第二讲 球对称分布

2025.2.26

$$\mathbf{x} \sim N_n(0, I_n) \Rightarrow \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \sim U(S^{n-1})$$

Recap

- 人类生活在3维空间，只能看到2维；
- 人类难以相像或用语言描述4维及以上空间；
- 数学语言（多变量微积分）提供了研究高维空间的工具；
- 高维几何体上赋予均匀概率分布等价于通常的黎曼积分：

  几何体上的概率 $\propto$ 几何体的体积
- 当概率计算过于复杂或无法计算时，可采用蒙特卡洛抽样方法进行实验。

通过蒙特卡洛实验或概率分布公式，得到了高维球的如下性质：

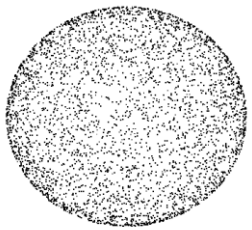
- 球体的体积大多集中于球表面附近；
- 球体表面积大多集中于赤道附近；
- $U(S^{n-1}) \xrightarrow{n-2\text{维投影}} U(B^{n-2})$

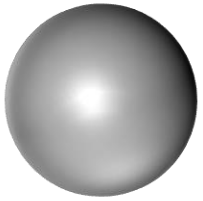
  $U(S^2)$的1维投影均匀分布
  $U(S^4)$的3维投影均匀分布

S^{n-1}上均匀随机点的2维投影

点多的地方表示弯曲度较大.
光线照射时，边缘弯曲处不反光，光线暗淡

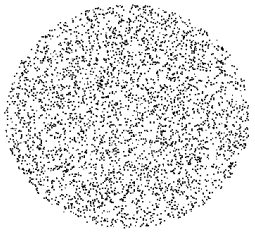
$U(S^2)$的2维投影($n=3$)

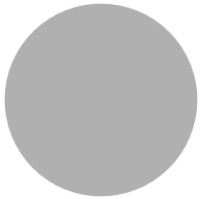




边界处暗淡, 中心明亮，这是现实世界的球。

$U(S^3)$的2维投影($n=4$)





4维球的球面在人类看来（即2维投影）处处平坦，感觉不到弯曲。圆盘。

$U(S^{99})$的2维投影($n=100$)

100维球的球面中心向远离我们的方向凹陷（边界处明亮，中间暗淡）。碗。

贝特朗悖论

贝特朗悖论

贝特朗悖论(Bertrand Paradox)是概率论中一个有趣的现象。对同一个几何概率问题，法国数学家Joseph Bertrand（1822-1900）给出了几个都看似合理但互相冲突的概率计算结果。问题的根源在于对几何体（弦）的概率理解不同，对单位圆内的“随机性或均匀性” 做了不同的假设。

贝特朗悖论问题通常如下描述：随机选取二维平面上单位圆的一条弦，其长度大于 圆内接等边三角形边长 $\sqrt{3}$ 的概率是多少？

通常“随机选取” 是“均匀、等概率地选取”的意思。比如在圆内“随机选取一个点”实际上是假设选取的点在服从单位圆内的均匀分布。 但“随机选取一条弦”的含义不明确，这里选取的是几何体，是点的集合，不同的理解可导致三个不同的计算结果，参见：

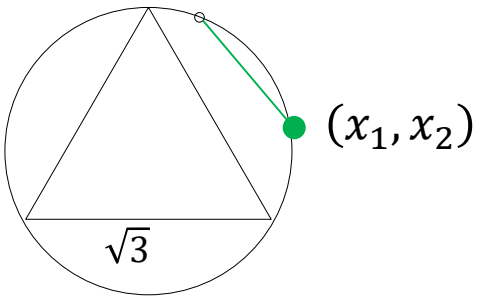
- 苏淳,冯群强 (2020) 概率论，P29.
- https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_paradox_(probability)。

单位圆内任意一点的极坐标表示:

$$(x_1, x_2) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big), 0 < r \le 1, 0 < \theta \le 2\pi$$

下面叙述贝特朗悖论问题的三种解法。

解法1：在圆周上随机地选取两个点构成一个短弧，若弧的长度大于$2\pi/3$，则对应的弦长大于$\sqrt{3}$。总弧长为2π，故所求概率为$\frac{2\pi/3}{2\pi} = 1/3$.



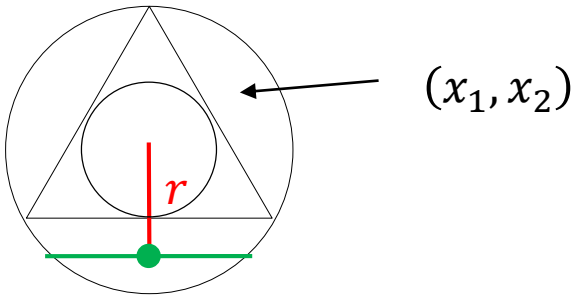
评注：解法1将随机性局限于圆周上，实际上假设了“选取的弦的两个端点服从圆周上的均匀分布”，这等价于（为什么？）“一个端点固定，另一个端点均匀地分布于圆周”：

$$(x_1, x_2) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \sim U(S^1),$$

这等价于

$$\theta \sim U(0,2\pi), \quad r \equiv 1$$

解法2：作半径为1/2的同心圆，其外接等边三角形的边长为$\sqrt{3}$。在单位圆内随机地取一个点(x_1, x_2)，垂直于该径向作一条弦（绿色）。若该点落在半径1/2的圆的内部，则绿色弦长大于$\sqrt{3}$。 故所求概率为小圆与大圆面积之比，即1/4。



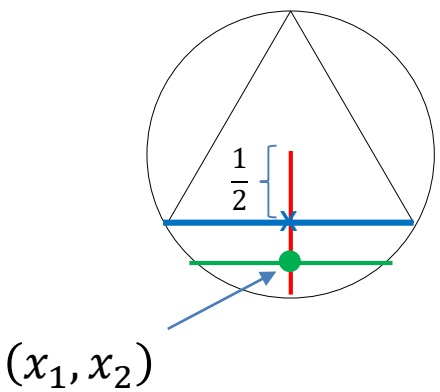
评注：解法2认为“随机取一条弦”的意思是“随机取弦的中点”，概率由两个圆的面积之比得到，这实际上假设了弦的中点在圆内均匀分布：

$$(x_1, x_2) \sim U(B^2),$$

容易计算此时极坐标满足：

- $\theta \sim U(0,2\pi)$,
- $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sim \sqrt{U(0,1)}$

解法3：任意随机取一个半径（红线），其中点x处与半径垂直的弦（蓝色）的长度是$\sqrt{3}$，在半径上随机地取一个点(x_1, x_2)（绿色），垂直于径向作绿色弦。若该点在中点x的上方，则弦长大于$\sqrt{3}$。我们认为绿色点落在中点x的上方和下方等可能的，故所求概率为1/2



评注：解法3假设了径向r和角度θ分别均匀：

- $\theta \sim U(0,2\pi)$，
- $r \sim U(0,1)$，其密度$p(r) = 1_{(0<r<1)}$

由此可得(x_1, x_2)的密度

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

选取的点(x_1, x_2)并不在圆内均匀分布.

上述三种解法对于点$(x_1, x_2) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$的随机性都假设了方向均匀，即$\theta \sim U(0,2\pi)$， 但模长$r$的分布假设却各有不同（不同的beta分布，参见下页表格）。

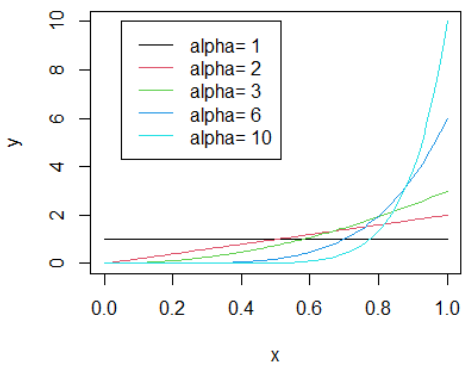
	$\boldsymbol{q}(\theta)$	$\boldsymbol{p}(r)$	$f(\mathbf{x}) = p(\|\mathbf{x}\|)/(2\pi\|\mathbf{x}\|)$
解法1	$U(0,2\pi)$	$\delta_1(r)$ ， Beta(∞,1)	$\frac{1}{2\pi}1_{(x_1^2+x_2^2=1)}$
解法2	$U(0,2\pi)$	$\sqrt{U(0,1)}$， Beta(2,1)	$\frac{1}{\pi}1_{(x_1^2+x_2^2\le 1)}$
解法3	$U(0,2\pi)$	$U(0,1)$， Beta(1,1)	$\frac{1}{2\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2}}1_{(x_1^2+x_2^2\le 1)}$

注1： Beta(α,1)的密度

$$p_\alpha(r) = \alpha r^{\alpha-1}, 0 < r < 1,$$

如右图，$\alpha \to \infty$时，$p_\alpha(r) \to \delta_1(r) = \begin{cases} 1, r = 1 \\ 0, r \neq 1 \end{cases}$

从解法3到解法1，α从1到∞，$r = \|\mathbf{x}\|$在1附近的概率质量越来越大。



注2：解法 3中r,θ都 均匀，此时 $\mathbf{x}$ 在0点概率质量无穷大（奇点）：

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2}}1_{(x_1^2+x_2^2\le 1)}$$

Bertrand例子的三个解法都假设了角度均匀（球面均匀，各向同性），即各个方向上概率相同，这符合人们对“完全随机”的理解。但径向长度（模长）的分布有不同的取法，从而导致圆内随机选取的绿色点（随机向量）的分布有三种不同的形式。

高维情况下随机向量的这种各向同性称为球对称(spherically symmetric)、方向均匀、正交不变、旋转不变，球对称随机向量的概率分布完全由径向分布决定。

在保持角度均匀/球面均匀情况下，改变$\mathbf{x}$的模长$\|\mathbf{x}\|$ 的分布能生成各种球对称分布, 比如$N_n(0, \sigma^2 I_n)$。

球对称分布

$\overset{d}{=}$ 等分布

球对称分布

定义(球对称分布). $\mathbf{x}$是$n \times 1$随机向量，若对任何n阶正交矩阵H有$H\mathbf{x} \overset{d}{=} \mathbf{x}$, 则称$\mathbf{x}$服从球对称分布。

其它名称：球对称/球等高/正交不变/旋转不变分布，Spherically symmetric distribution, spherically contoured distribution, orthogonally invariant distribution, rotationally invariant distribution

R^1中的球对称分布：0对称分布 (1阶正交矩阵只有1和-1)

例1（一元球对称分布⇔关于0分布对称）.

若 x关于0对称分布，即$x \overset{d}{=} -x$，因为1阶正交矩阵只有1和-1，所以x球对称。此外，容易验证，若$P(x=0)=0$，则符号$u = x/|x|$与长度$|x|$独立, 且$u \sim U\{\pm 1\}$。

常见的球对称分布

- $N_n(0,\sigma^2 I_n)$， $f(\mathbf{x}) = \frac{1)}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2\sigma^2}$
- $U(B^n(R))$， $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|B^n(R)|} = \frac{\Gamma(1+n/2)}{\pi^{n/2}R^n}, \|\mathbf{x}\| \le R$
- $U(S^{n-1})$（无密度 ）
- n元t分布(自由度k)： $f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma((n+k)/2)}{(k\pi)^{n/2}\Gamma(k/2)} (1+\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{k})^{-\frac{n+k}{2}}, \mathbf{x} \in R^n$
  ($n=1$时为一元student's t分布; $k=1$时为n元Cauchy分布)
- n元Cauchy分布： $f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} (1+\|\mathbf{x}\|^2)^{-\frac{n+1}{2}}, \mathbf{x} \in R^n$.

命题1. 若$\mathbf{x}$有概率密度函数$f(\mathbf{x})$，且$f(\mathbf{x})$仅依赖于$\|\mathbf{x}\|$，即存在一元函数h使得

$$f(\mathbf{x}) = h(\|\mathbf{x}\|)$$

则$\mathbf{x}$服从球对称分布。

命题2. 球面均匀分布（无概率密度）是球对称分布，即若$\mathbf{u} \sim U(S^{n-1})$，则对任何正交矩阵$H$，$H\mathbf{u} \sim U(S^{n-1})$.

证明：对任何$S_0 \subset S^{n-1}$和正交矩阵H，$|H^{\mathsf{T}} S_0| = |S_0|$（正交变换的Jacobian $=1$），

则$P(H\mathbf{u} \in S_0) = P(\mathbf{u} \in H^{\mathsf{T}} S_0) = |H^{\mathsf{T}} S_0| / |S^{n-1}| = |S_0| / |S^{n-1}| = P(\mathbf{u} \in S_0)$。

定理1. 假设$\mathbf{x}$服从球对称分布，具有概率密度函数$f(\mathbf{x}) = h(\|\mathbf{x}\|)$，其中$h$是一个一元函数。令$\mathbf{u} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$， 则

$$\mathbf{u} \sim U(S^{n-1}), \quad \mathbf{u}\text{与}\|\mathbf{x}\|\text{独立},$$

且$\|\mathbf{x}\|$的概率密度函数为

$$p(r) = |S^{n-1}| h(r) r^{n-1}, r > 0,$$

其中$|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{n.2}}{\Gamma(n/2)}$为单位球面$S^{n-1}$的面积。

证明：记 $r = \|\mathbf{x}\|$。应用球坐标变换$\mathbf{x} \to (r, \boldsymbol{\theta}) = (r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \in D_n$，

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos(\theta_1) \triangleq ru_1 \\
x_2 &= r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \triangleq ru_2 \\
&\dots \\
x_{n-1} &= r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{n-2})\ \cos(\theta_{n-1}) \triangleq ru_{n-1} \\
x_n &= r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{n-2})\ \sin(\theta_{n-1}) \triangleq ru_n
\end{aligned}$$

其中$\mathbf{u} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\| = (\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)\cos(\theta_2), \dots, \sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{n-1}))^\top$

由第一讲引理1，变换的Jacobian

$$J = J(\mathbf{x} \to (r, \boldsymbol{\theta})) = r^{n-1}\sin^{n-2}(\theta_1)\sin^{n-3}(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-2})$$

则$(r, \boldsymbol{\theta})$的概率密度

$$p(r, \boldsymbol{\theta}) = h(r) \times J = h(r) \times r^{n-1}\sin^{n-2}(\theta_1)\sin^{n-3}(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-2}), (r, \boldsymbol{\theta}) \in D_n$$

这表明$r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$相互独立，而$\mathbf{u} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\| = \mathbf{x}/r$仅与$\theta'$s有关，

所以$\|\mathbf{x}\|$ 独立。

因为

$$|S^{n-1}| = \int_{D_n} \sin^{n-2}(\theta_1)\sin^{n-3}(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-2})\, d\boldsymbol{\theta} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

我们将$p(r, \boldsymbol{\theta})$分解成两个密度$p(r), q(\boldsymbol{\theta})$的乘积:

$$p(r, \boldsymbol{\theta}) = [|S^{n-1}|h(r)r^{n-1}] \times \left[\frac{1}{|S^{n-1}|}\sin^{n-2}(\theta_1)\sin^{n-3}(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-2})\right]$$

$$\triangleq p(r) \times q(\boldsymbol{\theta})$$

两个方括号内分别是$r, \boldsymbol{\theta}$的概率密度$p(r), q(\boldsymbol{\theta})$，即$r$的概率密度为

$$p(r) = |S^{n-1}|h(r)r^{n-1},$$

$q(\boldsymbol{\theta})$是球面均匀分布的极坐标下的分布密度，对任何$S_0 \subset S^{n-1}$

$$P(\mathbf{u} \in S_0) = \int_{\mathbf{u}\in S_0} q(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}$$

$$= \int_{\mathbf{u}\in S_0} \frac{1}{|S^{n-1}|} \sin^{n-2}(\theta_1) \sin^{n-3}(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2})\ d\boldsymbol{\theta}$$

$$= \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S_0} d\sigma = \frac{1}{|S^{n-1}|} |S_0|,$$

单位球面的面积元（第一讲引理1）

$d\sigma = \sin^{n-2}(\theta_1)\sin^{n-3}(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2})\, d\boldsymbol{\theta}$

所以$\mathbf{u} \sim U(S^{n-1})$.

模长分布决定球对称分布

模长分布和球对称分布的一一对应关系：

已知$\mathbf{x} \sim f(\mathbf{x}) = h(||\mathbf{x}||) \Rightarrow ||\mathbf{x}|| \sim p(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} h(r) r^{n-1}$

已知$||\mathbf{x}|| \sim p(r) \Rightarrow \mathbf{x} \sim f(\mathbf{x}) = h(||\mathbf{x}||) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) p(||\mathbf{x}||)}{2\pi^{n/2} ||\mathbf{x}||^{n-1}}$

定理1的证明过程蕴含了极坐标的如下结论：

极坐标的分布

推论1. 假设假设$\mathbf{x}$服从球对称分布，$\mathbf{x}$的球坐标变换

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in R^n \to (r, \boldsymbol{\theta}) \in D_n,$$

$0 < r \le 1, 0 < \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \le \pi, 0 < \theta_{n-1} \le 2\pi$。我们有

a) $r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ 相互独立。

b) $r \sim p(r) = |S^{n-1}| h(r) r^{n-1}, r > 0.$

c) $\theta_k \sim p_k(\theta_k) \propto \sin^{n-k-1}(\theta_k)$, $k = 1, \dots, n-1,$

特别地,$\theta_{n-1} \sim U(0, 2\pi)$.

注意，除了$\theta_{n-1} \sim U(0, 2\pi)$， 其它角度都不服从均匀分布$U(0, \pi)$

贝特朗悖论中三种解法都假设了从圆盘中随机选取一个服从球对称分布的点$\mathbf{x}$（$n = 2$）, 三种解法分别假设模长$||\mathbf{x}||$服从[0,1]区间上的三种beta分布。

球对称分布随机向量的极分解

推论2（球对称随机向量的极分解）： $\mathbf{x}$服从球对称分布

$\Leftrightarrow$ 存在随机向量$\mathbf{u}\in S^{n-1}$和随机变量r,使得

$\mathbf{x}\overset{d}{=}\mathbf{u}r,\ \mathbf{u}\perp\!\!\!\perp r,\ \mathbf{u}\sim U(S^{n-1}),\ \ r\overset{d}{=}\|\mathbf{x}\|$。

这种方向$\mathbf{u}$乘以长度r的分解叫做“极分解”

证明：（$\Rightarrow$）若$\mathbf{x}$服从球对称分布，令$\mathbf{u}=\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$，$r=\|\mathbf{x}\|$

则$\mathbf{x}=\mathbf{u}r$，由定理1知$\mathbf{u}\sim U(S^{n-1})$。

（$\Leftarrow$）若$\mathbf{x}\overset{d}{=}\mathbf{u}r$,因为$\mathbf{u}\sim U(S^{n-1})$正交不变，所以对任何正交矩阵$H$,

$H\mathbf{x}\overset{d}{=}H\mathbf{u}r\overset{d}{=}\mathbf{u}r\overset{d}{=}\mathbf{x}$，即$\mathbf{x}$分布正交不变，所以$\mathbf{x}$服从球对称分布。

模长$\|\mathbf{x}\|$的一元分布$p(r)$唯一决定了$\mathbf{x}$的多元球对称分布$f(\mathbf{x})$ 。不同的一元分布 $p(r), r>0$ (比如beta, gamma, χ等 分布）导致不同的球分布。

作为球对称分布的重要例子，我们考察球内均匀分布$U(B^n)$和标准的多元正态分布$N_n(0,I_n)$。

球内均匀分布

随机向量$\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)^\top$服从$B^n=B^n(1)=\{\mathbf{x}: \|\mathbf{x}\|\le 1\}$内均匀分布，即$\mathbf{x}\sim U(B^n)$，概率密度

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{|B^n|}=\frac{\Gamma(1+n/2)}{\pi^{n/2}},\ \mathbf{x}\in B^n.$$

- 由定理1和推论1，$\mathbf{x}\sim U(B^n)$ 的模长$\|\mathbf{x}\|$服从Beta$(n,1)$分布：

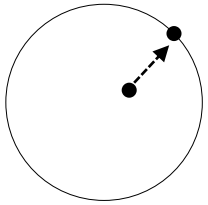
$$p(r)=|S^{n-1}|h(r)r^{n-1}=nr^{n-1},0<r\le 1$$
$$\Leftrightarrow \|\mathbf{x}\|^n\sim U(0,1)$$

- $\mathbf{x}\sim U(B^n)$的极分解：$\mathbf{x}=\mathbf{u}r,\mathbf{u}\perp\!\!\!\perp r$，$\mathbf{u}\sim U(S^{n-1}),r^n\sim U(0,1)$
  形式化地表达为：$U(B^n)=U(S^{n-1})\times[U(0,1)]^{1/n}$

- 定理1和推论1的其它结论都成立。比如

$$\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|\sim U(S^{n-1})$$

这说明，我们把球内均匀随机向量单位化，即得到球面均匀随机向量（第1讲定义2，右图）



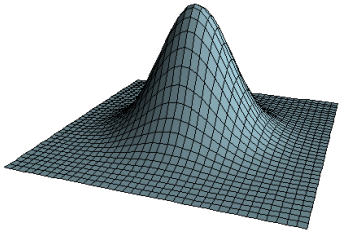
- 极坐标所有角度独立，但$\theta_1,\dots,\theta_{n-2}$并不服从$U(0,\pi)$，因此我们不能通过均匀产生极坐标角度的方式生成球面均匀随机数。

标准正态

定义：若$n\times 1$随机向量$\mathbf{x}$的概率密度为

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2},\quad \mathbf{x}\in R^n,$$

则称$\mathbf{x}$服从标准多元正态分布，记作$\mathbf{x}\sim N_n(0,I_n)$。



因为$N_n(0,I_n)$是球对称分布，应用定理1、推论2（极分解)立得如下结果（因为其重要性，列为定理2）：

定理2: (a) 如果 $\mathbf{x}\sim N_n(0,I_n)$，则

$$\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|\sim U(S^{n-1}),\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|\text{与 }\|\mathbf{x}\|\text{独立},$$

且$\|\mathbf{x}\|$的概率密度（称为χ_n分布）：

$$p(r)=\frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}r^{n-1}e^{-r^2/2},\quad r>0。$$

(b) $\mathbf{x}\sim N_n(0,I_n)\Leftrightarrow$ 存在$\mathbf{u}\perp\!\!\!\perp r$使得$\mathbf{x}=\mathbf{u}r$, 其中 $\mathbf{u}\sim U(S^{n-1}),r\sim\chi_n$。

证明1：只需验证 $\|\mathbf{x}\|$的概率密度。因为

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2}\triangleq h(\|\mathbf{x}\|),\ h(r)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-r^2/2}$$

由定理 1， $\|\mathbf{x}\|$的概率密度$p(r)=h(r)r^{n-1}|S^{n-1}|$ 立得。

证明2（χ_n密度更直接的求解方法）：半径$r=\|\mathbf{x}\|$到$r+\Delta r$的球壳体积为$\Delta V=|S^{n-1}(r)|\Delta r=\frac{n\pi^{n/2}r^{n-1}}{\Gamma(n/2+1)}\Delta r$, 所以球壳上的概率质量为

$$f(\mathbf{x})\Delta V=f(\mathbf{x})\frac{n\pi^{n/2}r^{n-1}}{\Gamma(n/2+1)}\Delta r=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-r^2/2}\frac{n\pi^{n/2}r^{n-1}}{\Gamma(n/2+1)}\Delta r\triangleq p_{\chi_n}(r)\Delta r$$

所以$p_{\chi_n}(r)=\frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}r^{n-1}e^{-r^2/2}$。

注1：极分解“$\mathbf{x}=\mathbf{u}r,\mathbf{u}\sim U(S^{n-1}),r\sim\chi_n,\mathbf{u}\perp\!\!\!\perp r$” 可以形式化地表示为：

$$N_n(0,I_n)=U(S^{n-1})\times\chi_n$$

注1：$\mathbf{x}\sim N_n(0,I_n)$的密度仅与$\|\mathbf{x}\|$有关，给定$\|\mathbf{x}\|=r$条件下，$\mathbf{x}$ 还有什么分布信息？定理2说明$\mathbf{x}$在半径为r的球面上均匀分布（各向同性，旋转不变）：

$$\mathbf{x}|_{\|\mathbf{x}\|=r}\sim U(S^{n-1}(r)),$$

注2：定理2提供了最常用的$U(S^{n-1})$随机数的生成方式：

产生$\mathbf{x}\sim N_n(0,I_n)$，令$\mathbf{u}=\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$, 则$\mathbf{u}\sim U(S^{n-1})$

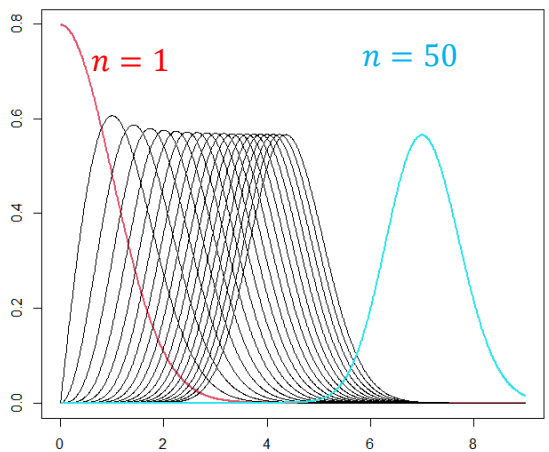
卡方分布

定义：若$\mathbf{x}\sim N_n(0,I_n)$，则称$\|\mathbf{x}\|\sim\chi_n$，$\|\mathbf{x}\|^2\sim\chi_n^2$。

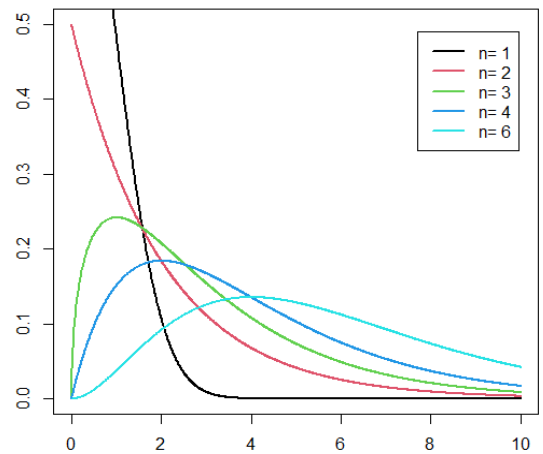
定理2给出了χ_n的密度，由此易得χ_n^2的概率密度

$$\chi_n:\quad p_{\chi_n}(r)=\frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}r^{n-1}e^{-r^2/2},\quad r>0$$

$$\chi_n^2:\quad p_{\chi_n^2}(x)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2},\quad x>0.$$



χ_n的概率密度



χ_n^2的概率密度

$n>1$时χ_n分布的密度的形状大致相同，都接近正态。

卡/卡方分布的性质

	χ_n	χ_n^2
均值	$\dfrac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \approx \sqrt{n-1}$	n
方差	$n-1-\left(E(\chi_n)\right)^2 \approx 1/2$	$2n$
众数 mode	$\sqrt{n-1}, n \geq 2$ ($n=1$时单调下降)	$n-2, n \geq 3$ ($n=1,2$时单调下降)
与其它分布的关系		$\chi_n^2 = 2 \times \mathrm{Gamma}(n/2,1) = \mathrm{Gamma}(n/2,1/2)$
近似分布 $n \to \infty$	$N(\sqrt{n-1}, 1/2), n \geq 2$	$N(n, 2n), n \gg 2$

$\mathrm{Gamma}(\alpha,\lambda)$:

$$p(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}$$

若$\mathbf{x} \sim N_n(0, I_n)$, 则当$n \to \infty$时

$$\|\mathbf{x}\|^2 \overset{d}{\approx} N(n, 2n)\ , \quad \|\mathbf{x}\| \overset{d}{\approx} N\left(\sqrt{n-1}, \frac{1}{2}\right).$$

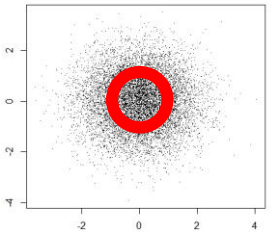
证明： $\mathbf{x}$ 的n个分量x_i iid$\sim N(0,1)$, $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sim \chi_n^2$, 由中心极限定理 $\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n}{\sqrt{2n}} \longrightarrow N(0,1)$， $n \longrightarrow \infty$, 换言之， $\sum_{i=1}^n x_i^2 \approx N(n, 2n)$.

由delta方法, $\chi_n \approx N(\sqrt{n-1}, 1/2)$。

评注1: 关于χ_n，χ_n^2的概率密度的众数

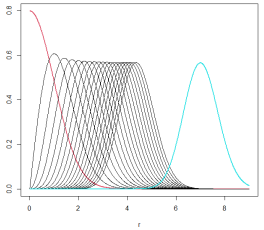
从 $\mathbf{x}\sim N(0,I_n)$ 的概率密度来看，其众数（密度最大点）在0点，因此$\mathbf{x}$最大可能地落在0附近。

但从到原点的距离来看，当$n>1$时， $\mathbf{x}$最大可能落在半径为$\sqrt{n-1}$的球带上。 特别地， $n=2$时，最大可能落在单位圆周附近(右图)。



评注2: 关于χ_n渐近正态：$\|\mathbf{x}\| \overset{d}{\approx} N\left(\sqrt{n-1},1/2\right)$

方差是常数（与均值无关），当 n 较大（实际上 $n>2$)时，χ_n分布形状大致相同。



n较大时，$\mathbf{x}\sim N_n(0,I_n)$的约95%的概率质量集中在 半径$\sqrt{n-1}$，厚度为2.76的球台上：

$$P(-1.96\le\sqrt{2}(\|\mathbf{x}\|-\sqrt{n-1})\le 1.96)\approx 0.95,$$

令人吃惊的是，即使$n=2$，χ_n的正态逼近效果已经很好：

$$P(\sqrt{2-1}-1.38\le\|\mathbf{x}\|\le\sqrt{2-1}+1.38)=0.941$$

正态的唯一性

多元标准正态随机向量的分量都是独立的一元正态随机变量：

$$x_1, \ldots, x_n \text{ iid} \sim N(0,1) \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n)^\top \sim N_n(0, I_n)$$

问题：其它球对称分布是否也可以由n个独立同分布的一元随机变量拼接得到？

Maxwell-Hershell定理说明正态是唯一的：

Maxwell-Hershell定理：

$\mathbf{x} \sim N_n(0, \sigma^2 I_n) \Leftrightarrow \mathbf{x}$服从球对称分布，且所有分量独立。

证明参见 M.Bilodeau, D.Brenner （1999）P51

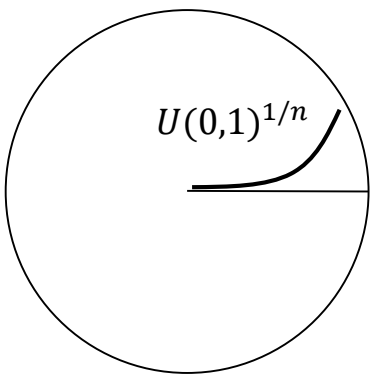
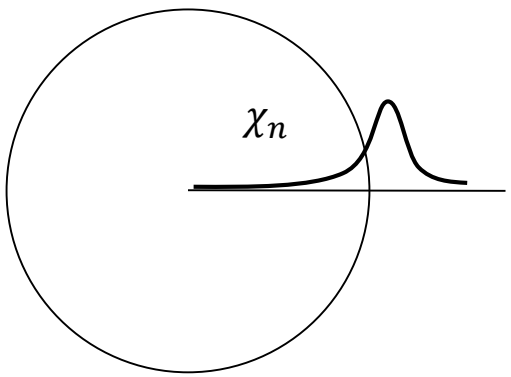
各种球对称分布的共同点是给定模长球面均匀分布，所不同的是径向模长分布，其中标准多元正态$N_n(0, I_n)$的分布由χ_n分布决定。因此我们可以声明，正态的唯一性是由χ_n的唯一性导致的（open：χ_n有什么唯一的优良性质？）

总结：三个主要球对称分布的极分解表示

$\mathbf{x} = \mathbf{u}r$， $\mathbf{u} \perp\!\!\!\perp r$

分布	$\mathbf{u}$	r	
$U(S^{n-1})$	$U(S^{n-1})$	δ_1 $(r \equiv 1)$	$U(S^{n-1}) = U(S^{n-1}) \times 1$
$U(B^n)$	$U(S^{n-1})$	$U(0,1)^{1/n}$	$U(B^n) = U(S^{n-1}) \times [U(0,1)]^{1/n}$
$N_n(0, I_n)$	$U(S^{n-1})$	χ_n	$N_n(0, I_n) = U(S^{n-1}) \times \chi_n$

$U(B^n)$



$N_n(0, I_n)$