HW1

第一题解答. (a)

$$P(|x|\le t)=P(-t\le x\le t)=\frac{2t}{2}=t,\forall t\in(0,1)$$

可见 $r=|x|\sim U(0,1)$.

(b)

$$P(u=1)=P(x=|x|)=P(x\ge 0)=\frac{1}{2}$$

同理可得 $P(u=-1)=\frac{1}{2}$.

$\square$

第二题解答. (a)

$$p(x)=\int_{\{y:x^2+y^2\le 1\}}\frac{1}{\pi}dy=\int_{\{y:-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\forall-1\le x\le 1$$

(b) 对任意给定的 $t\in(-1,1)$, 我们利用几何意义来求解密度函数，现在考虑一个微元 Δt，我们有：

$$\begin{aligned}
&P\big(t\le x\le t+\Delta t\big)\\
=&P\Big(\arccos(x)\in(\min\{\arccos(t),\arccos(t+\Delta t)\},\max\{\arccos(t),\arccos(t+\Delta t)\})\Big)\\
=&\frac{|\arccos(t+\Delta t)-\arccos(t)|}{2\pi}\\
=&\frac{|\arccos(t+\Delta t)-\arccos(t)|}{\Delta t}\frac{1}{2\pi}\Delta t\\
\overset{\Delta t\to 0}{=}&\frac{1}{2\pi\sqrt{1-t^2}}\Delta t
\end{aligned}$$

所以我们有 $p(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2}},\forall-1\le x\le 1$.

$\square$

第三题解答. (a) 先证明 $P(u=\pm 1)=\frac{1}{2}$. 按照定义 $P(u=1)=P(x=|x|)=P(x\ge 0)=\frac{1}{2}$, 同理可以得到 $P(u=-1)=\frac{1}{2}$. 下证 u 与 $|x|$ 独立，对任意的 $s\in\{-1,+1\}$, $t\ge 0$, 来证明 $P(u=s,|x|\le t)=P(u=s)P(|x|\le t)$ 即可. 事实上：

$$\begin{aligned}
&P(u=s,|x|\le t)\\
=&P(u=s,0\le x\le t)+P(u=s,-t\le x\le 0)\\
=&P(0\le x\le t)\mathbb{I}\{s=1\}+P(-t\le x\le 0)\mathbb{I}\{s=0\}\\
=&\frac{1}{2}P(|x|\le t)\mathbb{I}\{s=1\}+\frac{1}{2}P(|x|\le t)\mathbb{I}\{s=0\}\\
=&P(u=s)P(|x|\le t)\mathbb{I}\{s=1\}+P(u=s)P(|x|\le t)\mathbb{I}\{s=0\}\\
=&P(u=s)P(|x|\le t)
\end{aligned}$$

(b) 对于任意的 $t \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
&P(x \le t) \\
=&P(x \le t, \sigma = 1) + P(x \le t, \sigma = -1) \\
=&P(x \le t, \sigma = 1) + P(x \ge -t, \sigma = -1) \\
=&P(x\sigma \le t, \sigma = 1) + P(x\sigma \le t, \sigma = -1) \\
=&P(x\sigma \le t) \\
=&P(x\sigma \le t, x \ge 0) + P(x\sigma \le t, x \le 0) \\
=&P(|x|\sigma \le t, x \ge 0) + P(x\sigma \ge -t, x \le 0) \\
=&P(|x|\sigma \le t, x \ge 0) + P(|x|\sigma \le t, x \le 0) \\
=&P(|x|\sigma \le t)
\end{aligned}
$$

其中第六个等于号成立是因为 $x\sigma$ 也是一个关于 0 对称的随机变量.

(c) 由 (a) 我们可以知道 $\frac{|y|}{y}$ 与 $|y|$ 是独立的，又因为 $\frac{|y|}{y}$ 与 x 也独立，从而 $\frac{|y|}{y}$ 与 $\frac{x}{|y|}$ 独立，因为 $\frac{|y|}{y}$ 是 $\{-1, +1\}$ 上的均匀分布，因此套用 (b)，我们直接就可以得到 $\frac{x}{y} = \frac{x}{|y|}\frac{|y|}{y} \overset{d}{=} \frac{x}{|y|}$.

(d) 按照 t_1 分布的定义，$\frac{x}{|y|} \overset{d}{=} t_1$，再套用 (c)，则直接可以得到 $\frac{x}{y} \overset{d}{=} t_1$.

□

第四题解答. (a)

$$f(r, \theta) = f_{(x_1,x_2)}(x_1(r,\theta), x_2(r,\theta))\Big|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\theta)}\Big| = h(r)r\mathbb{I}\{r \ge 0, 0 \le \theta \le 2\pi\} = 2\pi r h(r)\mathbb{I}\{r \ge 0\} \cdot \frac{1}{2\pi}\mathbb{I}\{0 \le \theta \le 2\pi\}$$

所以 $\theta \sim U(0, 2\pi)$, 且 $p(r) = 2\pi r h(r)$.

(b) 由于 $h(r) = \frac{1}{2\pi r}2r\mathbb{I}\{0 < r < 1\} = \frac{1}{\pi}\mathbb{I}\{0 < r < 1\}$, 从而 $f(x_1, x_2) = h(||\boldsymbol{x}||_2) = \frac{1}{\pi}\mathbb{I}\{0 < x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. 因此 $\boldsymbol{x} \sim U(B^2)$.

(c) $h(r) = \frac{1}{2\pi r}re^{-\frac{1}{2}r^2}\mathbb{I}\{r > 0\}$, 从而 $f(x_1, x_2) = h(||\boldsymbol{x}||_2) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x_2^2}$. 因此 x_1, x_2 iid $\sim N(0, 1)$.

(d) $h(r) = \frac{1}{2\pi r}\mathbb{I}\{0 < r < 1\}$, 从而 $f(x_1, x_2) = h(||\boldsymbol{x}||_2) = \frac{1}{2\pi||\boldsymbol{x}||_2}\mathbb{I}\{0 < ||\boldsymbol{x}||_2 < 1\}$, 在球心处的密度为无穷大.

□

第五题解答. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||_2} \in \mathbb{S}^{n-1}$, 因此必然可以找到一个正交矩阵 $H_{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，此 $H_{\boldsymbol{x}}$ 跟 $\boldsymbol{x}$ 有关，使得 $H_{\boldsymbol{x}}\frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||_2} = \boldsymbol{e}_1$. 因此我们有:

$$f(\boldsymbol{x}) = f(H_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}) = f(H_{\boldsymbol{x}}\frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||_2}||\boldsymbol{x}||_2) = f(||\boldsymbol{x}||_2\boldsymbol{e}_1) := h(||\boldsymbol{x}||_2) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

□

第六题解答. 对于随机向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \sim U(B^n)$, 我们可以构造出随机向量 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) \sim U(S^{n+1})$. 这个随机向量 $\boldsymbol{y}$ 的构造是简单的，并且与 $\boldsymbol{x}$ 的产生过程无关。我们只需要构造出一个 $n+2$ 维度的标准正态，然后再将其单位化即可以得到 $\boldsymbol{y}$.

由 lecture03 中的推论 6，我们有 $(y_1, ..., y_n) \overset{d}{=} (x_1, ..., x_n) \sim U(B^n)$，并且 $\forall k < n$, 以及任意的 $(i_1, i_2, ..., i_k) \subset (1, 2, ..., n)$, 我们会有 $(y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_k}) \overset{d}{=} (x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k})$. 由 lecture03 中的定理 4 可以知道，$(y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_k})$ 不可能是 k 维球内均匀分布，除非 $k < n$. $\square$

评注 1. 如果两个随机向量同分布，则他们的任意 k 维分布都会同分布。事实上：

$$\boldsymbol{x} \overset{d}{=} \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \mathbf{E}\big[f(\boldsymbol{x})\big] = \mathbf{E}\big[f(\boldsymbol{y})\big], \forall f$$