hw5

5.1

假设 $\mathbf{x}_{11}, \ldots, \mathbf{x}_{1n_1}$ iid $\sim N_p(\mu_1, \Sigma), \mathbf{x}_{21}, \ldots, \mathbf{x}_{2n_2}$ iid $\sim N_p(\mu_2, \Sigma)$, 两组样本独立, 两组的样本均值分别是 $\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2$, 样本方差矩阵分别是 S_1, S_2 。定义 $S_{\text{pooled}} = [(n_1-1)S_1 + (n_2-1)S_2]/(n-2), n = n_1+n_2$ 。考虑两样本检验问题 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \mathbf{0}_{p\times 1}$, 两样本 Hotelling T^2 检验统计量定义为

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\overline{\mathbf{x}}_1 - \overline{\mathbf{x}}_2)^\top S_{\text{pooled}}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}_1 - \overline{\mathbf{x}}_2).$$

另一方面, 两样本问题作为多组 MANOVA 的最简单的情况, 其检验也可使用 MANOVA 的 Wilks 检验 $\Lambda^* = |W|/|W+B|(W, B$ 的定义, 第 9 讲 P3), 试验证

$$-n\log\Lambda^* = n\log\left(1 + T^2/(n-2)\right).$$

Solution:
根据定义可知

$$\begin{aligned} W &= \sum_{k=1}^{2}(n_k-1)S_k = (n-2)S_{\text{pooled}}, \\ B &= \sum_{k=1}^{2} n_k(\bar{x}_k - \bar{x})(\bar{x}_k - \bar{x})^\top \\ &= \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^\top. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^* &= \frac{|W|}{|W+B|} = \frac{1}{|I + W^{-1}B|} = \left| I + \frac{n_1 n_2}{(n-2)(n_1+n_2)}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^\top S_{\text{pooled}}^{-1} \right|^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{n_1 n_2}{(n-2)(n_1+n_2)}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^\top S_{\text{pooled}}^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{T^2}{n-2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

所以

$$-n\log\Lambda^* = n\log\left(1 + T^2/(n-2)\right).$$

■

5.2

假设 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ iid $\sim N_p(\mu, \Sigma)$, 我们考虑如下球对称假设

$$H_0: \Sigma = \gamma I_p, \gamma > 0 \text{ (未知)},$$

记号 S 为样本协方差矩阵, 似然比统计量 $\Lambda = \frac{\max L(\mu, \gamma I_p)}{\max L(\mu, \Sigma)}$ 。
(a) 证明 Wilks 统计量

$$\Lambda^* = \Lambda^{2/n} = \frac{\det(S)}{(\operatorname{tr}(S)/p)^p}$$

(b) 已知 $-2\log(\Lambda) = -n\log(\Lambda^*) \xrightarrow{d} \chi_f^2$, 求出自由度 f 。
Solution:
(a) 似然函数为

$$L(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\Sigma|^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^\top \Sigma^{-1}(x_i - \mu)\right).$$

对 μ 和 Σ 求导可以得到极大似然估计

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x},$$
$$\hat{\Sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\hat{\mu}\right)\left(x_i-\hat{\mu}\right)^{\top}=\frac{n-1}{n}S.$$

在原假设 $H_0:\Sigma=\gamma I_p$ 下，对 μ 和 γ 求导可以得到极大似然估计

$$\hat{\mu}_0=\bar{x},$$
$$\hat{\gamma}_0=\frac{1}{np}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(x_i-\bar{x}\right)^{\top}=\frac{n-1}{np}\operatorname{tr}(S).$$

所以似然比统计量为

$$\Lambda=\frac{\max L\left(\mu,\gamma I_p\right)}{\max L(\mu,\Sigma)}=\frac{L\left(\hat{\mu}_0,\hat{\gamma}_0 I\right)}{L(\hat{\mu},\hat{\Sigma})}=\left(\frac{p^p\det(S)}{\operatorname{tr}^p(S)}\right)^{n/2}$$

可得

$$\Lambda^*=\Lambda^{2/n}=\frac{\det(S)}{(\operatorname{tr}(S)/p)^p}$$

(b) 根据 Wilks 定理可得

$$f=\dim(\Theta)-\dim\left(\Theta_0\right)=\left(p+\frac{p(p+1)}{2}\right)-(p+1)=\frac{p(p+1)}{2}-1.$$

■

5.3

假设 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ iid $\sim N_p(\mu,\Sigma), p>1$, 样本均值和方差分别是 $\overline{\mathbf{x}}, S$ 。考虑原假设 $H_0:\mu=\mu_0, \mu_0$ 已知。如果将数据和参数向一维投影方向投影, 利用投影坐标构建一元检验统计量, 效果如何? 对 $\forall\mathbf{a}\in S^{p-1}$, 考虑

$$H_0(\mathbf{a}):\mathbf{a}^{\top}\boldsymbol{\mu}=\mathbf{a}^{\top}\mu_0,$$

因为 $y_1=\mathbf{a}^{\top}\mathbf{x}_1,\ldots,y_n=\mathbf{a}^{\top}\mathbf{x}_n$ iid $\sim N_1\left(\mathbf{a}^{\top}\boldsymbol{\mu},\mathbf{a}^{\top}\Sigma\mathbf{a}\right), \bar{y}=\mathbf{a}^{\top}\overline{\mathbf{x}}, s_y^2=\mathbf{a}^{\top}S\mathbf{a}$, 因此 $H_0(\mathbf{a})$ 的 t 检验统计量

$$t(\mathbf{a})=\frac{\sqrt{n}\left(\bar{y}-\mathbf{a}^{\top}\boldsymbol{\mu}_0\right)}{s_y}=\frac{\sqrt{n}\left(\mathbf{a}^{\top}\overline{\mathbf{x}}-\mathbf{a}^{\top}\boldsymbol{\mu}_0\right)}{\sqrt{\mathbf{a}^{\top}S\mathbf{a}}}\overset{H_0(\mathbf{a})}{\sim}t_{n-1}.$$

对所有 $\mathbf{a}$, 我们取最显著的一个结果, 即取 $t_{\max}^2=\max_{\mathbf{a}\in S^{p-1}}|t(\mathbf{a})|^2$ 作为 H_0 的检验统计量。证明

$$t_{\max}^2=n\left(\overline{\mathbf{x}}-\mu_0\right)^{\top}S^{-1}\left(\overline{\mathbf{x}}-\mu_0\right).$$

<u>**Solution:**</u>

$$t^2(a)=n\frac{a^{\top}\left(\bar{x}-\mu_0\right)\left(\bar{x}-\mu_0\right)^{\top}a}{a^{\top}Sa}$$

令 $u=S^{1/2}a$，根据 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\begin{aligned}t^2(a)&=n\frac{u^{\top}S^{-\frac{1}{2}}\left(\bar{x}-\mu_0\right)\left(\bar{x}-\mu_0\right)^{\top}S^{-\frac{1}{2}}u}{u^{\top}u}\\&=n(\frac{u}{||u||})^{\top}S^{-\frac{1}{2}}\left(\bar{x}-\mu_0\right)\left(\bar{x}-\mu_0\right)^{\top}S^{-\frac{1}{2}}(\frac{u}{||u||})\\&\leq n(\frac{u}{||u||})^{\top}(\frac{u}{||u||})\left(\bar{x}-\mu_0\right)^{\top}S^{-1}\left(\bar{x}-\mu_0\right)\\&=n\left(\bar{x}-\mu_0\right)^{\top}S^{-1}\left(\bar{x}-\mu_0\right)\end{aligned}$$

■