1. 假设 $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n)^\top$ 服从球对称分布，证明其部分 $(x_1, ..., x_k)^\top, 1 \le k < n$ 也服从球对称分布。

2. 假设随机向量 $(x, y) \in B^2$，做极坐标变换

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta), r > 0, 0 \le \theta < 2\pi,$$

假设 $\theta \sim U(0, 2\pi)$, $r \sim Beta(1, \beta)$ $(\beta > 0)$, 试求 (x, y) 的联合概率密度，当 $\beta \to \infty$ 时，该分布有什么特点？

3. 假设三元随机向量 $(x, y, z)^\top$ 服从球对称分布，其概率密度函数 $f(x, y, z) = h(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, 令 $(x, y, z)^\top$ 的球坐标变换

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)\cos(\psi), z = r\sin(\theta)\sin(\psi), \quad r > 0,\ 0 \le \theta < \pi,\ 0 \le \psi < 2\pi.$$

   (a) 证明 $\cos(\theta) \sim U(-1, 1), \psi \sim U(0, 2\pi)$。

   (b) 如果已知 $r \sim U(0, 1)$, 试求 $(x, y, z)^\top$ 的概率密度。

4. 假设随机变量 $x \sim Beta(1/2, n/2)$, 令 $r = \sqrt{(1-x)/x}$。假设 $\mathbf{u} \sim U(S^{n-1})$ 且与 r 独立，试验证 $\mathbf{x} = r\mathbf{u}$ 的密度函数为

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1 + \|\mathbf{x}\|^2)^{(n+1)/2}}, \mathbf{x} \in R^n.$$

这是多元 Cauchy 分布。

5. 假设 k 元随机向量 $\mathbf{x}$ 服从如下分布

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{k/2}\Gamma((n-k)/2)}(1 - \|\mathbf{x}\|^2)^{(n-k-2)/2},\ \mathbf{x} \in B^k,\ k < n,$$

这一个单位球 B^k 内的球对称分布 (实际上是球面均匀分布 $U(S^{n-1})$ 的 k 元边际分布，参见第一讲定理 2)，试应用第二讲定理 1(模长的概率密度公式) 证明 $\|\mathbf{x}\|^2 \sim Beta(k/2, (n-k)/2)$.

后面的题目可能用到如下事实 (**参见第三讲定理** 2 **的证明** 2):

球对称分布的 $\mathbf{x}$ **可表示为** $\mathbf{x} \overset{d}{=} \mathbf{u}r, \mathbf{u} \sim U(S^{n-1})$, **而** $\mathbf{u} \sim U(S^{n-1}) \overset{d}{=} \mathbf{z}/\|\mathbf{z}\|, \mathbf{z} \sim N_n(0, I_n)$.

6. 假设 $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)^\top \sim U(S^{n-1})$, 利用事实：$\mathbf{u} \overset{d}{=} \mathbf{z}/\|\mathbf{z}\|, \mathbf{z} \sim N_n(0, I_n)$, 证明 $u_1^2 + ... + u_k^2 \sim Beta(k/2, (n-k)/2)$, $(k < n)$。

7. (a) 假设 x, y iid $\sim N(0, 1)$, 证明或说明 $x/y \sim t_1$ (即 Cauchy 分布)。

   (b) 假设 $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^\top \sim U(S^{n-1})$($n$ 维单位球面均匀分布)，证明 $x_1/x_2 \sim t_1$。

   (c) 假设 $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^\top \sim U(B^n)$($n$ 维单位球内的均匀分布)，证明 $x_1/x_2 \sim t_1$。

8. 假设 $n \times 1$ 随机向量 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ 服从球对称分布，证明 $\sqrt{n}\bar{x}/s_x \sim t_{n-1}$，其中 $\bar{x} = \sum x_i/n$，$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2}$.

9. 假设随机向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ 独立，其中 $\mathbf{y}$ 服从球对称分布，记 Pearson 相关系数

$$R_{xy} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbb{1}\bar{x})^\top(\mathbf{y} - \mathbb{1}\bar{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbb{1}\bar{x}\|\|\mathbf{y} - \mathbb{1}\bar{y}\|},$$

证明

$$\sqrt{n-2}\frac{R_{xy}}{\sqrt{1 - R_{xy}^2}} \sim t_{n-2}.$$