

## 1.4 HW 4

## 作业 4 链接

练习 1.1 假设  $W_1 \sim W_p(m, \Sigma)$ ,  $W_2 \sim W_p(n, \Sigma)$ , 且  $W_1 \perp W_2$ , 证明  $W_1 + W_2 \sim W_p(m+n, \Sigma)$ 。

解 由 Wishart 分布的定义和  $W_1 \perp W_2$ , 存在随机向量  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}_p(0, \Sigma)$ , 使得  $W_1 = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top$ ,  $W_2 = \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j \mathbf{y}_j^\top$ 。那么  $W_1 + W_2 = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top + \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j \mathbf{y}_j^\top$ , 由定义可知  $W_1 + W_2 \sim W_p(m+n, \Sigma)$ 。

练习 1.2 假设二维随机向量  $z_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ ,  $i = 1, \dots, m$  iid  $\sim \mathcal{N}_2(0, I_2)$ , 记  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^\top$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^\top$ , 令

$$W = \sum_{i=1}^m z_i z_i^\top = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i & \sum_{i=1}^m y_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^\top \mathbf{x} & \mathbf{x}^\top \mathbf{y} \\ \mathbf{x}^\top \mathbf{y} & \mathbf{y}^\top \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

$2 \times 2$  对称矩阵  $W$  的概率密度指的是  $\{w_{11}, w_{12}, w_{22}\}$  的联合概率密度 (按 Wishart 分布的定义  $W$  服从  $W_2(m, I_2)$  分布)。为了解该分布, 令

$$w_{11.2} = w_{11} - \frac{w_{12}^2}{w_{22}}.$$

下述步骤 (a)-(e) 求解  $\{w_{11.2}, w_{12}, w_{22}\}$  的联合概率密度函数。

- 证明  $w_{11} \sim \chi_m^2$ ,  $w_{22} \sim \chi_m^2$ , 并且它们独立。
- 证明  $w_{12}|\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(0, w_{22})$ , 由此证明 (引理 2)  $w_{12}|w_{22} \sim \mathcal{N}(0, w_{22})$ 。进一步, 证明  $w_{12}/\sqrt{w_{22}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , 且与  $w_{22}$  独立。
- 记投影矩阵  $P_y = \mathbf{y}\mathbf{y}^\top/\|\mathbf{y}\|^2$ , 验证  $w_{11.2} = \mathbf{x}^\top(I_m - P_y)\mathbf{x}$ , 并利用该表达式证明  $w_{11.2} \sim \chi_{m-1}^2$  以及  $w_{11.2} \perp w_{22}$ 。
- 利用 (c) 的表达式, 证明  $w_{11.2} \perp w_{12}|\mathbf{y}$ , 并由此证明  $w_{11.2} \perp w_{12}$ 。
- 至此, 我们证明了

$$w_{11.2} \sim \chi_{m-1}^2, \quad w_{22} \sim \chi_m^2, \quad w_{12}/\sqrt{w_{22}} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

利用上述事实, 求  $\{w_{11.2}, w_{12}, w_{22}\}$  的联合概率密度。

- 利用 (e) 的结果, 求  $\{w_{11.2}, w_{12}, w_{22}\}$  的联合概率密度函数。

解

- 由卡方分布的定义, 以及  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$  即得。
- 取定  $\mathbf{y}$  时, 由正态分布的性质,  $w_{12}|\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(0, \|\mathbf{y}\|^2)$ , 即  $w_{12}|\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(0, w_{22})$ 。由此, 由引理 2 可知  $w_{12}|w_{22} \sim \mathcal{N}(0, w_{22})$ 。进而  $w_{12}/\sqrt{w_{22}}|w_{22} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , 这与  $w_{22}$  的取值无关。因此  $w_{12}/\sqrt{w_{22}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , 且与  $w_{22}$  独立。
- $\mathbf{x}^\top(I_m - P_y)\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{y}\mathbf{y}^\top \mathbf{x}/\|\mathbf{y}\|^2 = w_{11} - w_{12}^2/w_{22} = w_{11.2}$ 。取定  $\mathbf{y}$ , 则  $I_m - P_y$  为常数矩阵, 利用 Cochran 定理, 可证明  $w_{11.2}|\mathbf{y} \sim \chi_{m-1}^2$ , 与  $\mathbf{y}$  无关。因此  $w_{11.2} \sim \chi_{m-1}^2$  且  $w_{11.2} \perp \mathbf{y}$ , 显然  $w_{11.2} \perp w_{22}$  也成立。
- 取定  $\mathbf{y}$ , 由于  $(I_m - P_y)\mathbf{y} = 0$ , 因此  $\mathbf{y}^\top \mathbf{x} \perp (I_m - P_y)\mathbf{x}|\mathbf{y}$ 。由此可知  $w_{11.2} \perp w_{12}|\mathbf{y}$ 。又由于  $w_{11.2} \perp \mathbf{y}$ , 故  $w_{11.2} \perp w_{12}$ 。
- 由前面的结论, 我们有:

$$\begin{aligned} p(w_{11.2}, w_{12}, w_{22}) &= p(w_{11.2})p(w_{22})p(w_{12} | w_{22}) \\ &= \frac{w_{11.2}^{(m-1)/2-1} \exp(-\frac{w_{11.2}}{2})}{2^{(m-1)/2} \Gamma((m-1)/2)} \cdot \frac{w_{22}^{m/2-1} \exp(-\frac{w_{22}}{2})}{2^{m/2} \Gamma(m/2)} \cdot \frac{\exp(-\frac{w_{12}^2}{2w_{22}})}{\sqrt{2\pi w_{22}}} \\ &= \frac{w_{11.2}^{(m-1)/2-1} w_{22}^{(m-1)/2-1} \exp(-\frac{w_{11.2} + w_{22}}{2} - \frac{w_{12}^2}{2w_{22}})}{2^m \Gamma((m-1)/2) \Gamma(m/2) \sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

(f) 容易得到雅可比行列式为：

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2w_{12}}{w_{22}} & \frac{w_{12}^2}{w_{22}^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

因此  $\{w_{11}, w_{12}, w_{22}\}$  的联合分布为：

$$\begin{aligned} p(W) &= p(w_{11}, w_{12}, w_{22}) = \frac{(w_{11}w_{22} - w_{12}^2)^{(m-3)/2} \exp(-\frac{1}{2}(w_{11} + w_{22}))}{2^m \sqrt{\pi} \Gamma(m/2) \Gamma((m-1)/2)} \\ &= \frac{|W|^{(m-3)/2} \exp(-\frac{1}{2}\text{tr}(W))}{2^m \sqrt{\pi} \Gamma(m/2) \Gamma((m-1)/2)}. \end{aligned}$$

 **练习 1.3** 证明第 8 讲 P11 定理 4。

**解** 参考第 8 讲中的证明过程。

 **练习 1.4** 假设  $W \sim W_p(m)$ ,  $m \geq p$ , 试证明如下结论。

(a)  $\text{tr}(W) \sim \chi_{mp}^2$ 。

(b)  $|W| \stackrel{d}{=} \prod_{i=1}^p \chi_{m-p+i}^2$  (提示:  $|W| = |W_{11 \cdot 2}| \times |W_{22}|$ )

**解**

(a) 由 Wishart 分布的定义, 存在随机向量  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \stackrel{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}_p(0, I_p)$ , 使得  $W = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top$ 。故  $\text{tr}(W) =$

$$\text{tr}\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top\right) = \sum_{i=1}^m \text{tr}(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top) = \sum_{i=1}^m \text{tr}(\mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_i) \sim \chi_{mp}^2。$$

(b) 划分  $W = \begin{pmatrix} w_{11} & \mathbf{w}_{12} \\ \mathbf{w}_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$ , 其中左上角为标量, 则

$$|W| = w_{11 \cdot 2} |W_{22}|, \quad w_{11 \cdot 2} \sim \chi_{m-p+1}^2$$

进一步划分  $W_{22}$ , 递归得证。