



## 杨振宁先生的数理工作漫谈

林开亮

我的物理学界同事大多对数学采取功利主义的态度。也许因为受我父亲的影响，我较为欣赏数学。我欣赏数学家的价值观，钦佩数学的优美和力量：它既有战术上的随机应变，又有战略上的深谋远虑。而且，堪称奇迹中的奇迹：它的一些美妙概念竟是支配物理世界的基本结构。

杨振宁

《杨振宁论文选集》，74页

我请大家注意杨振宁的三个很突出的、同时也是罕见的集齐于一身的点。第一，极其高超的数学能力，使他能够解决技术性问题；第二，对自然的深刻理解，使他能提出重要的问题；第三，一种团队精神，使他在中国文化的复兴中发挥主要作用。总之，这三种特质，造就了杨振宁之所以成为杨振宁，一个保守的革命者，他尊重历史并引领未来。

弗里曼·戴森

《飞鸟与青蛙》序言，该书2015年出版

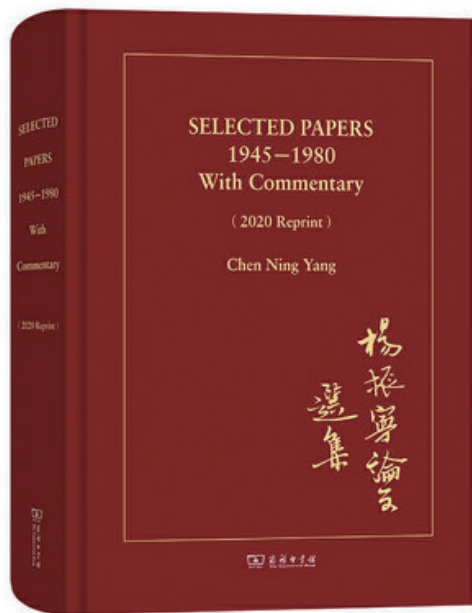


图 1.《杨振宁论文选集》收入杨振宁自选的部分代表作，1983 年出版。雕塑家熊秉明<sup>1</sup>为封面题字

欣逢杨振宁先生百岁华诞之际，我们对杨先生的数理工作略作介绍，希望有助于增进读者对杨先生非凡的学术成就的了解。首先要声明，笔者的物理修养不足，这里无法揭示杨先生工作之物理背景，请读者见谅。为免得读者误以为杨先生仅仅是擅长数学而已，这里我要先引用一段话<sup>2</sup>。

访谈者问：我想您一向认为，理论发展中物理图像要很清楚，这也是您一贯的风格。是不是理论物理学家的风格也很不一样？

杨振宁答：我想如果把理论物理学家分类，可以有种种的方向来分，我们单讲一个方向，就是对于数学的喜爱、能力以及用数学的风格，由这个方向可以把理论物理学家放在一条线，一边是非常数学的，一边是非常不数学的。

如果我们谈到理论物理学家的风格，可以把当时最要做数学的，最不要做数学的，和后来的规范场论，说成是三个方向，一个在右，一个在左，一个在中间。我一直认为在中间的较容易成功。

事实上，杨先生本人就是那种“在中间的”理论物理学家。作为对照，杨振宁在普林斯顿高等研究所的同事戴森(Freeman Dyson)就属于“最要做数学”的那一种，见本刊关于他的传记<sup>3</sup>。

<sup>1</sup> 1922-2002，其父是中国著名数学家熊庆来(1893-1969)。

<sup>2</sup> 杨振宁：我对亚洲发展是一个乐观的看法，《知识通讯评论》79期，2009.05.01.

<sup>3</sup> 林开亮，戴森传奇，《数学文化》第六卷(2015年)第三期。

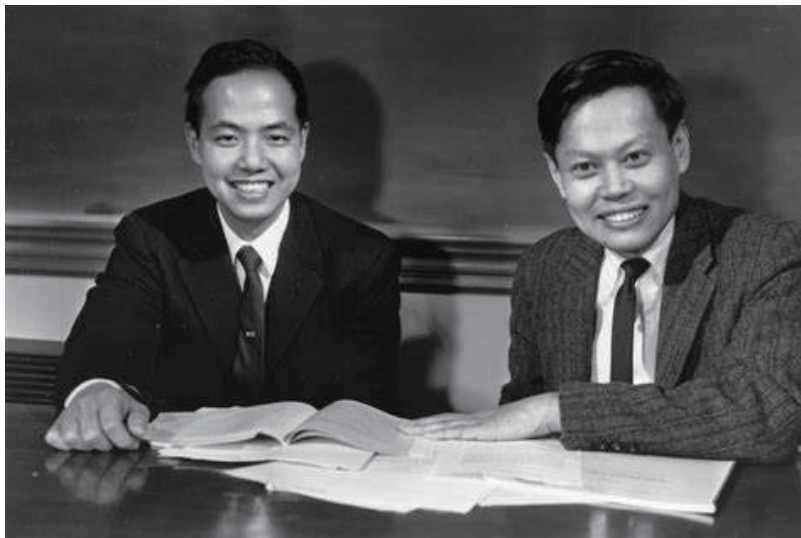


图2. 李政道与杨振宁在普林斯顿高等研究所合影, 1961年左右

### 一. 单位圆定理 [1952]

1952年, 杨振宁与李政道合作, 研究了相变理论, 在他们第二篇合作文章中, 引出了他第一个引以为豪的数学结果, 称为“单位圆定理”。关于该定理的发现过程, 杨先生在《杨振宁论文选集》第15页引用了他1969年写给卡茨 (Mark Kac) 的一封信:

尔后, 12月20日左右的一个晚上, 我在家里工作, 忽然领悟到, 如果使 $Z_1, Z_2, \dots$ 成为独立变量并研究它们相对于单位圆周的运动, 就可以利用归纳法、通过类似于您所用的那种推理得到完整的证明。一旦有了这个想法, 只需要几分钟就可以写出全部的论证细节。

第二天早上, 我开车同李政道去弄棵圣诞树, 在车上我把这个证明告诉了他。稍晚些时候, 我们到了研究所<sup>4</sup>。我记得, 我在黑板上给您讲述了这个方法。

这一切我都记得很清楚, 因为我对这个猜想及其证明感到很得意。虽然说这算不上什么伟大的贡献, 但是我满心欢喜地视之为一颗小珍珠。

有迹象表明, 这是杨振宁发现的第一个漂亮数学定理。杨振宁的弟弟杨振平曾写到<sup>5</sup>:

1951年圣诞节, 我去普林斯顿大哥家度假, 他那时刚刚证明了单位圆定理。

<sup>4</sup> 指普林斯顿高等研究所。

<sup>5</sup> 杨振宁, 翁帆, 《晨曦集》(增订版), 商务印书馆, 2021. 254页。



图3. 杨振宁与卡茨。卡茨以 Feynman-Kac 公式闻名，在 1940 年代与埃尔德什一起将概率方法引入数论

我大学尚未毕业，数学和物理的基础都不是很强，他兴致极高地跟我讲单位圆定理。虽然我完全不明白他说什么，可是他当时的极端兴奋，给我留下了不可磨灭的印象。他说他在这个问题上苦思良久没有结果，曾经去请教高等研究所著名数学家冯·诺依曼教授。冯·诺依曼亦不知如何措手。六个星期以后，他终于解决了困难，得到了全部证明。他当时还说，“这恐怕将是我一生中能证明的最美的定理。”多年以后，我提起他的这句话，他已经完全不记得了，可能是因为他做了更重要更美的的工作。

为介绍单位圆定理，我们需要了解图上的伊辛模型。它是磁铁的一个统计力学模型，由物理学家伊辛（Ernst Ising）在 1925 年提出。给定一个（有限）图  $G$ ，它的顶点（只有有限多个）集合记为  $V$ ，边的集合记为  $E$ 。表示这些顶点之间的基本关系（是否有边相连）的，是一个邻接矩阵，记为  $A$ 。现在假设在每个顶点放置一个磁针，北极可能朝上或朝下，分别用  $\pm 1$  表示。这样一个构型就称为一个状态（state），它可以用一个函数  $\omega: V \rightarrow \{1, -1\}$  表示，可以视为一个  $|V|$  维列向量，这里  $|V|$  表示集合  $V$  的元素个数，即顶点的个数。所有状态的集合不妨记为  $\{1, -1\}^{|V|} \subset \mathbb{R}^{|V|}$ 。对于每个状态  $\omega$ ，赋予能量

$$H(\omega) = -\frac{1}{2} J \omega^T A \omega - h \eta^T \omega$$

其中  $h, J$  是常数， $\omega^T$  是  $\omega \in \mathbb{R}^{|V|}$  的转置， $\eta^T = (1, \dots, 1)$  是分量全部为 1 的  $|V|$  维行向量（换言之， $\eta$  描述的状态是全部磁针北极朝上）。这就给出了任意一个图  $G$  上的伊辛模型。

根据统计力学的 Boltzmann-Gibbs 原理, 状态  $\omega$  出现的概率  $P(\omega)$  正比于  $W(\omega) = \exp(-\beta H(\omega))$ , 其中  $\beta = \frac{1}{kT}$ ,  $k$  是 Boltzmann 常数, 而  $T$  是温度。从而有配分函数 (归一化常数)

$$Z_G = Z_G(h, J, \beta) = \sum W(\omega) = \sum \exp(-\beta H(\omega)).$$

将伊辛模型的能量函数代入, 就得到

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_{\omega \in \{1, -1\}^{|V|}} \exp(\beta J \frac{1}{2} \omega^T A \omega) \exp(\beta h \eta^T \omega) \\ &= \sum_{\omega \in \{1, -1\}^{|V|}} \exp(-\beta h |V|) [\exp(\beta J)]^{\frac{1}{2} \omega^T A \omega} [\exp(2\beta h)]^{\frac{\eta^T \omega + |V|}{2}} \end{aligned}$$

做变量替换  $\sigma = (\omega + \eta) / 2$ ,  $z = \exp(2\beta h)$ ,  $t = \exp(2\beta J)$ , 就有

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_{\sigma \in \{0, 1\}^{|V|}} \exp(-\beta h |V|) \exp(\beta J |E|) [\exp(2\beta J)]^{\sigma^T A \sigma - \eta^T \sigma} [\exp(2\beta h)]^{\eta^T \sigma} \\ &= \sqrt{z^{-|V|}} \sqrt{t^{|E|}} \tilde{Z}_G(z, t), \end{aligned}$$

其中  $|E|$  是边的数目,  $\tilde{Z}_G(z, t)$  (对每个给定的  $t$ ) 是  $z$  的  $|V|$  次多项式。于是最简单的单位圆定理相当于说:

#### 定理 1

对任意的图  $G$  上的伊辛模型, 其约化配分函数

$$\tilde{Z}_G(z, t) = \sum_{\sigma \in \{0, 1\}^{|V|}} t^{\sigma^T A \sigma - \eta^T \sigma} z^{\eta^T \sigma}$$

对任意的参数  $t \in [1, +\infty)$ , 其零点落在单位圆周  $|z| = 1$  上。

事实上, 单位圆定理比定理 1 更一般。一般的单位圆定理说, 同样的结论 (约化配分函数的零点落在单位圆周) 对实对称矩阵  $A$  成立, 只要  $A$  的每一个非对角元都非负 (这在数学上对应着带权重的图)。

单位圆定理在物理学中有重要意义, 引起了许多数学物理学家的兴趣。1970 年, 利布 (E. Lieb) 与埃尔曼 (O. J. Heilmann) 给出了单位圆定理在图论中的一个变体: 任意图的匹配多项式 (matching polynomial) 仅有实零点。利布 - 埃尔曼这一结果及其改进被马库斯 (A. Marcus) 等用于构造 Ramanujan 图, 其成果发表在 2015 年的《数学年刊》。法国高等科学研究所的吕埃勒 (David Ruelle) 在其科普著作《数学与人类思维》中还专辟一章讲单位圆定理, 并在 2010 年《数学年刊》发表一篇题为“李 - 杨多项式的刻划”的文章。