

1. (仅供参考, 允许其它合理的解释) key: 径赛用时越小越好, 田赛项目成绩越大越好。

(a) PC1= 除撑杆跳和标枪之外其它项目的总评。

或 PC1 代表整体运动能力。

或 PC1= 短跑-投掷 = 速度-力量 (允许其它合理的说法)

(b) 方差贡献率:

PC1: $76^2/10 = 0.30976$; PC2: $1.42^2/10 = 0.20164$. 累计: $0.30976+0.20164=0.5114$.

(c) 第一名投掷类成绩较好。100 米较好, 1500 米很差, 400 米中 (与 1 方向垂直) 等。100 米栏较好或中等 (与 1 方向负相关或接近垂直)

最后一名的短跑成绩、跳高、跳远成绩比较差, 其它项目 (投掷和 1500 米) 成绩都一般, 他没有特别突出的项目。

(d) 跳高和撑杆跳负相关, 前者对腿部力量要求高, 后者对上肢力量要求高。

100 米用时和跳远距离负相关, 这说明跑得越快, 跳得越远。

1500 米与其它短跑项目接近正交 (不相似), 前者要求体能和耐力, 后者要求速度和爆发力。

2. (仅供参考, 允许其它合理的解答)

(a) $F1 = \text{Brightness} + \text{Albedo} + \text{Diameter} - 0.39 \cdot \text{year}$ 代表光亮度。

$F2 = 0.87 \cdot \text{Year} + 0.42 \cdot \text{Distance} - 0.58 \cdot \text{Diameter}$, $F2$ 大致代表距离

(b) $\text{uniqueness} = 1 - \text{载荷行平方和}$, 例如 Brightness 的特殊方差 $1 - 0.99^2 = 0.02$.

变量	Brightness	Albedo	Diameter	Distance	Year
特殊方差	0.0199	0.0447	0.0075	0.8092	0.0910

两因子模型对 Distance 拟合较差。

(c) 总方差 = 5。两个因子的方差贡献: $F1 = 2.7436$, $F2 = 1.2841$

方差解释/贡献率: $F1: 0.5487$, $F2: 0.2568$ 累计: 0.806

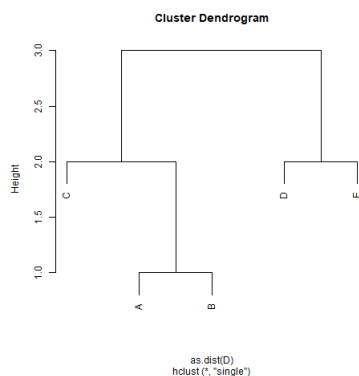
3. 解: $d_{ab} = 1$ 最小, 首先合并 a, b 。四个类 $(ab), c, d, e$ 的单连结距离矩阵:

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} ab & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} ab \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$d_{(ab)c} = 2$ 最小, 合并 $(ab), c$, 得到 3 个类: $(abc), d, e$, 其 (单连结) 距离矩阵

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} abc & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} abc \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

最小距离 $d_{de} = 2$, 合并得到两类 $(abc), (de)$, 它们的单连结距离 $d_{(abc)(de)} = \min_{i=a,b,c;j=d,e} d_{ij} = 3$.



4. 证明:

由 $X\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}$, 左乘 $\mathbf{u}^\top$ 得 $\mathbf{u}^\top X\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}^\top\mathbf{u} = c_1$ 。

由 $X^\top\mathbf{u} = c_2\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}^\top X^\top\mathbf{u} = c_2\mathbf{v}^\top\mathbf{v} = c_2$, 即 $\mathbf{u}^\top X\mathbf{v} = c_2$, 所以 $c_1 = c_2$ 。

应用 Cauchy-Schwartz 不等式及二次型的极大值定理, 得

$$c_1 = c_2 = \mathbf{u}^\top X\mathbf{v} \leq \sqrt{\mathbf{u}^\top\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^\top X^\top X\mathbf{v}} = \sqrt{\lambda_{\max}(X^\top X)} = \text{最大奇异值}.$$

5. 证明:

(a) 由 $W = U\Gamma V^\top \Rightarrow WV = U\Gamma, W^\top U = V\Gamma$, 所以

$$\begin{pmatrix} 0 & W \\ W^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} WV \\ W^\top U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U\Gamma \\ V\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \Gamma,$$

这说明 $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ 各列是特征根 Γ 的特征向量。类似地,

$$\begin{pmatrix} 0 & W \\ W^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ -V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -WV \\ W^\top U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U\Gamma \\ V\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U \\ V \end{pmatrix} \Gamma = \begin{pmatrix} U \\ -V \end{pmatrix} (-\Gamma)$$

这说明 $\begin{pmatrix} U \\ -V \end{pmatrix}$ 各列是负特征根 $-\Gamma$ 的特征向量。

(c) 记 $r_i = \sum_{j=1}^p w_{ij}, c_j = \sum_{i=1}^n w_{ij}$ 分别为第 i 行, 第 j 列的总和。 $D_r = \text{diag}(r_1, \dots, r_n), D_c = \text{diag}(c_1, \dots, c_p), D = \text{diag}(D_r, D_c)$, 则

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^\top, \mathbf{v}^\top) \begin{pmatrix} D_r & W \\ W^\top & D_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} &= \mathbf{u}^\top D_r \mathbf{u} + \mathbf{v}^\top D_c \mathbf{v} + 2\mathbf{u}^\top W \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n r_i u_i^2 + \sum_{j=1}^p c_j v_j^2 + 2 \sum_{i,j} w_{ij} u_i v_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p w_{ij} u_i^2 + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n w_{ij} v_j^2 + 2 \sum_{i,j} w_{ij} u_i v_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p w_{ij} (u_i + v_j)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

对任何 $\mathbf{x}$ 成立, 所以 Q 是正定矩阵, 取所有 $u_i = 1, v_j = -1$, 上式为 0, 所以 0 是最小特征根 (特征向量可取为 $(\mathbf{1}_n^\top, -\mathbf{1}_p^\top)^\top$).

(b) 证明与 (c) 类似, 不同的是交叉项前面为负号, 0 特征根的特征向量为 $\mathbf{1}_m$.

6. 假设 $W_{p \times p} \sim W_p(n), n \geq p, \mathbf{x}_{p \times 1} \sim N_p(\mathbf{0}, I_p)$, 且 W 与 $\mathbf{x}$ 独立。试证明

$$\frac{|W|}{|W + \mathbf{x}\mathbf{x}^\top|} \sim \text{Beta}\left(\frac{n-p+1}{2}, \frac{p}{2}\right),$$

其中 $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ 代表参数为 $\alpha > 0, \beta > 0$ 的 beta 分布。

证明: 因为 $|I_p + A_{p \times q} B_{q \times p}| = |I_q + BA|$, 所以

$$\frac{|W|}{|W + \mathbf{x}\mathbf{x}^\top|} = \frac{|W|}{|W||I_p + W^{-1}\mathbf{x}\mathbf{x}^\top|} = \frac{|W|}{|W|(1 + \mathbf{x}^\top W^{-1}\mathbf{x})} = \frac{1}{1 + \mathbf{x}^\top W^{-1}\mathbf{x}}$$

记 $y = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} / \mathbf{x}^\top W^{-1} \mathbf{x}$, 因为 $y|\mathbf{x} \sim \chi_{n-p+1}^2$, 该分布与 $\mathbf{x}$ 无关, 所以 $y \sim \chi_{n-p+1}^2$ 且 $y \perp \mathbf{x}$, 进而 $y \perp \mathbf{x}^\top \mathbf{x}$, 而 $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} \sim \chi_p^2$, 所以

$$\frac{1}{1 + \mathbf{x}^\top W^{-1} \mathbf{x}} = \frac{1}{1 + \mathbf{x}^\top \mathbf{x} / y} = \frac{y}{y + \mathbf{x}^\top \mathbf{x}} \sim \frac{\chi_{n-p+1}^2}{\chi_{n-p+1}^2 + \chi_p^2} \sim \text{Beta}\left(\frac{n-p+1}{2}, \frac{p}{2}\right)$$

其中最后用到了事实: 若 $\xi \sim \chi_m^2, \eta \sim \chi_n^2, \xi \perp \eta$, 则 $\xi/(\xi + \eta) \sim \text{Beta}(m/2, n/2)$.