1. 假设 2×2 随机矩阵 $W=\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22}\end{pmatrix}\sim W_2(m)$, $m\geq 2$。（注：(a),(b),(c) 没有相承关系）
   (a) 证明 w_{11}, w_{22} iid $\sim \chi^2_m$.
   (b) 令 $\xi=(w_{11}+w_{22})/2+w_{12}, \eta=(w_{11}+w_{22})/2-w_{12}$, 证明 $\xi,\eta\ iid\sim\chi^2_m$.
   (c) 证明 $\frac{2(w_{11}w_{22}-w_{12}^2)}{w_{11}+w_{22}-2w_{12}}\sim\chi^2_{m-1}$.
2. 假设 $W\sim W_p(m), \mathbf{z}\sim N_p(0,I_p)$, 两者独立，证明
$$\mathbf{z}^\top\mathbf{z}\left(1+\frac{1}{\mathbf{z}^\top W^{-1}\mathbf{z})}\right)\sim\chi^2_{m+1}.$$
3. 假设 $W\sim W_p(m,\Sigma)$，$\Sigma>0$.
   (a) 证明 $E(W)=m\Sigma$。
   (b) 假设 $m>p+1$，对任何常数向量 $\mathbf{t}\in S^{p-1}$ (即 $\|\mathbf{t}\|=1$), 求 $E(\mathbf{t}^\top W^{-1}\mathbf{t})$。
   (c) 假设 $m>p+1$，证明 $E(W^{-1})=\frac{1}{m-p-1}\Sigma^{-1}$。
4. 假设 $W\sim W_p(m,\Sigma)$, $A_{k\times p}$ 是行满秩常数矩阵，证明
$$(AW^{-1}A^\top)^{-1}\sim W_k(m-p+k,(A\Sigma^{-1}A^\top)^{-1}).$$
   (提示: 先证明 $\Sigma=I_p$ 情形，参考第 8 讲定理 4(2))。
5. （选）假设 $W=(w_{ij})\sim W_p(m)$, 考虑 (Galton) 相关系数矩阵 $R=(r_{ij}), r_{ij}=\frac{w_{ij}}{\sqrt{w_{ii}w_{jj}}}$, 试基于 Wishart 分布的概率密度以及变换：
$$\{w_{ij}, i\leq j\}\ \rightarrow\ \{r_{ij}, i<j; w_{11},\dots,w_{pp}\}$$
   的 Jacobian, 证明 R 的概率密度函数 (上三角 $p(p-1)/2$ 个元素的联合分布)
$$f(R)=\frac{(\Gamma(m/2))^p}{\Gamma_p(m/2)}|R|^{(m-p-1)/2}.$$
   其中 $\Gamma_p(x)=\pi^{p(p-1)/4}\prod_{i=1}^p\Gamma(x-(i-1)/2)$。

   注：该结果的重要特殊情况：

   - 当 $p=2$ 时，这是二元正态相关系数为 0 时的 Galton 相关系数的分布，记 $r=r_{12}$,
$$f(r)=\frac{\Gamma(m/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma((m-1)/2)}(1-r^2)^{(m-3)/2}, |r|\leq 1.$$
     该分布与 $\mathbf{u}\sim U(S^{m-1})$ 的分量 u_1 的分布相同。
   - 当 $p=3$ 时，(r_{12},r_{13},r_{23}) 的联合概率密度为
$$f(R)=f(r_{12},r_{13},r_{23})=\frac{\Gamma(m/2)^2}{\pi^{3/2}\Gamma((m-1)/2)\Gamma((m-2)/2)}(1-r_{12}^2-r_{13}^2-r_{23}^2+2r_{12}r_{13}r_{23})^{(m-4)/2},$$
$$1-r_{12}^2-r_{13}^2-r_{23}^2+2r_{12}r_{13}r_{23}\geq 0.$$