作业 4	**Wishart** 分布

这次题目比较难，能完成 3 个题目即可。下下周提交。

1. 假设随机向量 $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_m$ iid $\sim N_p(\mathbf{0},\Sigma)$, $X=(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_m)^\top$。假设 H 是任一 $m\times m$ 常数正交矩阵，$Y=HX\overset{\Delta}{=}(\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_m)^\top$, 证明 $\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_m$ iid $\sim N_p(\mathbf{0},\Sigma)$。

2. 若 $W\sim W_p(m,\Sigma)$, $\Sigma>0, m\geq p$, 则
$$|W|\overset{d}{=}|\Sigma|\prod_{i=1}^{p}\chi^2_{m-p+i}.$$
（提示：$|W|=|W_{11\bullet 2}|\times|W_{22}|$）

3. 假设 $W\sim W_p(m), \mathbf{z}\sim N_p(0,I_p)$, 两者独立，证明
$$\mathbf{z}^\top\mathbf{z}\left(1+\frac{1}{\mathbf{z}^\top W^{-1}\mathbf{z})}\right)\sim\chi^2_{m+1}.$$

4. 假设 $W\sim W_p(m,\Sigma)$，$\Sigma>0$.
   (a) 证明 $E(W)=m\Sigma$。
   (b) 假设 $m>p+1$，对任何常数向量 $\mathbf{t}\in S^{p-1}$ (即 $\|\mathbf{t}\|=1$), 求 $E(\mathbf{t}^\top W^{-1}\mathbf{t})$。
   (c) 假设 $m>p+1$，证明 $E(W^{-1})=\frac{1}{m-p-1}\Sigma^{-1}$。

5.（选）假设 $W\sim W_p(m,\Sigma)$, $A_{k\times p}$ 是行满秩常数矩阵，证明
$$(AW^{-1}A^\top)^{-1}\sim W_k(m-p+k,(A\Sigma^{-1}A^\top)^{-1}).$$
(提示: 先证明 $\Sigma=I_p$ 情形)。

6.（选）假设 $W=(w_{ij})\sim W_p(m)$, 考虑 (Galton) 相关系数矩阵 $R=(r_{ij}), r_{ij}=\frac{w_{ij}}{\sqrt{w_{ii}w_{jj}}}$, 试基于 Wishart 分布的概率密度以及变换：
$$\{w_{ij}, i\leq j\}\ \rightarrow\ \{r_{ij}, i<j; w_{11},\dots,w_{pp}\}$$
的 Jacobian, 证明 R 的概率密度函数 (上三角 $p(p-1)/2$ 个元素的联合分布)
$$f(R)=\frac{(\Gamma(m/2))^p}{\Gamma_p(m/2)}|R|^{(m-p-1)/2}.$$
其中 $\Gamma_p(x)=\pi^{p(p-1)/4}\prod_{i=1}^{p}\Gamma(x-(i-1)/2)$。
（注：特别地当 $p=2$ 时，这是二元正态相关系数为 0 时的 Galton 相关系数的分布，与 $\mathbf{u}\sim U(S^{m-1})$ 的分量 u_1 的分布相同 (参见第一讲 p44 推论 1)）

▼

7.（open）下面我们考虑求解 Wishart 分布 $W_p(m,\Sigma)$ 概率密度的另外一种可能途径。

首先考虑 $p=1,\Sigma=\sigma^2$ **的情形，注意** $\sigma^2\chi_m^2 \overset{d}{=} W_1(m,\sigma^2)$ **。**

假设 $z_1,...,z_m$ iid $\sim N_1(0,\sigma^2)$，记 $\mathbf{z}_{n\times 1}=(z_1,...,z_m)^\top \sim N_m(0,\sigma^2 I_m)$ 球对称, 其概率密度函数为

$$p(\mathbf{z})=\frac{1}{(2\pi\sigma)^{m/2}}\exp\left(-\|\mathbf{z}\|^2/(2\sigma^2)\right)\overset{\Delta}{=}h(\|\mathbf{z}\|),$$

由第 2 讲定理 2（P17），$\|\mathbf{z}\|$ 的概率密度

$$p_{\chi_m}(r)=\frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}r^{m-1}h(r), \tag{1}$$

其中 $h(r)=1/(2\pi\sigma)^{m/2}\exp(-r^2/2\sigma^2)$, 进而可得到 $w=\|\mathbf{z}\|^2\sim\sigma^2\chi_m^2$ 的概率密度

$$p_{\chi_m^2}(w)=\frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)\sigma^m}w^{m/2-1}e^{-w/2\sigma^2},\ w>0.$$

定理 2 导出公式 (1) 的关键是利用了事实：定义 $\mathbf{u}\overset{\Delta}{=}\mathbf{z}/\|\mathbf{z}\|$, 则 $\mathbf{u}\sim U(S^{m-1})$, 且 $\mathbf{u}\perp\!\!\!\perp\|\mathbf{z}\|$, 并且利用了单位球体积公式。

$p>1$ **的情况**:

假设 $\mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_m$ iid $\sim N_p(\mathbf{0},\Sigma)$, $\Sigma>0$, $Z=(\mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_m)^\top$，不妨假设 $\Sigma=I_p$。我们已知 Z 的（所有元素的联合）概率密度函数为（参见第 7 讲第 4 页）

$$p(Z)=\frac{1}{(2\pi)^{mp/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}tr(Z^\top Z)\right)$$

基于此，能否求出 $W=Z^\top Z$ 的概率密度？模仿 $p=1$ 情形，定义

$$U=Z(Z^\top Z)^{-1/2}=ZW^{-1/2}$$

则

$$U^\top U=I_p$$

需要证明 U 在所有 $\{V\in R^{m\times p}:V^\top V=I_p\}$ 上均匀分布并且与 $W=Z^\top Z$ 独立。需要群论？