作业 **3**	高斯图模型/**Wishart** 分布

1. 假设随机向量 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ 的联合分布具有如下形式

$$p(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = C\exp\Big(-\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|^2\Big),$$

   其中 C 是常数。判断 (不用推导) 给定 $\mathbf{z}$ 时，$\mathbf{x},\mathbf{y}$ 是否独立，以及 $\mathbf{x}$ 的条件分布的形式 $N(__,\ __)$。

2. $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu},\Omega^{-1})$, 试求给定 $\mathbf{x}_{-(ij)} = (x_k, k \neq i,j)$ 条件下，$(x_i,x_j)^\top$ 的条件分布。

3. 假设随机向量 $\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_m \in R^p$ 独立同分布，记 $Z_{m\times p} = (\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_m)^\top$, 假设对任何 $m\times m$ 正交矩阵 H，$HZ \overset{d}{=} Z$, 证明 $\mathbf{z}_1 \sim N_p(\mathbf{0},\Sigma)$.

4.（选）计算二元 Gamma 函数

$$\Gamma_2(x) = \int_D e^{-a_{11}-a_{22}}|a_{11}a_{22}-a_{12}^2|^{x-\frac{3}{2}}da_{11}da_{12}da_{22},\ x>1/2,$$

   其中积分区域 $D = \{(a_{11},a_{12},a_{22}) \in R^3 : a_{11}a_{22}-a_{12}^2 > 0, a_{11}>0, a_{22}>0\}$。

   提示：可以做变量代换：$a_{11} = t_{11}^2, a_{12} = t_{11}t_{12}, a_{22} = t_{12}^2 + t_{22}^2$ (参见第 6 讲定理 A5)，或其他任何形式的合理代换。