$f(\mathbf{x})=h(r)=\frac{1}{2\pi r}=\frac{1}{2\pi\|\mathbf{x}\|}.$$

所以球心处的密度不存在