1. 假设 $W_1 \sim W_p(m,\Sigma)$, $W_2 \sim W_p(n,\Sigma)$, 且 $W_1 \perp\!\!\!\perp W_2$, 证明 $W_1 + W_2 \sim W_p(m+n,\Sigma)$

2. 假设二元随机向量 $\mathbf{z}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, i = 1,\dots,m$ iid $\sim N_2(\mathbf{0}, I_2)$，记 $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_m)^\top$, $\mathbf{y} = (y_1,\dots,y_m)^\top$，令

$$W = \sum_{i=1}^m \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^\top = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i & \sum_{i=1}^m y_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^\top\mathbf{x} & \mathbf{x}^\top\mathbf{y} \\ \mathbf{x}^\top\mathbf{y} & \mathbf{y}^\top\mathbf{y} \end{pmatrix},$$

   2×2 对称矩阵 W 的概率密度指的是 $\{w_{11}, w_{12}, w_{22}\}$ 的联合概率密度（按 Wishart 分布的定义 W 服从 $W_2(m, I_2)$ 分布）。为了求该分布，令

$$w_{11\bullet 2} = w_{11} - w_{12}^2/w_{22},$$

   下述步骤 (a)-(e) 求解 $\{w_{11\bullet 2}, w_{12}, w_{22}\}$ 的联合概率密度函数。

   (a) 证明 $w_{11} \sim \chi^2_m$, $w_{22} \sim \chi^2_m$, 并且它们独立。

   (b) 证明 $w_{12} | \mathbf{y} \sim N(0, w_{22})$, 由此说明（引理 2）$w_{12}|w_{22} \sim N(0,\ w_{22})$。进一步，证明 $w_{12}/\sqrt{w_{22}} \sim N(0,1)$ 且与 w_{22} 独立。

   (c) 记投影矩阵 $P_{\mathbf{y}} = \mathbf{y}\mathbf{y}^\top/\|\mathbf{y}\|^2$，验证 $w_{11\bullet 2} = \mathbf{x}^\top(I_m - P_{\mathbf{y}})\mathbf{x}$, 并利用该表达证明 $w_{11\bullet 2} \sim \chi^2_{m-1}$ 以及 $w_{11\bullet 2} \perp\!\!\!\perp w_{22}$。

   (d) 利用 (c) 的表达，证明 $w_{11\bullet 2} \perp\!\!\!\perp w_{12} | \mathbf{y}$, 并由此证明 $w_{11\bullet 2} \perp\!\!\!\perp w_{12}$。

   (e) 至此，我们证明了

$$w_{11\bullet 2} \sim \chi^2_{m-1} \perp\!\!\!\perp \{w_{12}, w_{22}\}, \quad w_{22} \sim \chi^2_m, \quad w_{12}|w_{22} \sim N(0, w_{22}),$$

   利用上述事实，求 $\{w_{11\bullet 2}, w_{12}, w_{22}\}$ 的联合概率密度。

   (f) 利用 (e) 的结果，求 $\{w_{11}, w_{12}, w_{22}\}$ 的联合概率密度。

3. 证明第 7 讲 P11 定理 4.

4. 假设 $W \sim W_p(m)$, $m \geq p$，试证明如下结论。

   (a) $tr(W) \sim \chi^2_{mp}$。

   (b) $|W| \overset{d}{=} \prod_{i=1}^p \chi^2_{m-p+i}$ （提示：$|W| = |W_{11\bullet 2}| \times |W_{22}|$）。