分类号 ______________　　　　密级 ______________

UDC ______________　　　　编号 ______________

中国科学院研究生院
硕士学位论文

Hensel域上的局部算术对偶定理

梁永祺

指导教师　徐飞 研究员

中国科学院数学与系统科学研究院

申请学位级别　硕士　学科专业名称　基础数学

论文提交日期　2008年月　论文答辩日期　2008年月

培养单位　中国科学院数学与系统科学研究院

学位授予单位　中国科学院研究生院

答辩委员会主席 ______________

Local Arithmetic Duality Theorem for Henselian Fields

Yong-Qi LIANG

Supervisor:

Prof. Fei XU

Institute of Mathematics
Academy of Mathematics and Systems Science
Chinese Academy of Sciences

September, 2008

Submitted in total fulfilment of the requirements for the degree of Master in Fundamental Mathematics

摘　　要

本文讨论Hensel域上的局部算术对偶定理。首先，笔者指出文献[13]中相应定理的证明并不清晰，然后介绍证明所需要的一些相应的预备知识，最后本文将给出完整的证明。

关键词： Hensel域，算术对偶定理

Abstract

The local arithmetic duality theorem for Henselian fields is discussed in this thesis. Firstly, it is pointed out that in [13] the proof of the corresponding theorem is not clear; then some preliminaries are introduced; finally, a complete proof of the theorem is given.
Keywords: Henselian field, arithmetic duality theorem

目　录

第零章　引言

算术对偶定理的研究始于二十世纪五十年代。J. Tate研究非阿基米德局部域上的Abel簇的对偶定理，即$H^1(K, A^t)^* \simeq A(K)$，其中$K$是一个非阿基米德局部域，$A$是$K$上的Abel簇，$A^t$是对偶Abel簇。为了证明上述同构，Tate考虑由群概形的短正合列$0 \to A_n \to A \xrightarrow{n} A \to 0$相应的Galois上同调长正合列，从而归结为研究关于有限群概形A_n的对偶定理。等价地，研究离散$Gal(K^s/K)$-模$A_n(K^s)$的对偶定理。Tate得到了局部算术对偶定理1.1。对于整体域而言，Tate也得到了一个对偶定理，同时，G. Poitou独立得到了部分相同的结果，即整体算术对偶的Poitou-Tate序列，参见Tate于瑞典1962年国际数学家大会的报告[18]。该报告中陈述了局部和整体的算术对偶定理，并给出了证明的大致思路和概要。完整的证明可以在许多参考书中找到，例如[13]、[15]或者[5]。六十年代，用平展（étale）上同调的语言，局部和整体算术对偶定理有了新的陈述，即Artin-Verdier定理。在[11]中B. Mazur对K是全虚的数域的特殊情况给出了一个详细的证明，但是[2] 中C. Deninger指出[11]中证明的一个小缺陷。也许第一个完整的对Artin-Verdier定理数域情况的证明由[13]给出。笔者认为对于整体函数域情形，[13]中的证明是不完整的，作为补充，在[2]中找到对此情形的证明。近来，算术对偶定理已经被推广到1-motives上，参见[6]和[3]。

本文讨论的Hensel域上的局部算术对偶定理1.4是非阿基米德局部域的算术对偶定理1.1的推广。由于Hensel离散赋值环在平展（étale）上同调理论中处于重要的地位，[13]对Artin-Verdier定理的证明应用了Hensel域上的局部算术对偶定理。在[11]中已经指出局部对偶定理可以推广到Hensel域上，但没有给出证明，[13]中陈述并给出该定理的一个简略证明。但笔者认为[13]中的证明的思路是行不通的，本文将给出一个完整的证明。

第一章　问题的提出

1.1　基本定义

定义 1.1. 令G是一个准有限（profinite）群，G-模M称为离散G-模，如果它满足以下等式

$$M = \bigcup_{H} M^H,$$

其中H跑遍G的开（正规）子群。这等价于说：映射$G \times M \to M$是连续的，其中M取离散拓扑。

假设G是一个准有限群，G-模范畴是一个拥有足够多内射对象的Abel范畴，因此我们对G-模M与N可以定义$Ext_G^r(M,N)$。特别地，我们定义$H^r(G,M) = Ext_G^r(\mathbb{Z},M)$，当$M$是一个离散$G$-模时，$H^r(G,M)$还可以用连续的上链复形的方法等价地定义。

假设G是一个准有限群，M、N与P是离散G-模，我们可以定义Yoneda配对

$$Ext_G^r(M,N) \times Ext_G^s(P,M) \to Ext_G^{r+s}(P,N)。$$

事实上，$Ext_G^s(P,M)$是G-模M与P的s-叶扩张的等价类的集合，取定其中一个s-叶扩张

$$0 \to M \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_s \to P \to 0,$$

把该长正合列分解为s个短正合列：

$$0 \to M = B_0 \to A_1 \to B_1 \to 0,$$

$$0 \to B_1 \to A_2 \to B_2 \to 0,$$

$$\vdots$$

$$0 \to B_{s-1} \to A_s \to P = B_s \to 0,$$

对每一个短正合列取$Ext_G(-,N)$的长正合列，分别得到以下s个边缘同态$Ext_G^r(M,N) = Ext_G^r(B_0,N) \to Ext_G^{r+1}(B_1,N) \to Ext_G^{r+2}(B_2,N) \to \cdots \to Ext_G^{r+s}(B_s,N) =$

$Ext_G^{r+s}(P,N)$，其复合给出的群同态$Ext_G^r(M,N)\to Ext_G^{r+s}(P,N)$并不依赖于等价类代表元的选取，这给出了上述Yoneda配对。特别地，取$P=\mathbb{Z}$我们得到配对

$$Ext_G^r(M,N)\times H^s(G,M)\to H^{r+s}(G,N)。$$

令K是一个非阿基米德局部域，令$G=Gal(K^s/K)$和$N=K^{s*}$。由局部类域论（参见[17]），我们知道$H^2(G,K^{s*})\simeq\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，于是配对

$$Ext_G^r(M,K^{s*})\times H^{2-r}(G,M)\to H^2(G,K^{s*})\simeq\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

诱导出群同态

$$\alpha^r(G,M):Ext_G^r(M,K^{s*})\to H^{2-r}(G,M)^*。$$

定义 1.2. 令G是一个准有限群，C是一个离散G-模，一族以G的开子群U为指标的同构

$$inv_U:H^2(U,C)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

成为类形式（*class formation*），简记为(G,C)，如果它们满足

（1）$H^1(U,C)=0$；

（2）对开子群$V\subseteq U\subseteq G$，下图交换

$$\begin{tikzcd} H^2(U,C) \arrow[r, "Res_{V,U}"] \arrow[d, "inv_U"', "\simeq"] & H^2(V,C) \arrow[d, "inv_V"', "\simeq"] \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r, "n"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

其中$n=[U:V]$。

对于类形式(G,C)，我们有互反映射$rec_G:C^G\to G^{ab}$，我们也有上述同态

$$\alpha^r(G,M):Ext_G^r(M,K^{s*})\to H^{2-r}(G,M)^*。$$

我们知道$\alpha^1(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$由$rec_G$诱导；如果$G$的严格上同调维数是2（例如非阿基米德局部域的绝对Galois群），$\alpha^0(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$也由$rec_G$诱导（参见[13, I.1]），简单的说，就是类域论给出一些α^r的信息。我们关心$\alpha^r(G,M)$什么时候是同构。

假设$(R,\mathfrak{m})$是一个剩余类域为$k=R/\mathfrak{m}$的离散赋值环，记多项式$f\in R[X]$模$\mathfrak{m}$约化后为$\bar{f}\in k[X]$。

定义 1.3. 我们称R是*Hensel*的，如果$f \in R[X]$是首一多项式使得$\bar{f} = g_0 h_0 \in k[X]$，其中$f_0$与$g_0$互素且均首一，那么存在$g, h \in R[X]$使得$f = gh$以及$\bar{g} = g_0$，$\bar{h} = h_0$。分式域$K = Frac(R)$称为*Hensel*域。

在这种情况下，我们称R是卓越（*excellent*）的，如果$\widehat{K}$是K的可分扩张，其中非阿基米德局部域$\widehat{K}$是K的完备化。（参见[9]和[10]）

假设K是一个Hensel域，则(G_K, K^{s*})是一个类形式，我们仍然有类似的局部类域论（参见定理2.6），而且我们还知道$Gal(K^s/K) \simeq Gal(\widehat{K}^s/\widehat{K})$（参见定理2.7）。因而，把非阿基米德局部域$K$换成Hensel域，本节在此之前的讨论依然成立，仍然有同态$\alpha^r(G, M)$。

1.2　问题的提出

定理 1.1. 令K为非阿基米德局部域，$G = Gal(K^s/K)$，假设M是一个（作为*Abel*群）有限生成的离散G-模。那么，对$r \geqslant 1$，

$$\alpha^r(G, M) : Ext_G^r(M, K^{s*}) \to H^{2-r}(G, M)^*$$

是同构。

同态$\alpha^0(G, M)$诱导拓扑群同构[1] $\widehat{\alpha}^0(G, M) : \widehat{Hom}_G(M, K^{s*}) \xrightarrow{\simeq} H^2(G, M)^*$，完备化$\widehat{\ }$可以省略若$M$有限。

如果M无$char(K)$-扭，则$Ext_G^1(M, K^{s*})$和$H^1(G, M)$均有限。

如果M有限，而且其阶不被$char(K)$整除，则上述所有群均为有限群。

证明. 更为详细的讨论参见本文附录，完整证明参见[13, I.2.1]，思路是利用局部类域论得到$\alpha^0(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$和$\alpha^1(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$的信息，然后使用由同调代数方法证明的[13, I.1.8]。但注意证明最后一步取准有限完备化时[13]的证明中使用命题[13, I.0.20] 是不足以说明完备化后仍然得到正合序列，关于这一步，参见[6]的附录，使用了非阿基米德局部域的拓扑性质（然而这些性质Hensel域是不具有的）。 □

[1] 此处$\widehat{Hom}_G(M, K^{s*})$表示$Hom_G(M, K^{s*})$的准有限完备化，即$\widehat{H} = \varprojlim_N H/N$其中$N$跑遍$H$的所有有限指标的正规开子群。

引理 1.2. 令G是一个准有限群，M,N是离散G-模。如果M作为$Abel$群是有限生成的，那么$Ext^s(M,N)$也是一个离散G-模，而且我们有收敛的谱序列

$$H^r(G, Ext^s(M,N)) \Rightarrow Ext_G^{r+s}(M,N)。$$

证明. 证明仅用到纯粹的同调代数，参见[13, I.0]。 □

推论 1.3. 在定理的假设条件下，如果M无$char(K)$-扭，则有同构

$$H^r(G, M^D) \xrightarrow{\simeq} H^{2-r}(G,M)^*, \forall r \geqslant 1$$

和

$$\widehat{H}^0(G, M^D) \xrightarrow{\simeq} H^2(G,M)^*,$$

其中$M^D = Hom(M, K^{s*})$。$H^1(G,M)$和$H^1(G,M^D)$均有限。如果M有限，那么$\widehat{H}^0(G,M^D) = H^0(G,M^D)$也有限。

证明. 由于M是有限生成的，M^D也是一个离散G-模。根据上述定理，我们只需要证明$Ext_G^r(M,K^{s*}) \simeq H^r(G,M^D)$。注意到对所有素数$l \neq char(K)$，$K^{s*}$是$l$可除的，于是对于$s \geqslant 1$，$Ext^s(M,K^{s*}) = 0$。于是谱序列

$$H^r(G, Ext^s(M, K^{s*})) \Rightarrow Ext_G^{r+s}(M, K^{s*})$$

给出我们所需要的同构。 □

我们希望把上述算术对偶定理中的非阿基米德局部域K换成更一般的Hensel域，事实上，我们有以下定理：

定理 1.4. 令R为$Hensel$的卓越的离散赋值环，而且其剩余类域有限，其分式域为K，记$G = Gal(K^s/K)$。假设M是一个（作为$Abel$群）有限生成的离散G-模，而且M无$char(K)$-扭，那么

对于$r \geqslant 1$，$\alpha^r(G,M)$是同构。$\alpha^0(G,M)$诱导了拓扑群同构$\widehat{\alpha}^0(G,M) : \widehat{Hom_G}(M,K^{s*}) \xrightarrow{\simeq} H^2(G,M)^*$，完备化$\widehat{\ }$可以省略若$M$有限。

$Ext_G^1(M,K^{s*})$和$H^1(G,M)$均有限。

如果M有限，则上述所有群均为有限群。

推论 1.5. *在定理的假设条件下，我们有同构*

$$H^r(G, M^D) \xrightarrow{\simeq} H^{2-r}(G, M)^*, \forall r \geqslant 1$$

和

$$\widehat{H}^0(G, M^D) \xrightarrow{\simeq} H^2(G, M)^*,$$

其中$M^D = Hom(M, K^{s*})$。$H^1(G, M)$和$H^1(G, M^D)$均有限。如果M有限，那么$\widehat{H}^0(G, M^D) = H^0(G, M^D)$也有限。

证明. 可以由与推论1.3相同的方法由定理和谱序列得出。 □

问题.

文献[13, I.2.14]陈述了上述关于Hensel域的定理，并给出一个简短的证明。该证明希望利用Hensel域的类域论和[13, I.1.8]得出上述结论。笔者猜测[2] 原文希望模仿[13, I.2.1]（即本文中定理1.1）的证明（参见本文附录）。这里存在的问题是，在Hensel域的情况下，如果$char(K) = p \neq 0$，那么类域论只能给出p部分以外的信息。而利用同调代数证明的[13, I.1.8]（即本文附录A.1）其中关键一步是：取G的开子群H，使得H平凡作用在M上，然后利用短正合列$0 \to M \to Ind_H^G M \to Coker \to 0$和群上同调的Shapiro引理。但是当$M$没有$p$-扭的时候，并不能保证$Coker$也没有$p$-扭。这正是希望证明Hensel域情形时要使用[13, I.1.8]所遇到的困难。而在局部域情形，局部类域论给出的信息并不需要躲避p部分，所以无需考虑$Coker$是否带p-扭（注意上述两个定理的陈述，局部域情形对偶性并不需要对p-扭有任何假设，仅仅是有限性才需要无p-扭的假设；而Hensel域情形，对偶性的成立也必须假设无p-扭）。另外，在取准有限完备化时，需要用到一些局部域具有而Hensel域不具有的拓扑性质，例如局部紧，（参见本文附录的证明以及[6, Appendix]）才能保证准有限完备化正合列后仍然得到正合列。因而Hensel域的情形似乎难以直接模仿非阿基米德局部域的情形给出证明。

上述陈述的这些理由表明文献[13]对定理1.4 的证明并不清晰，本文的目的在于给出定理1.4一个完整的证明。主要思路是利用已知的定理1.1的结论，

[2]原文并没有明确给出完整的证明。

然后在无p-扭的假设下，等同局部域和Hensel域两种情况下所牵涉的上同调群和Ext群。

接下来一章讨论一些相关的预备知识，例如Hensel域的一些性质。最后一章中将给出定理1.4的证明。附录中参考[13]收录了非阿基米德局部域算术对偶定理的一个简略的证明。

第二章　一些预备知识

在本章中，我们始终假设R是一个离散赋值环，其分式域为K，$\widehat{R}$和$\widehat{K}$分别是他们的完备化，我们知道$\widehat{K}$是$\widehat{R}$的分式域，而且$\widehat{K}$是一个非阿基米德局部域。

2.1　Greenberg逼近定理

假设X是一个R上有限型的仿射概形，$\widehat{R}$有理点集合$X(\widehat{R})$带有由$\widehat{R}$的完备离散赋值拓扑诱导的拓扑，$X(R) \subseteq X(\widehat{R})$取诱导子拓扑。对于$X(K)$和$X(\widehat{K})$，我们有相同的约定。

定理 2.1 (Greenberg). *假设X是一个R上有限型的仿射概形。如果R是Hensel的卓越的，那么$X(R)$在$X(\widehat{R})$中稠密，其中$X(\widehat{R})$取由$\widehat{R}$的拓扑自然诱导的拓扑。*

证明. 参见[4]。 □

引理 2.2 (Nagata). *假设X是一个R上有限型的仿射概形，那么，存在R-概形的开浸入$j : X \to \bar{X}$使得X的象在$\bar{X}$中Zariski稠密，而且$\bar{X}$是一个R上有限型的合适的（proper）概形。*

证明. 参见[14]或者[12]。 □

命题 2.3. *假设X是一个R上有限型的概形。如果R是Hensel的卓越的，那么$X(K)$在$X(\widehat{K})$中稠密（由$\widehat{K}$诱导的拓扑）。*

证明. 通过取X的开仿射覆盖，根据定理2.1，我们得到$X(R)$在$X(\widehat{R})$中稠密。如果X在R上合适（proper），那么由赋值判别法则得到$X(R) = X(K)$以及$X(\widehat{R}) = X(\widehat{K})$，于是$X(K)$在$X(\widehat{K})$中稠密。一般地，由引理2.2，我们有紧化$j : X \to \bar{X}$。因为$\bar{X}$是合适的（proper），所以$\bar{X}(K)$在$\bar{X}(\widehat{K})$中稠密。限制到$\bar{X}(\widehat{K})$ 的开子集$X(\widehat{K})$上，我们因而得到$X(K) = \bar{X}(K) \cap X(\widehat{K})$在$X(\widehat{K})$ 中稠密。 □

推论 2.4. *假设X是一个K上有限型的仿射概形，那么$X(K)$在$X(\widehat{K})$中稠密（由$\widehat{K}$诱导的拓扑）。*

证明. 为了应用上述命题的结论，我们只需要证明存在X的于R上的一个模型X_0，更确切的说，即寻找有限型的R-概形X_0 使得其一般纤维K-同构于X，于是我们有$X_0(K) = X(K)$以及$X_0(\widehat{K}) = X(\widehat{K})$。 事实上，由于$X$于$K$上是有限型的，于是可以把$X$写成$K$上某个仿射空间$\mathbb{A}_K^n$的闭子概形，由有限个系数在$K$中的多项式定义。乘以所有系数的分母的最小公倍数，我们得到一组（有限个）系数在R中的多项式，他们定义了R上仿射空间$\mathbb{A}_R^n$的一个闭子概形，记为X_0。则$X_0 \to Spec(R)$是有限型的，而且$X_0 \times_{Spec(R)} Spec(K) \simeq X$，即$X_0$是我们寻找的模型。 □

注 1. （1）注意到证明中我们仅需要X的一个在R上有限型的模型，因此这个推论对所有K上有限型的拟射影概形均成立。例如，对K上的Abel簇也成立。

（2）我们仅对K上有限型的仿射群概形使用上述推论。

推论 2.5. *假设X是一个K上有限型的仿射群概形，那么$\widehat{X(K)} \to \widehat{X(\widehat{K})}$是一个拓扑群的同构。(其中顶部的$\widehat{\ }$表示取拓扑群的准有限完备化[1])*

证明. 任取U为$X(\widehat{K})$的开子群，于是$X(K)\cap U$为$X(K)$的开子群。根据上述推论，$X(K)$于$X(\widehat{K})$中稠密，于是

$$X(K)/X(K)\cap U \simeq X(K)U/U = X(\widehat{K})/U。$$

因而，U在$X(\widehat{K})$中是有限指标的当且仅当$X(K)\cap U$在$X(K)$中是有限指标的。于是，由准有限完备化的定义马上得到$\widehat{X(K)} \simeq \widehat{X(\widehat{K})}$。 □

2.2 Hensel域的类域论

绝大多数局部类域论的结论都可以推广到Hensel域上，本节中K为Hensel域，假设其剩余类域有限，记$G_K = Gal(K^s/K)$。

定理 2.6. *(G_K, K^{s*})是一个类形式(class formation)，我们有互反映射*

$$rec_K : K^* \to G_K^{ab},$$

对K的所有有限Abel扩张F，它诱导了同构

$$K^*/N_{F/K}F^* \xrightarrow{\simeq} Gal(F/K)。$$

[1]即$\widehat{H} = \varprojlim_N H/N$其中$N$跑遍$H$的所有有限指标的正规开子群。

证明. 参见[13, I.Appendix]。 □

定理 2.7. *假设Hensel的卓越的离散赋值环R的剩余类域有限，那么*

（1）所有$\widehat{K}$的有限可分扩张均具有$\widehat{F}$的形式，其中F是K的有限可分扩张，而且$[F:K]=[\widehat{F}:\widehat{K}]$；

（2）域K于$\widehat{K}$中代数闭，因此K的代数闭包与$\widehat{K}$于K上线性地不连接（linearly disjoint）。

因而，$F\mapsto\widehat{F}$给出了从K的有限可分扩张的集合到$\widehat{K}$的有限可分扩张的集合之间的一个双射，从而，$G_K\simeq G_{\widehat{K}}$。

证明. （证明参考[13, I.Appendix]）

（1）对于$\widehat{K}$的任一有限可分扩张L，令$L=\widehat{K}(\alpha)$，我们取$F=K(\beta)$其中β是一个系数在K中且足够接近α的极小多项式的多项式的根，则由Krasner引理（参见[8, II.2]）得$L=\widehat{F}$。

（2）假设K于$\widehat{K}$中不是代数闭的，则存在$\alpha\in\widehat{K}$与R上整但又不在R中，令其与K上的极小多项式为$f(X)$。由于α于$\widehat{R}$上整，于是$\alpha\in\widehat{R}$，即$f(X)$于$\widehat{R}$中有解，根据Greenberg逼近定理2.1，f于R中也有解，但由f的取法，f是K上的不可约多项式，矛盾。因此，K于$\widehat{K}$中是代数闭的。另一方面R是卓越的，$\widehat{K}$是K的可分扩张，于是K的代数闭包与$\widehat{K}$于K上线性地不连接（linearly disjoint）（参见[7, III.1]）。 □

由局部类域论以及Hensel域的类域论，我们得到以下交换图，其中各行均正合

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R^\times \arrow[r] \arrow[d, "i"] & K^* \arrow[r, "ord"] \arrow[d, "rec_K"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \widehat{R}^\times \arrow[r] & G_{\widehat{K}}^{ab}=G_K^{ab} \arrow[r] & \widehat{\mathbb{Z}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

根据蛇形引理，我们得到正合列

$$0\to\widehat{R}^\times/R^\times\to coker(rec_K)\to\widehat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}\to 0。$$

命题 2.8. *如果R是卓越的（而且剩余类域有限），则对于素数$l\neq char(K)$，$coker(rec_K)$是l-唯一可除的，即“乘l”映射是同构。*

证明. 由于$\widehat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}$总是$l$-唯一可除的，因此由蛇形引理易归结为证明$\widehat{R}^\times/R^\times$是唯一可除的。由上述命题，$K$在$\widehat{K}$中是代数闭的，于是得到“唯一”。为证可除性，考虑$f = X^l - a$，其中$a \in \widehat{R}^\times$。如果$|1-a|_{\widehat{K}} < |l|^2_{\widehat{K}}$，那么由Hensel 引理知存在$x \in \widehat{R}^\times$是$f$的根。注意到$l \neq char(K)$，于是$U = \{a \in \widehat{R}^\times; |1-a|_{\widehat{K}} < |l|^2_{\widehat{K}}\}$ 是$\widehat{R}^\times$的一个非空开子集，而且$U \subseteq (\widehat{R}^\times)^l$。对$\mathbb{G}_m$应用Greenberg逼近定理2.1，$R^\times$于$\widehat{R}^\times$中稠密，于是对于任一$b \in \widehat{R}^\times$均存在$b' \in R^\times$使得$a = b/b' \in U$。即有$x \in \widehat{R}^\times$使得$x^l = a = b/b'$，$\widehat{R}^\times/R^\times$是$l$-可除的。 □

注 2. 用相同的方法，我们可以证明如果$char(K) \nmid n$则$\widehat{K}^*/K^*$是n-唯一可除的，由此推出$K^*/K^{*n} \simeq \widehat{K}^*/\widehat{K}^{*n}$。

第三章　Hensel域上算术对偶定理的证明

本章我们将证明定理1.4。

引理 3.1. *假设(G, C)是一个类形式（class formation），M是一个（作为Abel群）有限生成的离散G-模，那么对$r \geqslant 2$，映射*

$$\alpha^r(G, M) : Ext^r_G(M, C) \to H^{2-r}(G, M)^*$$

是双射；$\alpha^1(G, M)$也是双射，如果M是无扭的。

证明. 证明只用到同调代数的知识，证明概要参见本文附录，完整证明参见[13, I.1.8]。 □

定理1.4的证明. 我们已知对于非阿基米德局部域$\widehat{K}$，局部对偶定理1.1成立。而定理2.7告诉我们$G = Gal(\widehat{K}^s/\widehat{K}) \simeq Gal(K^s/K)$，在假设条件

（1）R是Hensel的卓越的，其剩余类于有限;

（2）M无$char(K)$-扭；

我们将证明

$$Ext^r_G(M, K^{s*}) \simeq Ext^r_G(M, \widehat{K}^{s*}), \forall r \geqslant 1$$

以及

$$\widehat{Hom}_G(M, K^{s*}) \simeq \widehat{Hom}_G(M, \widehat{K}^{s*}),$$

因而Hensel域的对偶定理由非阿基米德局部域的对偶定理直接得到。

由上一章的注2，我们知道对K的任何有限可分扩张L和任意素数$l \neq char(K)$，$\widehat{L}^*/L^*$是l-唯一可除的，根据定理2.7（1）取正向极限得到$\widehat{K}^{s*}/K^{s*}$也是l-唯一可除的。由于M是有限生成的Abel群而且不带$char(K)$-扭，从而，

$$Ext^s(M, \widehat{K}^{s*}/K^{s*}) = 0, \forall s \geqslant 1。$$

然而，我们有谱序列

$$H^r(G, Ext^s(M, \widehat{K}^{s*}/K^{s*})) \Rightarrow Ext^{r+s}_G(M, \widehat{K}^{s*}/K^{s*}),$$

于是，我们得到

$$H^r(G, Hom(M, \widehat{K}^{s*}/K^{s*})) = Ext_G^r(M, \widehat{K}^{s*}/K^{s*}), \forall r。$$

如果M是有限的，由它无$char(K)$-扭以及$\widehat{K}^{s*}/K^{s*}$ 的l-唯一可除性，我们得到

$$Hom(M, \widehat{K}^{s*}/K^{s*}) = 0。$$

于是，

$$Ext_G^r(M, \widehat{K}^{s*}/K^{s*}) = 0, \forall r。$$

考虑短正合列

$$1 \to K^{s*} \to \widehat{K}^{s*} \to \widehat{K}^{s*}/K^{s*} \to 1,$$

取其Ext长正合序列，我们马上得到

$$Ext_G^r(M, K^{s*}) \simeq Ext_G^r(M, \widehat{K}^{s*}), \forall r$$

若M有限。

如果M是无扭的，注意到$G = G_K \simeq G_{\widehat{K}}$，由引理3.1以及定理1.1，我们得到

$$Ext_G^r(M, K^{s*}) \simeq H^{2-r}(G, M)^* \simeq Ext_G^r(M, \widehat{K}^{s*})$$

对所有$r \geqslant 1$成立。

一般地，考虑短整合列

$$0 \to M_t \to M \to M/M_t \to 0,$$

其$Ext_G(-, K^{s*})$长正合列、$Ext_G(-, \widehat{K}^{s*})$长正合列以及五引理给出同构

$$Ext_G^r(M, K^{s*}) \simeq Ext_G^r(M, \widehat{K}^{s*}) \forall r \geqslant 1。$$

而对于$r = 0$，注意到$Hom_G(M, K^{s*})$和$Hom_G(M, \widehat{K}^{s*})$分别是$K$上的仿射群概形$Spec((K^s[M])^G)$的$K$-有理点集合和$\widehat{K}$-有理点集合（参见[19]），根据推论2.5，它们的准有限完备化作为拓扑群同构，

$$\widehat{Hom}_G(M, K^{s*}) \simeq \widehat{Hom}_G(M, \widehat{K}^{s*})。$$

综上，我们完成了证明。 □

附录 A 局部算术对偶定理的简略证明

为了讨论Hensel域情形的算术对偶定理的证明能否直接模仿非阿基米德局部域算术对偶定理的证明，本附录给出非阿基米德局部域上算术对偶定理1.1的一个简略的证明，此证明参考[13, I.2]。

引理 A.1. *假设(G, C)是一个类形式（class formation），M是一个（作为Abel群）有限生成的离散G-模，那么*

（1）对$r \geqslant 2$，映射

$$\alpha^r(G, M) : Ext^r_G(M, C) \to H^{2-r}(G, M)^*$$

是双射；$\alpha^1(G, M)$也是双射，如果M是无扭的。特别地，对$r \geqslant 3$，$Ext^r_G(M, C) = 0$;

（2）如果对任意整数m以及任意G的开子群U，$\alpha^1(U, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$是双射，那么$\alpha^1(G, M) : Ext^1_G(M, C) \to H^1(G, M)^*$也是双射;

（3）如果对任意整数m以及任意G的开子群U，$\alpha^0(U, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$是满射（相应地，双射），那么对有限$G$-模$M$，$\alpha^0(G, M) : Ext^0_G(M, C) \to H^2(G, M)^*$ 也是满射（相应地，双射）。

证明概要（参考[13]）.

首先由类形式的定义可以得到，对于任意整数m，我们有$m|ord(G)$，其中$ord(G)$是准有限群G的阶（取值为超自然数（supernatural number）），由此可以证明对于$r \geqslant 4$，$Ext^r_G(M, C) = 0$（用到类形式的Tate-Nakayama引理）。然后利用数学归纳法。引理的假设条件给出平凡G-模的同态α的信息。对一般的离散G-模M，取G的开子群U使得M是平凡U-模，然后考虑短正合列$0 \to M \to Ind^G_U M \to Coker \to 0$相应的$Ext$长正合列和上同调长正合列，利用群上同调的Shapiro引理以及同调代数交换图追踪完成归纳法证明。

完整的证明参考[13, I.1]。 □

定义 A.1. 令G是一个准有限群，称G的严格上同调维数是n（可能是正无穷），如果n是使得以下性质满足的最大整数：对任意$r > n$以及任意离散G-模M，$H^r(G, M) = 0$。

引理 A.2. 令G为一个非阿基米德局部域的绝对$Galois$群，则G的严格上同调维数是2。

证明. 参见[15]或者[1]。 □

定理*1.1*（非阿基米德局部域的算术对偶定理）的证明概要（参考*[13]*）.

首先利用谱序列以及对一些简单的G-模的计算，我们得出结论中的各个群的有限性，此处省略此部分的详细证明，关于有限性的证明参考[13, I.2]。

域K是非阿基米德局部域，其绝对Galois群为G。局部类域论告诉我们(G, K^{s*})是一个类形式，于是有互反映射$rec_K : K^* \to G^{ab}$以及$\alpha^r(G, M)$。由引理，G的严格上同调维数是2，由此我们可以验证[1]

$$\alpha^0(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = rec_m : \mu_m(K) \to (G^{ab})_m$$

和

$$\alpha^1(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = rec^{(m)} : K^*/K^{*m} \to (G^{ab})^{(m)}。$$

局部类域论还告诉我们互反映射rec是单射，而且$coker(rec) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}$是一个唯一可除群，于是上述两个同态均是同构。把$G$换成任意开子群$U$，我们仍然有相同的论断。我们可以应用引理A.1，于是我们只剩下当M不是有限模时关于$\widehat{\alpha}^0(G, M)$的论断需要证明。

局部类域论还告诉我们$\widehat{rec} : \widehat{K^*} \to G^{ab}$（准有限完备化）是一个拓扑群同构，即$\widehat{\alpha}^0(G, \mathbb{Z})$是同构，由此，我们知道对于（作为Abel群）有限生成的平凡G-模M，$\widehat{\alpha}^0(G, M)$是同构。我们取G的平凡作用于M上的开子群U，令$M_* = Ind_U^G M$，考虑短正合序列$0 \to M \to M_* \to M_1 \to 0$诱导的长正合列（注意使用Shapiro引理）

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_G(M_1, K^{s*}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^0(G,M_1)"] & Hom_U(M, K^{s*}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^0(U,M)"] & Hom_G(M, K^{s*}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^0(G,M)"] & Ext^1_G(M_1, K^{s*}) \arrow[d, "\alpha^1(G,M_1)"] \\
0 \arrow[r] & H^2(G, M_1)^* \arrow[r] & H^2(U, M)^* \arrow[r] & H^2(G, M)^* \arrow[r] & H^1(G, M_1)^*.
\end{tikzcd}$$

我们对整个交换图取准有限完备化，注意到第二行里出现的项都是扭群的Pontryagin对偶群，于是都是准有限的，从而取准有限完备化后不变，而证明

[1]对任意Abel群A，我们记$A_n = ker(n : A \to A)$和$A^{(n)} = coker(n : A \to A) = A/nA$，Abel群的同态$\phi : A \to A'$诱导群同态$\phi_n : A_n \to A'_n$和$\phi^{(n)} : A^{(n)} \to A'^{(n)}$。

的开头说明了第一行第四项是有限群，因此准有限完备化后也不变。于是我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \widehat{Hom_G}(M_1, K^{s*}) & \longrightarrow & \widehat{Hom_U}(M, K^{s*}) & \longrightarrow & \widehat{Hom_G}(M, K^{s*}) & \longrightarrow & Ext^1_G(M_1, K^{s*}) \\ & \Big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\alpha}^0(G,M_1)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\alpha}^0(U,M)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\alpha}^0(G,M)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha^1(G,M_1)} \\ 0 \longrightarrow & H^2(G, M_1)^* & \longrightarrow & H^2(U, M)^* & \longrightarrow & H^2(G, M)^* & \longrightarrow & H^1(G, M_1)^*. \end{array}$$

其中第一行仍然保持正合是因为：$Hom_G(M, K^{s*})$（其他两项同理）是K上仿射群概形$X = Spec((K^s[M])^G)$的K-有理点集合$X(K)$，而X的单位连通分支X^0是一个K上的约化代数群，对于非阿基米德局部域K和这样的代数群X，$X(K)$是一个局部紧的、Hausdorff的、完全不连通的、紧生成的拓扑群（参见[16]），然而对于由这样的群组成的正合序列，取准有限完备化后仍保持正合（参见[6, Appendix]）。我们现在已经知道$\alpha^1(U, M)$、$\alpha^1(G, M_1)$和$\widehat{\alpha}^0(U, M)$是同构，于是$\widehat{\alpha}^0(G, M)$是满射，这对任何G-模M成立，于是$\widehat{\alpha}^0(G, M_1)$ 也是满射，从而再次追踪交换图得到$\widehat{\alpha}^0(G, M)$是单射。 □

参考文献

[1] A. Brumer. Pseudocompact algebras, profinite groups, and class formations. *J.Algebra*, 4:442–470, 1966.

[2] C. Deninger. On Artin-Verdier duality for function fields. *Math. Z.*, 188:91–100, 1984.

[3] C. D. Gonzalez-Aviles. Arithmetic duality theorems for 1-motives over function fields. It is available from internet, arXiv:0709.4255.

[4] M. Greenberg. Rational points in henselian discrete valuation rings. *Publ. Math. I.H.E.S*, 31:59–64, 1966.

[5] K. Haberland. *Galois Cohomology of Algebraic Number Fields.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.

[6] D. Harari and T. Szamuely. Arithmetic duality theorems for 1-motives. *J. Reine Angew. Math.*, 578:93–128, 2005.

[7] S. Lang. *Introduction to Albebraic Geometry.* Interscience, 1958.

[8] S. Lang. *Algebraic Number Theory.* Springer-Verlag, second edition, 1994.

[9] Q. Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves.* Oxford University Press, 2002.

[10] H. Matsumura. *Commutative Algebra.* The Benjamin/Cummings Publishing Company, second edition, 1980.

[11] B. Mazur. Notes on étale cohomology of number fields. 6:521–552, 1973.

[12] J.S. Milne. *Étale Cohomology.* Princeton University Press, 1980.

[13] J.S. Milne. *Arithmetic Duality Theorems.* BookSurge, LLC, second edition, 2006.

[14] M. Nagata. A generalization of the imbedding problem of an abstract variety in a complete variety. *J. Math. Kyoto Univ.*, 3:89–102, 1963.

[15] J. Neukirch, A. Schmidt, and K. Wingberg. *Cohomology of Number Fields*. Springer-Verlag, first edition, 2000.

[16] V.P. Platonov and A.S. Rapinchuk. *Algebraic Groups and Number Theory*. Academic Press, 1994.

[17] J.-P. Serre. *Corps Locaux*. Hermann, fourth edition, 1968.

[18] J. Tate. Duality theorems in Galois cohomology over number fields. *Proc. Intern. Congress Math.*, pages 288–295, 1962.

[19] W.C. Waterhouse. *Introduction to Affine Group Schemes*. Graduate Texts in Math. 66. Springer-Verlag, 1979.

致　谢

值此论文完成之际，谨在此向多年来给予我关心和帮助的老师、同学、朋友和家人表示衷心的感谢!

特别地，郑重地感谢徐飞老师，感谢他在科学院期间对我的指导和他对我出国留学深造的鼓励和推荐。感谢在科学院期间李克正老师和田野老师对我的教育培养。最后感谢D.Harari教授推荐给我算术对偶定理这个有趣的主题。