hw3

3.1

假设随机向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 的联合分布具有如下形式:

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = C \exp\left(-||\mathbf{x} - \mathbf{z}||^2 - ||\mathbf{y} - \mathbf{z}||^2\right),$$

其中 C 是常数。判断 (不用推导) 给定 $\mathbf{z}$ 时，$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 是否独立，以及 $\mathbf{x}$ 的条件分布的形式 $N(\_\_,\ \_\_)$。

Solution:

给定 $\mathbf{z}$ 时，$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 是独立的,$\mathbf{x}$ 的条件分布形式为 $N(z, \frac{1}{2} I_n)$

3.2

$\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Omega^{-1})$, 试求给定 $\mathbf{x}_{-(ij)} = (x_k, k \neq i, j)$ 条件下，$(x_i, x_j)^\top$ 的条件分布。

Solution1:

令 $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix}, \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_{-ij}$, 不妨重排 Ω, 使得 $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}$ 为对应 $\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$ 的协方差矩阵划分,$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}$=E$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$. 则由第四讲定理 3*，$\mathbf{y}_1 \mid \mathbf{y}_2 \sim N_2\left(\boldsymbol{\mu}_1 - \Omega_{11}^{-1}\Omega_{12}(\mathbf{y}_2 - \boldsymbol{\mu}_2), \Omega_{11}^{-1}\right)$

Solution2:

$$\begin{aligned}
p(x_i, x_j | \mathbf{x}_{-ij}) &\propto exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Omega (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \\
&= exp\left(-\frac{1}{2}\left(\omega_{ii}(x_i - \mu_i)^2 + \omega_{jj}(x_j - \mu_j)^2 + c_1 x_i x_j + c_2 x_i + c_3 x_j + c_4\right)\right) \\
&\propto exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_i', x_j - \mu_j')(\Omega_{ij})(x_i - \mu_i', x_j - \mu_j')^T\right)
\end{aligned}$$

其中 $\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} \omega_{ii} & \omega_{ij} \\ \omega_{ji} & \omega_{jj} \end{bmatrix}$ 为条件协方差矩阵, 比较系数可以得到条件均值。

3.3

假设 $W_{p\times p} \sim W_p(m, \Sigma)$, 证明 $tr(\Sigma^{-1}W) \sim \chi^2_{mp}$。

Solution:

由 $W \sim W_p(m, \Sigma)$ 我们知道，存在 $Z = (\boldsymbol{z_1}, \ldots, \boldsymbol{z_m}), \boldsymbol{z_1}, \ldots, \boldsymbol{z_m}$ i.i.d. $\sim N(0, \Sigma), W = ZZ^T$, 因此:

$$\Sigma^{-1/2}\boldsymbol{z_k} \sim N(0, I_p), 1 \leq k \leq m$$

则：$\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}W) = \mathrm{tr}(\Sigma^{-1/2}ZZ^\top\Sigma^{-1/2}) = \sum_{k=1}^m \mathrm{tr}(\Sigma^{-1/2}\boldsymbol{z_k}\boldsymbol{z_k}^\top\Sigma^{-1/2}) \sim \chi^2(mp)$

3.4

假设 $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ iid $\sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, 样本协方差矩阵定义为 $S = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x})(\mathbf{x}_i - \mathbf{x})^\top/(n-1)$, 应用 Cochran 定理证明 $(n-1)S \sim W_p(n-1, \Sigma)$。

Solution: 参考第六讲推论 2

3.5

假设二元随机向量 $\mathbf{z}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, i = 1, ..., m$ iid $\sim N_2(\mathbf{0}, I_2)$，记 $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m)^\top$, $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_m)^\top$，令

$$W = \sum_{i=1}^m \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^\top = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i & \sum_{i=1}^m y_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^\top\mathbf{x} & \mathbf{x}^\top\mathbf{y} \\ \mathbf{x}^\top\mathbf{y} & \mathbf{y}^\top\mathbf{y} \end{pmatrix},$$

按 Wishart 分布的定义，$W \sim W_2(m, I_2)$, 2×2 对称矩阵 W 的概率密度指的是 $\{w_{11}, w_{12}, w_{22}\}$ 的联合概率密度。为了求该分布，令

$$w_{11\bullet 2} = w_{11} - w_{12}^2/w_{22},$$

下述步骤 (a)-(e) 求解 $\{w_{11\bullet 2}, w_{12}, w_{22}\}$ 的联合概率密度函数。
(a) 证明 $w_{11} \sim \chi^2_m$，$w_{22} \sim \chi^2_m$, 并且它们独立。
(b) 证明 $w_{12}|\ \mathbf{y} \sim N(0, w_{22})$, 由此说明（引理 2）$w_{12}|w_{22} \sim N(0,\ w_{22})$。进一步，证明 $w_{12}/\sqrt{w_{22}} \sim N(0,1)$ 且与 w_{22} 独立。 (c) 记投影矩阵 $P_\mathbf{y} = \mathbf{y}\mathbf{y}^\top/||\mathbf{y}||^2$，验证 $w_{11\bullet 2} = \mathbf{x}^\top(I_m - P_\mathbf{y})\mathbf{x}$, 并利用该表达证明 $w_{11\bullet 2} \sim \chi^2_{m-1}$ 以及 $w_{11\bullet 2} \perp\!\!\!\perp w_{22}$。
(d) 利用 (c) 的表达，证明 $w_{11\bullet 2} \perp\!\!\!\perp w_{12}|\ \mathbf{y}$, 并说明这蕴含了 $w_{11\bullet 2} \perp\!\!\!\perp w_{12}|\ w_{22}$, 进一步，应用引理 3 证明 $w_{11\bullet 2} \perp\!\!\!\perp w_{12}$。
(e) 至此，我们证明了

$$w_{11\bullet 2} \sim \chi^2_{m-1} \perp\!\!\!\perp \{w_{12}, w_{22}\}, \quad w_{22} \sim \chi^2_m, \quad w_{12}|w_{22} \sim N(0, w_{22}),$$

利用这些事实，求 $\{w_{11\bullet 2}, w_{12}, w_{22}\}$ 的联合概率密度。
(f) 求变换的 $\{w_{11\bullet 2}, w_{12}, w_{22}\} \to \{w_{11}, w_{12}, w_{22}\}$ 的 Jaconbi, 并求 $\{w_{11}, w_{12}, w_{22}\}$ 的联合概率密度。

Solution:

(a)-(d) 参考第六讲命题 5 的证明
(e) 由前面的结论，我们有：

$$\begin{aligned} p(\omega_{11\bullet 2}, \omega_{12}, \omega_{22}) &= p(\omega_{11\bullet 2}) p(\omega_{22}) p(\omega_{12}|\omega_{22}) \\ &= \frac{\omega_{11\bullet 2}^{(m-1)/2-1} \exp\left(-\frac{\omega_{11\bullet 2}}{2}\right)}{2^{(m-1)/2}\Gamma((m-1)/2)} \frac{\omega_{22}^{m/2-1} \exp\left(-\frac{\omega_{22}}{2}\right)}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} \frac{\exp\left(-\frac{\omega_{12}^2}{2\omega_{22}}\right)}{\sqrt{2\pi\omega_{22}}} \\ &= \frac{(\omega_{11\bullet 2}\omega_{22})^{(m-1)/2-1} \exp\left(-\frac{\omega_{11\bullet 2}+\omega_{22}}{2} - \frac{\omega_{12}^2}{2\omega_{22}}\right)}{2^m \Gamma((m-1)/2)\Gamma(m/2)\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

(f) 容易得到雅可比行列式为：

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2\omega_{12}}{\omega_{22}} & \frac{\omega_{12}^2}{\omega_{22}^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

因此 $\{w_{11}, w_{12}, w_{22}\}$ 的联合分布为：

$$\begin{aligned} p(W) = p(w_{11}, w_{12}, w_{22}) &= c_m (w_{11}w_{22} - w_{12}^2)^{(m-3)/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(w_{11} + w_{22})\right) \\ &= c_m \mid W \mid^{(m-3)/2} \exp\left(-\frac{1}{2} tr(W)\right), 1/c_m = 2^m \sqrt{\pi}\Gamma(m/2)\Gamma((m-1)/2) \end{aligned}$$