Homework 4 参考答案

Exercise 1. 假设 2×2 随机矩阵 $W=\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}\sim W_2(m)$, $m\geq 2$。（注：(a),(b),(c),(d) 没有相承关系）

(a) 证明 $w_{11}, w_{22} \overset{iid}{\sim} \chi^2_m$.

(b) 证明 $w_{12} \overset{d}{=} \frac{1}{2}(w_{11}-w_{22})$.

(c) 令 $\xi=(w_{11}+w_{22})/2+w_{12}, \eta=(w_{11}+w_{22})/2-w_{12}$, 证明 $\xi, \eta \overset{iid}{\sim} \chi^2_m$.

(d) 证明 $\frac{2(w_{11}w_{22}-w_{12}^2)}{w_{11}+w_{22}-2w_{12}} \sim \chi^2_{m-1}$.

Solution to Exercise 1.

由题意 $W\sim W_2(m)$，假设二元随机向量 $\mathbf{z}_i=\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, i=1,\ldots,m \overset{iid}{\sim} N_2(\mathbf{0}, I_2)$，记 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m)^\top, \mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_m)^\top$，令：

$$W=\sum_{i=1}^m \mathbf{z}_i\mathbf{z}_i^\top=\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_iy_i \\ \sum_{i=1}^m x_iy_i & \sum_{i=1}^m y_i^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{x}^\top\mathbf{x} & \mathbf{x}^\top\mathbf{y} \\ \mathbf{x}^\top\mathbf{y} & \mathbf{y}^\top\mathbf{y} \end{pmatrix}$$

由于 $\mathbf{z}_i \overset{iid}{\sim} N_2(\mathbf{0}, I_2)$，其各个分量相互独立且服从 $N(0,1)$，因此列向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \overset{iid}{\sim} N_m(\mathbf{0}, I_m)$。

(a)

由上述表示可知 $w_{11}=\mathbf{x}^\top\mathbf{x}=\sum_{i=1}^m x_i^2$，且 $w_{22}=\mathbf{y}^\top\mathbf{y}=\sum_{i=1}^m y_i^2$。由于 $\mathbf{x}, \mathbf{y}\sim N_m(\mathbf{0}, I_m)$，根据卡方分布定义，有 $w_{11}\sim\chi^2_m$ 且 $w_{22}\sim\chi^2_m$。又因 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 独立，故 w_{11} 与 w_{22} 独立。得证 $w_{11}, w_{22} \overset{iid}{\sim} \chi^2_m$。

(b)

构造一个 2×2 的正交矩阵 $H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，显然 $HH^\top=I_2$。对随机矩阵 W 作正交变换，令 $\widetilde{W}=HWH^\top$。则：

$$\widetilde{W}\sim W_2(m, HI_2H^\top)=W_2(m, I_2)$$

对于非对角线元素，有 $\tilde{w}_{12}\overset{d}{=}w_{12}$。

而：

$$\tilde{w}_{12}=\frac{1}{2}[(w_{11}+w_{12})(1)+(w_{12}+w_{22})(-1)]=\frac{1}{2}(w_{11}-w_{22})$$

(c)

用向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 表达 ξ 和 η：

$$\xi = \frac{1}{2}(w_{11} + 2w_{12} + w_{22}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^\top\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^\top\mathbf{y} + \mathbf{y}^\top\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2$$
$$\eta = \frac{1}{2}(w_{11} - 2w_{12} + w_{22}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^\top\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^\top\mathbf{y} + \mathbf{y}^\top\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$$

作标准正交变换 $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\sqrt{2}}, \mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\sqrt{2}}$，则 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \overset{iid}{\sim} N_m(\mathbf{0}, I_m)$。代入即得 $\xi = \|\mathbf{u}\|^2 \sim \chi^2_m$，$\eta = \|\mathbf{v}\|^2 \sim \chi^2_m$。因 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 独立，故 $\xi, \eta \overset{iid}{\sim} \chi^2_m$。

(d)

对于 2×2 矩阵 W，求其逆矩阵：

$$W^{-1} = \frac{1}{w_{11}w_{22} - w_{12}^2}\begin{pmatrix} w_{22} & -w_{12} \\ -w_{12} & w_{11} \end{pmatrix}$$

取向量 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^\top$，计算二次型 $t^\top W^{-1} t$：

$$t^\top W^{-1} t = \frac{w_{11} + w_{22} - 2w_{12}}{2(w_{11}w_{22} - w_{12}^2)}$$

而待证式 $\frac{2(w_{11}w_{22} - w_{12}^2)}{w_{11}+w_{22}-2w_{12}}$ 恰为 $\frac{1}{t^\top W^{-1} t} \sim \chi^2_{m-1}$，故得证。

Exercise 2. 假设 $W \sim W_p(m), \mathbf{z} \sim N_p(0, I_p)$，两者独立，证明

$$\mathbf{z}^\top\mathbf{z}\left(1 + \frac{1}{\mathbf{z}^\top W^{-1}\mathbf{z}}\right) \sim \chi^2_{m+1}.$$

Solution to Exercise 2.

$$\mathbf{z}^\top\mathbf{z}\left(1 + \frac{1}{\mathbf{z}^\top W^{-1}\mathbf{z}}\right) = \mathbf{z}^\top\mathbf{z} + \frac{\mathbf{z}^\top\mathbf{z}}{\mathbf{z}^\top W^{-1}\mathbf{z}}$$

其中

$$\mathbf{z}^\top\mathbf{z} \sim \chi^2_p$$

给定 $\mathbf{z}$ 时，由于 $\mathbf{z}$ 与 W 独立，随机变量 $U = \frac{\mathbf{z}^\top\mathbf{z}}{\mathbf{z}^\top W^{-1}\mathbf{z}}$ 的条件分布为：

$$U \mid \mathbf{z} \sim \chi^2_{m-p+1}$$

由于 U 的条件分布与条件 $\mathbf{z}$ 无关，U 的无条件分布也是 χ^2_{m-p+1}，且 U 与 $\mathbf{z}$ 相互独立。

$$\mathbf{z}^\top\mathbf{z}\left(1 + \frac{1}{\mathbf{z}^\top W^{-1}\mathbf{z}}\right) \sim \chi^2_{p+(m-p+1)} = \chi^2_{m+1}$$

Exercise 3. 假设 $W \sim W_p(m, \Sigma)$, $\Sigma > 0$.

(a) 证明 $\Sigma^{-1/2}W\Sigma^{-1/2} \sim W_p(m)$.

(b) 证明对任何常数向量 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$, $\frac{\mathbf{t}^\top\Sigma^{-1}\mathbf{t}}{\mathbf{t}^\top W^{-1}\mathbf{t}} \sim \chi^2_{m-p+1}$.

Solution to Exercise 3.

(a)

由 Wishart 分布的定义，若 $W \sim W_p(m,\Sigma)$ 且 $\Sigma > 0$，则 W 可以表示为 m 个独立同分布的多元正态随机向量的外积之和：

$$W \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^\top$$

其中 $\mathbf{x}_i \stackrel{iid}{\sim} N_p(\mathbf{0},\Sigma)$。

我们将待证式展开：

$$\Sigma^{-1/2}W\Sigma^{-1/2} \stackrel{d}{=} \Sigma^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^{m}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^\top\right)\Sigma^{-1/2} = \sum_{i=1}^{m}(\Sigma^{-1/2}\mathbf{x}_i)(\Sigma^{-1/2}\mathbf{x}_i)^\top$$

令 $\mathbf{y}_i = \Sigma^{-1/2}\mathbf{x}_i$，则 $\mathbf{y}_i \stackrel{iid}{\sim} N_p(\mathbf{0}, I_p)$,

$$\Sigma^{-1/2}W\Sigma^{-1/2} = \sum_{i=1}^{m}\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^\top \sim W_p(m)$$

(b)

令 $\widetilde{W} = \Sigma^{-1/2}W\Sigma^{-1/2}$，由 (a) 可知 $\widetilde{W} \sim W_p(m)$。

对于任意非零常数向量 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$：

$$\mathbf{t}^\top W^{-1}\mathbf{t} = \mathbf{t}^\top\Sigma^{-1/2}\widetilde{W}^{-1}\Sigma^{-1/2}\mathbf{t}$$

令常数向量 $\mathbf{a} = \Sigma^{-1/2}\mathbf{t}$，则 $\mathbf{t} = \Sigma^{1/2}\mathbf{a}$。

原式可化为：

$$\frac{\mathbf{t}^\top\Sigma^{-1}\mathbf{t}}{\mathbf{t}^\top W^{-1}\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{a}^\top\mathbf{a}}{\mathbf{a}^\top\widetilde{W}^{-1}\mathbf{a}} \sim \chi^2_{m-p+1}$$

故得证。

Exercise 4. 假设 $W \sim W_p(m,\Sigma)$, $\Sigma > 0$.

(a) 假设 $m > p+1$，对任何常数向量 $\mathbf{t} \in S^{p-1}$ (即 $\|\mathbf{t}\| = 1$)，求 $E(\mathbf{t}^\top W^{-1}\mathbf{t})$。

(b) 假设 $m > p+1$，证明 $E(W^{-1}) = \frac{1}{m-p-1}\Sigma^{-1}$。

Solution to Exercise 4.

(a)

由 Exercise 3(b) 的结论，令随机变量 $U = \frac{\mathbf{t}^\top\Sigma^{-1}\mathbf{t}}{\mathbf{t}^\top W^{-1}\mathbf{t}}$，则 $U \sim \chi^2_{m-p+1}$。

将 $\mathbf{t}^\top W^{-1}\mathbf{t}$ 用 U 表示：

$$\mathbf{t}^\top W^{-1}\mathbf{t} = \frac{\mathbf{t}^\top\Sigma^{-1}\mathbf{t}}{U} = (\mathbf{t}^\top\Sigma^{-1}\mathbf{t})\cdot U^{-1}$$

因为 $\mathbf{t}^\top\Sigma^{-1}\mathbf{t}$ 是一个常数，所以：

$$E(\mathbf{t}^\top W^{-1}\mathbf{t}) = (\mathbf{t}^\top\Sigma^{-1}\mathbf{t}) \cdot E(U^{-1})$$

对于服从 χ_k^2 分布的随机变量，若 $k>2$，其逆的期望为 $E(U^{-1})=\frac{1}{k-2}$。在本题中，$k=m-p+1>2$，因此：

$$E(U^{-1}) = \frac{1}{(m-p+1)-2} = \frac{1}{m-p-1}$$

将 $E(U^{-1})$ 代回原式可得：

$$E(\mathbf{t}^\top W^{-1}\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{t}^\top\Sigma^{-1}\mathbf{t}}{m-p-1}$$

该结论对所有满足 $\|\mathbf{t}\|=1$ 的向量均成立（实际上对任意非零常数向量都成立）。

(b)

由 (a) 知对任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^p$，均满足：

$$\mathbf{x}^\top E(W^{-1})\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top\left(\frac{1}{m-p-1}\Sigma^{-1}\right)\mathbf{x}$$

且 $E(W^{-1})$ 和 $\frac{1}{m-p-1}\Sigma^{-1}$ 均为对称阵，再由 $\mathbf{x}$ 任意性即得证。

Exercise 5. 假设 $W\sim W_p(m,\Sigma)$, $A_{k\times p}$ 是行满秩常数矩阵，证明

$$(AW^{-1}A^\top)^{-1} \sim W_k(m-p+k, (A\Sigma^{-1}A^\top)^{-1}).$$

(提示：先证明 $\Sigma=I_p$ 情形，参考推论 8.3 的证明方法)。

Solution to Exercise 5.

步骤一：先证明 $\Sigma=I_p$ 的情形。

令 $B=(AA^\top)^{-\frac{1}{2}}A$，则 $BB^\top=(AA^\top)^{-\frac{1}{2}}AA^\top(AA^\top)^{-\frac{1}{2}}=I_k$。取正交矩阵

$$H = \begin{pmatrix} (AA^\top)^{-\frac{1}{2}}A \\ H_2 \end{pmatrix}$$

则 $HA^\top = \begin{pmatrix} (AA^\top)^{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$。

记 $\widetilde{W} = HWH^\top = \begin{pmatrix} \widetilde{W}_{11} & \widetilde{W}_{12} \\ \widetilde{W}_{21} & \widetilde{W}_{22} \end{pmatrix} \sim W_p(m,I_p)$。由 Wishart 分布的 Schur 补性质，有 $\widetilde{W}_{11\cdot 2}\sim W_k(m-p+k,I_k)$。

计算 $AW^{-1}A^\top$：

$$AW^{-1}A^\top = AH^\top(HWH^\top)^{-1}HA^\top = \left((AA^\top)^{\frac{1}{2}}, \mathbf{0}\right)\begin{pmatrix} \widetilde{W}_{11} & \widetilde{W}_{12} \\ \widetilde{W}_{21} & \widetilde{W}_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} (AA^\top)^{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

根据分块矩阵求逆公式，上式等于：

$$AW^{-1}A^\top = (AA^\top)^{\frac{1}{2}} \widetilde{W}_{11\cdot 2}^{-1} (AA^\top)^{\frac{1}{2}}$$

两边取逆，可得：

$$(AW^{-1}A^\top)^{-1} = (AA^\top)^{-\frac{1}{2}} \widetilde{W}_{11\cdot 2} (AA^\top)^{-\frac{1}{2}}$$

由于 $\widetilde{W}_{11\cdot 2} \sim W_k(m-p+k, I_k)$，由 Wishart 分布的线性变换性质：

$$(AW^{-1}A^\top)^{-1} \sim W_k(m-p+k, (AA^\top)^{-\frac{1}{2}} I_k (AA^\top)^{-\frac{1}{2}}) = W_k(m-p+k, (AA^\top)^{-1})$$

步骤二：证明一般情形 $\Sigma > 0$。

令 $U = \Sigma^{-\frac{1}{2}} W \Sigma^{-\frac{1}{2}} \sim W_p(m, I_p)$，则 $W^{-1} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^{-1} \Sigma^{-\frac{1}{2}}$。代入目标式中：

$$(AW^{-1}A^\top)^{-1} = (A\Sigma^{-\frac{1}{2}} U^{-1} \Sigma^{-\frac{1}{2}} A^\top)^{-1}$$

令常数矩阵 $\widetilde{B} = A\Sigma^{-\frac{1}{2}}$，则上式可写为 $(\widetilde{B} U^{-1} \widetilde{B}^\top)^{-1}$。由步骤一的结论已知：

$$(\widetilde{B} U^{-1} \widetilde{B}^\top)^{-1} \sim W_k(m-p+k, (\widetilde{B}\widetilde{B}^\top)^{-1})$$

又因为 $(\widetilde{B}\widetilde{B}^\top)^{-1} = (A\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}A^\top)^{-1} = (A\Sigma^{-1}A^\top)^{-1}$。故得证：

$$(AW^{-1}A^\top)^{-1} \sim W_k(m-p+k, (A\Sigma^{-1}A^\top)^{-1})$$

Exercise 6. **(选)** 假设 $W = (w_{ij}) \sim W_p(m)$，考虑 (Galton) 相关系数矩阵 $R = (r_{ij}), r_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sqrt{w_{ii}w_{jj}}}$，试基于 Wishart 分布的概率密度以及变换：

$$\{w_{ij}, i \le j\} \to \{r_{ij}, i < j; w_{11}, \ldots, w_{pp}\}$$

的 Jacobian，证明 R 的概率密度函数（上三角 $p(p-1)/2$ 个元素的联合分布）为：

$$f(R) = \frac{(\Gamma(m/2))^p}{\Gamma_p(m/2)} |R|^{(m-p-1)/2}.$$

其中 $\Gamma_p(x) = \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^p \Gamma(x-(i-1)/2)$。

Solution to Exercise 6.

标准 Wishart 分布 $W \sim W_p(m, I_p)$ 的概率密度函数为：

$$f_W(W) = \frac{1}{2^{mp/2}\Gamma_p(m/2)} |W|^{(m-p-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(W)\right)$$

其中 W 为正定对称矩阵。

我们引入相关系数矩阵 R 及对角线元素作为新变量。定义变换公式为：

$$w_{ij} = r_{ij}\sqrt{w_{ii}w_{jj}}, \quad (i \ne j)$$

$$w_{ii} = w_{ii}$$

令对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(w_{11}, \ldots, w_{pp})$，则 $W = D^{1/2}RD^{1/2}$。

首先计算行列式和迹的代换形式：行列式为 $|W| = |D^{1/2}RD^{1/2}| = |D|\cdot|R| = \left(\prod_{i=1}^{p} w_{ii}\right)|R|$。迹为 $\mathrm{tr}(W) = \sum_{i=1}^{p} w_{ii}$。

接下来计算从 $\{w_{ij}, i \le j\}$ 到 $\{r_{ij}, i < j; w_{11}, \ldots, w_{pp}\}$ 变换的雅可比行列式（Jacobian）绝对值。这里提供两种计算方法：

方法一（直接偏导数法）：

对变换公式求偏导：对于对角线元素：$\frac{\partial w_{ii}}{\partial w_{ii}} = 1$，$\frac{\partial w_{ii}}{\partial r_{kl}} = 0$。对于非对角线元素 $(i < j)$：$\frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} = \sqrt{w_{ii}w_{jj}}$，且当 $(i,j) \neq (k,l)$ 时 $\frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{kl}} = 0$。

如果我们将变量排布为先是对角线元素 w_{ii}，再是非对角线元素 r_{ij}，雅可比矩阵将是一个分块下三角矩阵，其行列式的值就是主对角线上偏导数的乘积：

$$J = \prod_{i<j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} = \prod_{i<j} \sqrt{w_{ii}w_{jj}} = \prod_{i=1}^{p} w_{ii}^{(p-1)/2}$$

方法二（外微分方法求 Jacobian）：

记 $C = D^{1/2} = \mathrm{diag}(\sqrt{w_{11}}, ..., \sqrt{w_{pp}})$，则 $W = CRC$，两边求微分：

$$dW = dC\, RC + C\, dR\, C + CRdC$$

则：

$$C^{-1}dWC^{-1} = C^{-1}dC\, R + dR + RdC\, C^{-1} \tag{1}$$

由第 6 讲定理 A3，(1) 式左端的外积为：

$$(C^{-1}dW\, C^{-1}) = |C^{-1}|^{p+1}(dW) = \prod_{i=1}^{p} w_{ii}^{-(p+1)/2}(dW) \tag{2}$$

(1) 式右端的非对角元为 $dr_{ij}, i > j$，对角线上 $dr_{ii} = 0$。另一方面：

$$dC = \mathrm{diag}\left(d\sqrt{w_{11}}, ..., d\sqrt{w_{pp}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{diag}\left(\frac{dw_{11}}{\sqrt{w_{11}}}, ..., \frac{dw_{pp}}{\sqrt{w_{pp}}}\right)$$

因此：

$$C^{-1}dC = dC\, C^{-1} = \frac{1}{2}\mathrm{diag}\left(\frac{dw_{11}}{w_{11}}, ..., \frac{dw_{pp}}{w_{pp}}\right)$$

所以 (1) 式右端的对角线为 $\mathrm{diag}\left(\frac{dw_{11}}{w_{11}}, ..., \frac{dw_{pp}}{w_{pp}}\right)$，其外积为：

$$\prod_{i=1}^{p} w_{ii}^{-1} \bigwedge_{i=1}^{p} dw_{ii} \bigwedge_{i<j} dr_{ij} \tag{3}$$

令 (2)=(3)，我们得到：

$$\prod_{i=1}^{p} w_{ii}^{-(p+1)/2}(dW) = \prod_{i=1}^{p} w_{ii}^{-1} \bigwedge_{i=1}^{p} dw_{ii} \bigwedge_{i<j} dr_{ij}$$

整理得：

$$(dW) = \prod_{i=1}^{p} w_{ii}^{(p-1)/2} \bigwedge_{i=1}^{p} dw_{ii} \bigwedge_{i<j} dr_{ij}$$

所以 Jacobian 绝对值为 $J(W \to w_{ii}, r_{ij}) = \prod_{i=1}^{p} w_{ii}^{(p-1)/2}$。

现在，根据多元随机变量的密度变换法则，求出联合密度 $f(R, w_{11}, \ldots, w_{pp})$：

$$\begin{aligned}
f(R, w_{11}, \ldots, w_{pp}) &= f_W(D^{1/2} R D^{1/2}) \cdot J \\
&= \frac{1}{2^{mp/2}\Gamma_p(m/2)} \left[\left(\prod_{i=1}^{p} w_{ii} \right) |R| \right]^{(m-p-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} w_{ii} \right) \prod_{i=1}^{p} w_{ii}^{(p-1)/2} \\
&= \frac{1}{2^{mp/2}\Gamma_p(m/2)} |R|^{(m-p-1)/2} \prod_{i=1}^{p} \left[w_{ii}^{(m-2)/2} \exp\left(-\frac{1}{2} w_{ii} \right) \right]
\end{aligned}$$

为了得到边缘概率密度函数 $f(R)$，我们需要对所有的 $w_{ii} \in (0, \infty)$ 进行积分。注意到连乘积中的每一项关于 w_{ii} 的积分实际上与 Gamma 分布的核相对应：

$$\int_0^\infty w_{ii}^{(m-2)/2} \exp\left(-\frac{1}{2} w_{ii} \right) dw_{ii} = \Gamma(m/2) 2^{m/2}$$

将 p 个积分项累乘：

$$\begin{aligned}
f(R) &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(R, w_{11}, \ldots, w_{pp}) dw_{11} \ldots dw_{pp} \\
&= \frac{1}{2^{mp/2}\Gamma_p(m/2)} |R|^{(m-p-1)/2} \prod_{i=1}^{p} \left(\Gamma(m/2) 2^{m/2} \right) \\
&= \frac{2^{mp/2} (\Gamma(m/2))^p}{2^{mp/2}\Gamma_p(m/2)} |R|^{(m-p-1)/2} \\
&= \frac{(\Gamma(m/2))^p}{\Gamma_p(m/2)} |R|^{(m-p-1)/2}
\end{aligned}$$

这就是在 Wishart 矩阵对角元给定下生成的样本相关系数矩阵的边缘密度。故得证。