1. 假设随机向量 $(x,y)\in B^2$，做极坐标变换

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta), r>0, 0\le\theta<2\pi,$$

假设 $\theta\sim U(0,2\pi)$, $r\sim Beta(1,\beta)$ $(\beta>0)$, 试求 (x,y) 的联合概率密度，当 $\beta\to\infty$ 时，该分布有什么特点？

2. 假设三元随机向量 $(x,y,z)^\top$ 服从球对称分布，其概率密度函数 $f(x,y,z)=h(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, 令 $(x,y,z)^\top$ 的球坐标变换

$$x=r\cos(\theta), y=r\sin(\theta)\cos(\psi), z=r\sin(\theta)\sin(\psi),\quad r>0,\ 0\le\theta<\pi,\ 0\le\psi<2\pi.$$

   (a) 证明 $\cos(\theta)\sim U(-1,1), \psi\sim U(0,2\pi)$。

   (b) 如果已知 $r\sim U(0,1)$, 试求 $(x,y,z)^\top$ 的概率密度。

3. 假设随机变量 $x\sim Beta(1/2,n/2)$, 令 $r=\sqrt{(1-x)/x}$。假设 $\mathbf{u}\sim U(S^{n-1})$ 且与 r 独立，试验证 $\mathbf{x}=r\mathbf{u}$ 的密度函数为

$$p(\mathbf{x})=\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}\frac{1}{(1+\|\mathbf{x}\|^2)^{(n+1)/2}}, \mathbf{x}\in R^n.$$

这是多元 Cauchy 分布。

4. 假设 $n\times 1$ 随机向量 $\mathbf{x}$ 服从球对称分布，其概率密度函数仅与模长有关：$f(\mathbf{x})=h(\|\mathbf{x}\|)$，对于如下球坐标变换：$\mathbf{x}\to(r,\boldsymbol{\theta})$

$$x_1=r\cos(\theta_1),\ x_2=r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2),\ldots,\ x_n=r\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-1})$$

我们在第二讲定理 2 的证明过程中得到了 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$ 的联合概率密度

$$q(\boldsymbol{\theta})=\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}}\sin^{n-2}(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{n-2}), 0\le\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}<\pi, 0\le\theta_{n-1}<2\pi.$$

   (a) 利用 $q(\boldsymbol{\theta})$ 分布，求 θ_1 的边际概率密度。

   (b) 记 $\mathbf{u}=\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|=(u_1,\ldots,u_n)^\top$ 试求 $u_1=cos(\theta_1)$ 的边际概率密度。并说明只有 $n=3$ 时，$u_1\sim U(-1,1)$.

   (c) 对任何 $2\le i\le n$，求 u_i 的边际密度。

5. (a) 假设 $x/y\perp\!\!\!\perp y$, 证明 $E(x/y)=E(x)/E(y)$。

   (b) 假设 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^\top\sim \mathrm{Dirichlete}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\alpha_{n+1})$, 记 $a=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i$, $\theta_i=\alpha_i/a$, $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_n)^\top$. 试利用第三讲命题 5Dirichlete 分布的 gamma 表示证明

$$E(\mathbf{x})=\boldsymbol{\theta},\quad var(\mathbf{x})=[diag(\boldsymbol{\theta})-\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^\top]/(1+a).$$

6. 假设 $\mathbf{u}=(u_1,...,u_n)^\top \sim U(S^{n-1})$, 不妨假设 $\mathbf{u}=\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$, 其中 $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)^\top \sim N_n(\mathbf{0},I_n)$, 则 $u_1^2 = x_1^2/(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)$, 试基于该表示（而不是直接应用第 1 讲定理 1）证明

   (a) $u_1^2 \sim Beta(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2})$.

   (b) u_1 的概率密度函数为

$$p(u_1)=\frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma((n-1)/2)}\times(1-u_1^2)^{(n-3)/2}, -1<u_1<1.$$

7. 假设 $\mathbf{u}=(u_1,...,u_n)^\top, \mathbf{v}=(v_1,...,v_n)^\top$ iid $\sim U(S^{n-1})$，记 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 之间的相似度（相关性）度量 $R=\mathbf{u}^\top\mathbf{v}$。

   (a) 证明 R 与 $\mathbf{u}$ 独立，也与 $\mathbf{v}$ 独立，并且 $R \stackrel{d}{=} u_1$。

   (b) 证明

$$\sqrt{n-1}\frac{R}{\sqrt{1-R^2}} \sim t_{n-1}.$$

   (c) 假设 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ iid $\sim N_n(\mathbf{0},\sigma^2 I_n)$, 令 Galton 样本相关系数 $R_G=\frac{\mathbf{x}^\top\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|}$. 证明

$$\sqrt{n-1}\frac{R_G}{\sqrt{1-R_G^2}} \sim t_{n-1}.$$

   (d) 条件同 (c), 令 Pearson 样本相关系数 $R_P=(\mathbf{x}-\mathbb{1}\bar{x})^\top(\mathbf{y}-\mathbb{1}\bar{y})/(\|\mathbf{x}-\mathbb{1}\bar{x}\|\cdot\|\mathbf{y}-\mathbb{1}\bar{y}\|)$. 证明

$$\sqrt{n-2}\frac{R_P}{\sqrt{1-R_P^2}} \sim t_{n-2}.$$