**本次作业基本是初等概率计算，其中 3-4 题为第二讲多元球对称分布的简单情况（预热）。**

1. $R^1$ 中原点为中心的单位球为区间 $B^1 = [-1,1]$, 球面由两个点构成：$S^0 = \{-1,1\}$。
   (a) 假设随机变量 $x$ 服从球内均匀分布，即 $x \sim U(-1,1)$, 证明半径 $r = |x| \sim U(0,1)$
   (b) 令 $u = x/|x|$, 证明 $u \sim U(S^0)$ (球面均匀分布), 即 $P(u = \pm 1) = 1/2$。
2. (a) 假设二元随机向量 $(x,y) \sim U(B^2)$, 即有概率密度
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2+y^2 \le 1 \\ 0, & x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$
   试求 $x$ 的边际分布。
   (b) 假设二元随机向量 $(x,y) \sim U(S^1)$ (原点为中心的单位圆周上的均匀分布)，试求 $x$ 的边际分布。
3. (a) 假设 $x$ 是关于 0 对称的随机变量，$P(x=0)=0$, 令 $u = x/|x|$, 证明 $P(u = \pm 1) = 1/2$, $u \perp\!\!\!\perp |x|$.
   (b) 条件同 (a), 假设 $\sigma \perp\!\!\!\perp x$, $\sigma \sim U(S^0)$ 即 $P(\sigma = \pm 1) = 1/2$, 证明 $x \overset{d}{=} x\sigma \overset{d}{=} |x|\sigma$。
   (c) 假设 $x, y$ 都是关于 0 对称的独立随机变量，$P(y=0)=0$, 证明 $x/y \overset{d}{=} x/|y|$。
   (d) 假设 $x, y$ iid $\sim N(0,1)$, 证明 $x/y \sim t_1$(自由度为 1 的 $t$ 分布, 也是 Cauchy 分布)。
4. 假设二元随机向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in R^2$ 的概率密度函数 $f(\mathbf{x})$ 仅与 $\|\mathbf{x}\|$ 有关，即存在某个一元函数 $h$ 使得
   $$f(\mathbf{x}) = h(\|\mathbf{x}\|)$$
   这意味着在正交旋转下 $\mathbf{x}$ 的分布不变，此时我们称 $\mathbf{x}$ 服从球对称分布。令极坐标变换
   $$x_1 = r\cos(\theta), x_2 = r\sin(\theta), \quad r > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi,$$
   记 $r$ 的概率密度函数为 $p(r)$。
   (a) 试证明 $r$ 与 $\theta$ 独立，且 $\theta \sim U(0,\pi)$, $r$ 的概率密度 $p(r) = 2\pi r h(r)$。
   (b) 若 $p(r) = 2r1_{(0<r<1)}$, 证明 $\mathbf{x} \sim U(B^2)$。
   (c)（Box-Muller transform）假设 $r$ 服从自由度为 2 的 $\chi$ 分布（记作 $r \sim \chi_2$，也称为 Rayleigh 分布）, 即 $r$ 的概率密度函数为
   $$p(r) = re^{-r^2/2}, r > 0,$$
   证明 $x_1, x_2$ iid $\sim N(0,1)$。
   注：Box-Muller transform 方法是标准正态随机数最常用的产生方法，其中 $r \sim \chi_2$ 可由均匀分布随机数 $U \sim U(0,1)$ 生成如下 (inversion sampling)：$r = \sqrt{-2\log(U)}$
   (d) 若 $r$ 服从 $U(0,1)$, 即 $p(r) = 1, 0 < r < 1$，求 $f(\mathbf{x})$，它在球心处的密度是多少？