1. 假设随机向量 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ 的联合分布具有如下形式

$$p(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = C\exp\left(-\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|^2\right),$$

其中 C 是常数。判断 (不用推导) 给定 $\mathbf{z}$ 时，$\mathbf{x},\mathbf{y}$ 是否独立，以及 $\mathbf{x}$ 的条件分布的形式 $N(\_\_,\ \_\_)$。

2. $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu},\Omega^{-1})$, 试求给定 $\mathbf{x}_{-(ij)} = (x_k, k \neq i,j)$ 条件下，$(x_i,x_j)^\top$ 的条件分布。

3. 假设 $W_{p\times p} \sim W_p(m,\Sigma)$, 证明 $tr(\Sigma^{-1}W) \sim \chi^2_{mp}$。

4. 假设 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ iid $\sim N_p(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$, 样本协方差矩阵定义为 $S = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top/(n-1)$, 应用 Cochran 定理证明 $(n-1)S \sim W_p(n-1,\Sigma)$。

5. 假设二元随机向量 $\mathbf{z}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, i = 1,\ldots,m$ iid $\sim N_2(\mathbf{0},I_2)$，记 $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_m)^\top$, $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_m)^\top$，令

$$W = \sum_{i=1}^m \mathbf{z}_i\mathbf{z}_i^\top = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_iy_i \\ \sum_{i=1}^m x_iy_i & \sum_{i=1}^m y_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^\top\mathbf{x} & \mathbf{x}^\top\mathbf{y} \\ \mathbf{x}^\top\mathbf{y} & \mathbf{y}^\top\mathbf{y} \end{pmatrix},$$

按 Wishart 分布的定义，$W \sim W_2(m,I_2)$, 2×2 对称矩阵 W 的概率密度指的是 $\{w_{11},w_{12},w_{22}\}$ 的联合概率密度。为了求该分布，令

$$w_{11\bullet 2} = w_{11} - w_{12}^2/w_{22},$$

下述步骤 (a)-(e) 求解 $\{w_{11\bullet 2},w_{12},w_{22}\}$ 的联合概率密度函数。

(a) 证明 $w_{11} \sim \chi^2_m$, $w_{22} \sim \chi^2_m$, 并且它们独立。

(b) 证明 $w_{12}|\,\mathbf{y} \sim N(0,w_{22})$, 由此说明（引理 2）$w_{12}|w_{22} \sim N(0,\ w_{22})$。进一步，证明 $w_{12}/\sqrt{w_{22}} \sim N(0,1)$ 且与 w_{22} 独立。

(c) 记投影矩阵 $P_{\mathbf{y}} = \mathbf{y}\mathbf{y}^\top/\|\mathbf{y}\|^2$，验证 $w_{11\bullet 2} = \mathbf{x}^\top(I_m - P_{\mathbf{y}})\mathbf{x}$, 并利用该表达证明 $w_{11\bullet 2} \sim \chi^2_{m-1}$ 以及 $w_{11\bullet 2} \perp\!\!\!\perp w_{22}$。

(d) 利用 (c) 的表达，证明 $w_{11\bullet 2} \perp\!\!\!\perp w_{12}|\,\mathbf{y}$, 并说明这蕴含了 $w_{11\bullet 2} \perp\!\!\!\perp w_{12}|\,w_{22}$, 进一步，应用引理 3 证明 $w_{11\bullet 2} \perp\!\!\!\perp w_{12}$。

(e) 至此，我们证明了

$$w_{11\bullet 2} \sim \chi^2_{m-1} \perp\!\!\!\perp \{w_{12},w_{22}\},\quad w_{22} \sim \chi^2_m,\quad w_{12}|w_{22} \sim N(0,w_{22}),$$

利用这些事实，求 $\{w_{11\bullet 2},w_{12},w_{22}\}$ 的联合概率密度。

(f) 求变换的 $\{w_{11\bullet 2},w_{12},w_{22}\} \to \{w_{11},w_{12},w_{22}\}$ 的 Jaconbi, 并求 $\{w_{11},w_{12},w_{22}\}$ 的联合概率密度。