Homework 2 参考答案

Exercise 2.1. 假设 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ 服从球对称分布，证明其部分 $(x_1, \ldots, x_k)^\top, 1 \le k < n$ 也服从球对称分布。

Solution to Exercise 2.1. 我们将随机向量 $\mathbf{x}$ 划分为两部分：$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^\top, \mathbf{x}_2^\top)^\top$，其中 $\mathbf{x}_1 = (x_1, \ldots, x_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ 为前 k 个分量组成的子向量，$\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$ 为剩余部分。

这里提供两种经典的证明思路：

(a) 利用特征函数证明:

已知随机向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 服从球对称分布，当且仅当它的特征函数 $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ 只依赖于向量 $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)^\top$ 的欧几里得范数的平方 $\mathbf{t}^\top\mathbf{t}$。即存在某个标量函数 $\psi(\cdot)$，使得对于任意 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ 有：

$$\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \psi(\mathbf{t}^\top\mathbf{t})$$

我们将对应的自变量 $\mathbf{t}$ 也做相同的划分：$\mathbf{t} = (\mathbf{t}_1^\top, \mathbf{t}_2^\top)^\top$，其中 $\mathbf{t}_1 \in \mathbb{R}^k$, $\mathbf{t}_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$。那么 $\mathbf{t}^\top\mathbf{t} = \mathbf{t}_1^\top\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2^\top\mathbf{t}_2$。

根据边缘分布特征函数的性质，子向量 $\mathbf{x}_1$ 的特征函数可以通过将联合特征函数中 $\mathbf{t}_2$ 的部分置为 $\mathbf{0}$ 来求得：

$$\phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{t}_1) = \phi_{\mathbf{x}}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\right)$$

将其代入球对称分布的特征函数形式中，我们得到：

$$\phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{t}_1) = \psi(\mathbf{t}_1^\top\mathbf{t}_1 + \mathbf{0}^\top\mathbf{0}) = \psi(\mathbf{t}_1^\top\mathbf{t}_1)$$

可以看到，子向量 $\mathbf{x}_1$ 的特征函数 $\phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{t}_1)$ 依然只依赖于 $\mathbf{t}_1$ 的欧式范数平方。根据定义，这证明了子向量 $\mathbf{x}_1$ 在 $\mathbb{R}^k$ 空间中也服从球对称分布。

(b) 利用定义（正交变换）证明:

任取一个 $k \times k$ 的正交矩阵 $\mathbf{U}$。我们构造如下的 $n \times n$ 分块对角矩阵：

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix}\mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-k}\end{pmatrix}$$

也是一个严格的正交矩阵。

由 $\mathbf{x}$ 的球对称性可知 $\mathbf{P}\mathbf{x} \overset{d}{=} \mathbf{x}$，即：

$$\begin{pmatrix}\mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2\end{pmatrix} \overset{d}{=} \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2\end{pmatrix}$$

展开左侧得到：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}$$

既然两个随机向量的联合分布相同，那么它们的边缘分布也必然相同。取前 k 个分量的边缘分布，可得：

$$\mathbf{U}\mathbf{x}_1 \stackrel{d}{=} \mathbf{x}_1$$

Exercise 2.2. 假设三元随机向量 $(x, y, z)^\top$ 服从球对称分布，其概率密度函数 $f(x, y, z) = h(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$，令 $(x, y, z)^\top$ 的球坐标变换为：

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)\cos(\psi), \quad z = r\sin(\theta)\sin(\psi), \quad r > 0,\ 0 \le \theta < \pi,\ 0 \le \psi < 2\pi.$$

(a) 证明 $\cos(\theta) \sim U(-1, 1), \psi \sim U(0, 2\pi)$。
(b) 如果已知 $r \sim U(0, 1)$，试求 $(x, y, z)^\top$ 的概率密度。

Solution to Exercise 2.2.

(a) (r, θ, ψ) 的联合概率密度函数为：

$$f_{R,\Theta,\Psi}(r, \theta, \psi) = f(x, y, z)|J| = h(r)r^2\sin(\theta), \quad r > 0,\ 0 \le \theta < \pi,\ 0 \le \psi < 2\pi.$$

$$p_\Psi(\psi) \propto 1, \quad \psi \in [0, 2\pi)$$

根据归一化条件，得 $p_\Psi(\psi) = \frac{1}{2\pi}$，因此 $\psi \sim U(0, 2\pi)$。

同理，求出 θ 的边缘密度：

$$p_\Theta(\theta) \propto \sin(\theta), \quad \theta \in [0, \pi)$$

由于 $\int_0^\pi \sin(\theta)d\theta = 2$，归一化后得 $p_\Theta(\theta) = \frac{1}{2}\sin(\theta)$。

现在令随机变量 $w = \cos(\theta)$，则 $\theta = \arccos(w)$，且 $w \in (-1, 1]$。其导数为 $\left|\frac{d\theta}{dw}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{1}{\sin(\theta)}$。根据连续型随机变量变换公式，$w$ 的概率密度为：

$$p_W(w) = p_\Theta(\arccos(w))\left|\frac{d\theta}{dw}\right| = \frac{1}{2}\sin(\theta) \cdot \frac{1}{\sin(\theta)} = \frac{1}{2}, \quad -1 < w \le 1.$$

这正是区间 $(-1, 1)$ 上的均匀分布密度，故得证 $\cos(\theta) \sim U(-1, 1)$。

(b)

$$\begin{aligned} p_R(r) &= \int_0^{2\pi}\int_0^\pi h(r)r^2\sin(\theta)d\theta d\psi \\ &= h(r)r^2\left(\int_0^\pi \sin(\theta)d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} 1 d\psi\right) \\ &= h(r)r^2 \cdot 2 \cdot 2\pi \\ &= 4\pi r^2 h(r). \end{aligned}$$

将已知条件代入该公式，有：

$$4\pi r^2 h(r) = 1 \implies h(r) = \frac{1}{4\pi r^2}, \quad 0 < r < 1.$$

代入 $h(r)$ 的表达式即得：

$$f(x,y,z) = \frac{1}{4\pi(x^2+y^2+z^2)}, \quad 0 < x^2+y^2+z^2 < 1.$$

Exercise 2.3. 假设随机向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 服从球对称分布，假设 $\|\mathbf{x}\| \overset{d}{=} \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}}$，$\xi \sim Beta(1/2, n/2)$，试验证 $\mathbf{x}$ 服从多元 Cauchy 分布，即其概率密度函数为

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1+\|\mathbf{x}\|^2)^{(n+1)/2}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Solution to Exercise 2.3.

$$p_R(r) = h(r) \cdot \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} r^{n-1}, \quad r > 0$$

已知 $r \overset{d}{=} \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}}$，其中 $\xi \sim Beta(1/2, n/2)$。随机变量 ξ 的概率密度函数为：

$$p_\xi(t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(n/2)} t^{-1/2}(1-t)^{n/2-1}, \quad 0 < t < 1$$

由 $r = \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}}$ 可反解出 $\xi = \frac{1}{1+r^2}$。求导得到雅可比行列式的绝对值：

$$\left|\frac{d\xi}{dr}\right| = \left|\frac{-2r}{(1+r^2)^2}\right| = \frac{2r}{(1+r^2)^2}$$

根据连续型随机变量的变换公式：

$$p_R(r) = p_\xi(\xi(r)) \left|\frac{d\xi}{dr}\right|$$

代入 ξ 和导数并整理：

$$p_R(r) = \frac{2\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{(n+1)/2}}$$

现在我们利用求得的 $p_R(r)$ 反推 $h(r)$：

$$h(r) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi} \cdot \pi^{n/2}} \frac{1}{(1+r^2)^{(n+1)/2}} = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1+r^2)^{(n+1)/2}}$$

最后，将 $r = \|\mathbf{x}\|$ 代回 $p(\mathbf{x}) = h(\|\mathbf{x}\|)$，得到 $\mathbf{x}$ 的联合概率密度函数为：

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1+\|\mathbf{x}\|^2)^{(n+1)/2}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

证毕。

Exercise 2.4. 假设 k 元随机向量 $\mathbf{x}$ 服从如下分布

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{k/2}\Gamma((n-k)/2)}(1-\|\mathbf{x}\|^2)^{(n-k-2)/2}, \quad \mathbf{x} \in B^k,\ k < n,$$

试证明 $\|\mathbf{x}\|^2 \sim \text{Beta}(k/2, (n-k)/2)$。

Solution to Exercise 2.4.

令 $r = \|\mathbf{x}\|$ 表示该 k 元随机向量的模长。r 的概率密度函数为：

$$p_R(r) = f(\mathbf{x}) \cdot \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)} r^{k-1}$$

将 $f(\mathbf{x})$ 的表达式代入化简：

$$p_R(r) = \frac{2\Gamma(n/2)}{\Gamma(k/2)\Gamma((n-k)/2)} r^{k-1}(1-r^2)^{(n-k-2)/2}, \quad 0 < r < 1$$

作变量代换 $y = r^2$，则 $r = \sqrt{y}$，且当 $0 < r < 1$ 时，$0 < y < 1$。求导得到雅可比行列式的绝对值：

$$\left|\frac{dr}{dy}\right| = \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{2} y^{-1/2}$$

根据连续型随机变量的变换公式，y 的概率密度函数 $p_Y(y)$ 为：

$$p_Y(y) = p_R(\sqrt{y}) \left|\frac{dr}{dy}\right|$$

代入 $p_R(r)$ 和导数：

$$p_Y(y) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(k/2)\Gamma((n-k)/2)} y^{k/2-1}(1-y)^{(n-k)/2-1}, \quad 0 < y < 1$$

因此，得证：

$$\|\mathbf{x}\|^2 \sim \text{Beta}(k/2, (n-k)/2)$$

注记：后面的题目可能用到如下表示 (参见第四讲定理 2 的证明 2)：n 元球对称分布的随机向量 $\mathbf{x}$ 可表示为：$\mathbf{x} \overset{d}{=} \mathbf{u}r, \mathbf{u} = \mathbf{z}/\|\mathbf{z}\|, r = \|\mathbf{z}\|, \mathbf{z} \sim N_n(0, I_n)$。

Exercise 2.5. 假设 $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^\top \sim U(S^{n-1})$，对 $1 \le k \le n-1$，记 $\mathbf{u}_1 = (u_1, \ldots, u_k)^\top$，$\mathbf{u}_2 = (u_{k+1}, \ldots, u_n)^\top$，证明 $\|\mathbf{u}_1\|^2 \sim \text{Beta}(k/2, (n-k)/2)$，$\|\mathbf{u}_2\|^2 \sim \text{Beta}((n-k)/2, k/2)$，$\frac{\|\mathbf{u}_1\|^2/k}{\|\mathbf{u}_2\|^2/(n-k)} \sim F_{k,n-k}$。

Solution to Exercise 2.5.

根据题目给出的注记提示，单位球面上的均匀分布向量 $\mathbf{u} \sim U(S^{n-1})$ 可以表示为标准正态随机向量的归一化形式：

$$\mathbf{u} \overset{d}{=} \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|}$$

其中 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^\top \sim N_n(0, I_n)$。

我们将向量 $\mathbf{z}$ 也按前 k 个和后 $n-k$ 个分量进行划分：记 $\mathbf{z}_1 = (z_1, \dots, z_k)^\top$ 且 $\mathbf{z}_2 = (z_{k+1}, \dots, z_n)^\top$。

由此，$\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$ 的模长平方可以分别表示为：

$$\|\mathbf{u}_1\|^2 \overset{d}{=} \frac{\|\mathbf{z}_1\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2} = \frac{\|\mathbf{z}_1\|^2}{\|\mathbf{z}_1\|^2 + \|\mathbf{z}_2\|^2}$$

$$\|\mathbf{u}_2\|^2 \overset{d}{=} \frac{\|\mathbf{z}_2\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2} = \frac{\|\mathbf{z}_2\|^2}{\|\mathbf{z}_1\|^2 + \|\mathbf{z}_2\|^2}$$

由于分量 $z_i \sim N(0,1)$，根据卡方分布的定义，我们有：

$$\|\mathbf{z}_1\|^2 = \sum_{i=1}^{k} z_i^2 \sim \chi_k^2$$

$$\|\mathbf{z}_2\|^2 = \sum_{i=k+1}^{n} z_i^2 \sim \chi_{n-k}^2$$

并且由于正态变量 z_i 之间相互独立，$\|\mathbf{z}_1\|^2$ 与 $\|\mathbf{z}_2\|^2$ 必然相互独立。

利用独立的卡方随机变量性质（若 $\xi \sim \chi_n^2$ 且 $\eta \sim \chi_m^2$ 独立，则 $\frac{\xi}{\xi+\eta} \sim \mathrm{Beta}(n/2, m/2)$），我们立即得到：

$$\|\mathbf{u}_1\|^2 \overset{d}{=} \frac{\|\mathbf{z}_1\|^2}{\|\mathbf{z}_1\|^2 + \|\mathbf{z}_2\|^2} \sim \mathrm{Beta}(k/2, (n-k)/2)$$

同理可得：

$$\|\mathbf{u}_2\|^2 \overset{d}{=} \frac{\|\mathbf{z}_2\|^2}{\|\mathbf{z}_1\|^2 + \|\mathbf{z}_2\|^2} \sim \mathrm{Beta}((n-k)/2, k/2)$$

对于第三个要证的式子，我们将前面用 $\mathbf{z}$ 表示的 $\|\mathbf{u}_1\|^2$ 和 $\|\mathbf{u}_2\|^2$ 直接代入：

$$\frac{\|\mathbf{u}_1\|^2/k}{\|\mathbf{u}_2\|^2/(n-k)} \overset{d}{=} \frac{\left(\frac{\|\mathbf{z}_1\|^2}{\|\mathbf{z}_1\|^2+\|\mathbf{z}_2\|^2}\right)/k}{\left(\frac{\|\mathbf{z}_2\|^2}{\|\mathbf{z}_1\|^2+\|\mathbf{z}_2\|^2}\right)/(n-k)} = \frac{\|\mathbf{z}_1\|^2/k}{\|\mathbf{z}_2\|^2/(n-k)} \sim F_{k,n-k}$$

因此，

$$\frac{\|\mathbf{u}_1\|^2/k}{\|\mathbf{u}_2\|^2/(n-k)} \sim F_{k,n-k}$$

证毕。

Exercise 2.6.

(a) 假设 $x, y \overset{iid}{\sim} N(0,1)$，证明或说明 $x/y \sim t_1$ (即 Cauchy 分布)。

(b) 假设 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \sim U(S^{n-1})$，证明 $x_1/x_2 \sim t_1$。

(c) 假设 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \sim U(B^n)$，证明 $x_1/x_2 \sim t_1$。

Solution to Exercise 2.6.

(a)

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{|y|}\frac{|y|}{y} \overset{d}{=} \frac{x}{|y|} = \frac{x}{\sqrt{y^2/1}} \sim t_1$$

(b)

$$\mathbf{x} \stackrel{d}{=} \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|}$$

其中 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^\top \sim N_n(0, I_n)$。对于 $\mathbf{x}$ 的前两个分量 x_1 和 x_2，我们有：

$$\frac{x_1}{x_2} \stackrel{d}{=} \frac{z_1/\|\mathbf{z}\|}{z_2/\|\mathbf{z}\|} = \frac{z_1}{z_2} \sim t_1$$

(c)

$$\mathbf{x} \stackrel{d}{=} r\mathbf{u}$$

其中 $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^\top \sim U(S^{n-1})$ 是方向向量，$r = \|\mathbf{x}\|$ 是模长，且 r 与 $\mathbf{u}$ 相互独立。由此可得:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{ru_1}{ru_2} = \frac{u_1}{u_2} \sim t_1$$

Exercise 2.7. 假设 $n \times 1$ 随机向量 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ 服从球对称分布，证明 $\sqrt{n}\bar{x}/s_x \sim t_{n-1}$，其中 $\bar{x} = \sum x_i/n$，$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2}$。

Solution to Exercise 2.7.

设 $T(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{n}\bar{x}}{s_x}$，对于任意常数 $c > 0$ 有：

$$T(c\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{n}c\bar{x}}{cs_x} = T(\mathbf{x})$$

而

$$\mathbf{x} \stackrel{d}{=} r\frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|}$$

其中 $\mathbf{z} \sim N_n(0, I_n)$ 是多元标准正态随机向量，$r = \|\mathbf{x}\| \geq 0$ 是与 $\mathbf{z}$ 独立的非负标量随机变量。

所以

$$T(\mathbf{x}) \stackrel{d}{=} T\left(\frac{r}{\|\mathbf{z}\|}\mathbf{z}\right) = T(\mathbf{z}) \sim t_{n-1}$$

证毕。