PRINCIPE LOCAL-GLOBAL POUR LES 0-CYCLES

YONGQI LIANG

Notations

k un corps de nombres. Ω_k, $k_v (v \in \Omega_k)$.

$X_{/k}$ une variété (schéma séparé de type fini sur un corps) projective lisse et géométriquement intègre sur k.

$X_v = X \otimes_k k_v$,

$Br(X) := H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ le groupe de Brauer cohomologique de X.

1. Principe local-global pour les points rationnels

On a

$$X(k) \subset \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v),$$

le principe de Hasse n'est pas valable en général.

(1970's) Manin a introduit un *accouplement* (dit *de Brauer-Manin*) :

$$\begin{array}{cccccc} \langle \cdot, \cdot \rangle_k : \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v) & \times & Br(X) & \to & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \\ (\ \{x_v\}_{v\in\Omega_k} & , & b\ ) & \mapsto & \sum_{v\in\Omega_k} inv_v(b(x_v)), \end{array}$$

où $inv_v : Br(k_v) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'invariant local, et où $b(x_v)$ est l'évaluation de b au point x_v, *i.e.* le pull-back de $b \in Br(X)$ via le morphisme $x_v : Spec(k_v) \to X$. On note $\left[\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)\right]^{Br}$ le noyau à gauche de l'accouplement. D'après la suite exacte $0 \to Br(k) \to \bigoplus_v Br(k_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ provenant de la théorie du corps de classes, on a

$$X(k) \subset \overline{X(k)} \subset [\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)]^{Br} \subset \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v).$$

Si $[\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)]^{Br} \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$, on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse* pour les points rationnels. Si $\overline{X(k)} = [\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)]^{Br}$, on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible* pour les points rationnels.

Exemples et contre-exemples

(1996 Borovoi)

G : un groupe algébrique linéaire connexe

Y : un espace homogène de G à stabilisateur géométrique connexe (ou abélien si G est simplement connexe)

X : une compactification lisse de Y

---

23 juin 2010.

Séminaire de géométrie algébrique, Université de Rennes 1.

L'obstruction de BM est la seule au PH/à l'AF pour les points rationnels sur X.

(1999) Skorobogatov a construit une surface bielliptique X telle que $\emptyset = X(k) \subsetneq [\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)]^{Br}$

(2010) Poonen a construit un solide X (un fibré en surfaces de Châtelet au-dessus d'une courbe de genre > 0) tel que $\emptyset = X(k) \subsetneq [\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)]^{Br}$

Conjecture 1 (Colliot-Thélène 1988)**.** *L'obstruction de BM est la seule au PH/à l'AF pour les points rationnels sur toute variété (projective lisse) uni-rationnelle (ou rationnellement connexe).*

Conjecture 2 (Skorobogatov 2001)**.** *L'obstruction de BM est la seule au PH/à l'AF pour les points rationnels sur toute courbe (projective lisse).*

2. Principe local-global pour les 0-cycles

De la façon similaire, Colliot-Thélène a défini l'accouplement de BM pour les 0-cycles

$$\prod_{v\in\Omega} Z_0(X_v) \times Br(X) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$(\{z_v\}_v = \{\sum n_{P_v} P_v\}_v, b) \mapsto \sum_{v\in\Omega} inv_v[\sum_{P_v} n_{P_v} cores_{k_v(P_v)/k_v}(b(P_v)))].$$

Cet accouplement se factorise à travers le groupe de Chow local $CH_0(X_v)$ et le groupe de Chow modifié

$$CH_0'(X_v) = \begin{cases} CH_0(X_v), & v\in\Omega^f \\ CH_0(X_v)/N_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}CH_0(\overline{X}_v), & v\in\Omega^{\mathbb{R}} \\ 0, & v\in\Omega^{\mathbb{C}} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \prod_{v\in\Omega_k} CH_0'(X_v) \times Br(X) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$\rightsquigarrow CH_0(X) \to \prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v) \to Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$(E)\ CH_0(X)\hat{}\to [\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v)]\hat{}\to Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

où $M\hat{}:= \varprojlim_n M/nM$ pour tout groupe abélien M. Sa partie de degré 0 :

$$(E_0)\ A_0(X)\hat{}\to [\prod_{v\in\Omega} A_0(X_v)]\hat{}\to Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

où $A_0(X) = ker[deg : CH_0(X) \to \mathbb{Z}]$.

Conjecture 3 (Colliot-Thélène-Sansuc 1981, Kato-Saito 1986)**.**
Les suites (E) et (E_0) sont exactes, l'assertion

(E_1) *l'obstruction de BM est la seule au PH pour les 0-cycles de degré* 1, *est valable pour toute variété (projective lisse).*

Remarque (Wittenberg). L'assertion $(E) \Rightarrow (E_0)$ et (E_1).

Si X est une variété abélienne, (E_0) est une partie de la suite exacte de Cassels-Tate ($\text{Ш}(X,k) < \infty$ supposé).

Si $X = C$ est une courbe (projective lisse), en supposant $\text{Ш}(Jac(C),k) < \infty$, l'assertion (E_1) est montrée par Saito (1989), l'exactitude de (E) est montrée par Colliot-Thélène (1999).

3. Points rationnels vs. 0-cycles

Question Y a-t-il un lien entre l'arithmétique des points rationnels et l'arithmétique des 0-cycles ? ?

l'obstruction BM est la seule au PH/à l'AF ?

points rationnels vs. 0-cycles de degré 1

- évidences négatives :

Sur une courbe Conjecture de Skorobogatov vs. Théorème de Saito et de Colliot-Thélène sur une courbe

Sur le solide de Poonen Poonen 2010 : $X(k) = \emptyset \neq [\prod_v X(k_v)]^{Br}$, l'obstruction de BM n'est *pas* la seule au PH.

vs.

Théorème (Colliot-Thélène 2010)**.** *Il existe un 0-cycle global de degré* 1 *sur le solide de Poonen.*

Plus généralement :

Théorème (2010, L.)**.** *Soit $X \to C$ un k-morphisme propre dominant avec C une courbe projective lisse à fibre générique une surface de Châtelet,* i.e. *définie par l'équation*

$$x^2 - ay^2 = P(z)$$

où $a \in k^*$ et où $P(z) \in k(C)[z]$ est un polynôme de degré 4*. Supposons la finitude de* $\text{Ш}(Jac(C),k)$.

Alors, (E), (E_0) sont exacte, l'obstruction de BM est la seule au PH pour les 0-cycles de degré 1 *sur X.*

- Cependant, on va présenter un résultat positif sur cette question !

Définition. *Une variété $X_{/k}$ est dite* rationnellement connexe*, si pour tout couple de points géométriques $Q_1, Q_2 \in X(\mathbb{C})$, il existe une $\mathbb{C}$-courbe rationnelle $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$ passant par Q_1 et Q_2,* i.e. *telle que $f(0) = Q_1$ et $f(\infty) = Q_2$.*

Remarque. Une variété abélienne n'est pas rationnellement connexe.

Une courbe de genre > 0 n'est pas rationnellement connexe.

Mais, toute variété uni-rationnelle est rationnellement connexe. Réciproquement, c'est une question ouverte.

Un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe est uni-rationnel, donc rationnellement connexe.

Définition. *On fixe $\delta \in \mathbb{Z}$, on dit que* l'obstruction de BM est la seule à l'AF pour les 0-cycles de degré δ*, si pour toute famille de 0-cycles locaux $\{z_v\}_{v\in\Omega_k} \perp Br(X)$ avec $deg(z_v) = \delta (\forall v \in \Omega_k)$ et pour tout $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ et tout ensemble fini $S \subset \Omega$, $\exists$ un 0-cycle global $z = z_{m,S}$ de degré δ tel que z et z_v ont la même image dans $CH_0(X_v)/m$ pour toute $v \in S$.*

On considère les assertions suivantes :

(i-PH) l'obstruction de BM est la seule au PH pour les points K-rationnels sur X_K pour toute extension finie K/k;

(i-AF) l'obstruction de BM est la seule à l'AF pour les points K-rationnels sur X_K pour toute extension finie K/k, *i.e.* (E_1) pour X_K;

(ii-PH) l'obstruction de BM est la seule au PH pour les 0-cycles de degré 1 sur X_K pour toute extension finie K/k;

(ii-AF) l'obstruction de BM est la seule à l'AF pour les 0-cycles de degré 1 sur X_K pour toute extension finie K/k;

(iii) la suite (E), ainsi que (E_0), est exacte pour X_K pour toute extension finie K/k.

Résult principal (2011, L.)**.**
Si X est rationnellement connexe, alors

(i-PH) $\Rightarrow$ (ii-PH);

(i-AF) $\Rightarrow$ (ii-AF) $\Rightarrow$ (iii).

+ résultat de Borovoi :

Corollaire. *Soit G un groupe algébrique linéaire connexe, soit Y un espace homogène de G à stabilisateur géométrique connexe (ou abélien si G est simplement connexe), et soit X une compactification lisse de Y.*

Alors les suites (E) et (E_0) sont exactes pour X, l'obstruction de BM est la seule au PH pour les 0-cycles de degré 1 sur X.

Démonstration (esquisse).
On montre (i-AF) $\Rightarrow$ (ii-AF) $\Rightarrow$ (iii) : l'exactitude de (E) pour X.

(1)(i-AF) pour X $\Rightarrow$ (ii-AF) pour $X \times \mathbb{P}^1$: pas difficile, on applique la méthode de fibration pour $X \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ et le lemme de déplacement pour les 0-cycles.

(2)(ii-AF) pour $X \times \mathbb{P}^1 \Rightarrow$ (ii-AF) pour X : $\exists$ une section de $X \times \mathbb{P}^1 \to X$, de plus $Br(X) \xrightarrow{\simeq} Br(X \times \mathbb{P}^1)$ est un isomorphisme.

(3)(ii-AF) pour $X \Rightarrow$ (ii-AF)' pour $X \times \mathbb{P}^1$:

(ii-AF)'=l'obstruction de BM est la seule à l'AF pour les zéro-cycle de degré δ, $\forall \delta \in \mathbb{Z}$.

Cette étape est essentielle, parce que dans la suite (E) il faut considérer les 0-cycles de tout degré.

On utilise la méthode de fibration pour $X \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$.

On ramène la question à une question sur les points K-rationnels pour une certaine extension finie K de k.

On introduit la notion d'un sous-ensemble hilbertien généralisé et on généralise le théorème d'irréductibilité d'Hilbert.

De plus, afin de contrôler le groupe de Brauer, on utilise la suite exacte (provenant de la suite spectrale de Hochschild-Serre) : (où $\Gamma_k = Gal(\bar{k}/k)$)

$$0 \to H^1(\Gamma_k, Pic\bar{X}) \to Br(X)/Br(k) \to Br(\bar{X})^{\Gamma_k} \to H^2(\Gamma_k, Pic\bar{X})$$

- X est rationnellement connexe $\Rightarrow Br(\bar{X})$ est fini, $Pic\bar{X}$ est de type fini et sans torsion.

(4)(ii-AF)' pour $X \times \mathbb{P}^1 \Rightarrow$ l'exactitude de (E) pour $X \times \mathbb{P}^1$:

La suite (E) concerne toutes les places, mais l'AF concerne seulement un nombre fini de places, on utilise

Théorème (Kollár-Szabó)**.** *Soit K un corps p-adique de corps résiduel $\mathbb{F}$. Soit X une variété sur K. On suppose que X a une réduction lisse projective séparablement rationnellement connexe sur $\mathbb{F}$.*

Alors $deg : CH_0(X) \hookrightarrow \mathbb{Z}$ est une injection.

$Y = X \times \mathbb{P}^1$ est rationnellement connexe. En pennant un modèle entier de Y à bonne réduction sur $O_{k,S}$ on obtient que $CH_0(X_v) \simeq \mathbb{Z}$ pour toute $v \in \Omega_k \setminus S$ (on utilise aussi l'estimation de Lang-Weil+lemme de Hensel), et on applique l'AF pour les places $v \in S$.

(5)l'exactitude de (E) pour $X \times \mathbb{P}^1 \Rightarrow$ l'exactitude de (E) pour X : pour toute extension L/k ($L = k$ ou k_v) $CH_0(X_L \times \mathbb{P}^1_L)\hat{}\twoheadrightarrow CH_0(X_L)\hat{}$est surjective, de plus $Br(X) \xrightarrow{\simeq} Br(X \times \mathbb{P}^1)$. □

Bâtiment 425 Département de Mathématiques, Université Paris-sud XI, Orsay 91400, France

E-mail address: yongqi.liang@math.u-psud.fr