Principe local-global pour les zéro-cycles

Université Paris-Sud 11, Orsay, France

梁 永祺

Université Paris-Sud 11

4 oct. 2011

Soutenance à Orsay, France.

Notations

- k : un corps de nombres
- Ω (resp. Ω^∞, Ω^{f}, $\Omega^{\mathbb{R}}$, $\Omega^{\mathbb{C}}$) : ensemble des places de k (resp. ...)
- k_v ($v \in \Omega$) : complété de k à la place v
- X : une variété (i.e. schéma séparé de type fini) sur k, supposée géométriquement intègre, lisse et propre
- $Br(X) := H^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_m)$ groupe de Brauer cohomologique
- $X_v = X \otimes_k k_v$
- $\widehat{M} := \varprojlim_n M/nM$ pour un groupe abélien M
- fibration = un morphisme dominant à fibre générique géométriquement intègre

Principe de Hasse et approximation faible

- $X(k) \subseteq \prod_{v\in\Omega} X(k_v)$

Définition

Pour une famille de variétés, si $\prod_v X(k_v) \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$ on dit que X satisfait le *principe de Hasse*, noté par (PH-pt). Si $\overline{X(k)} = \prod_v X(k_v)$ on dit que X satisfait l'*approximation faible*, noté par (AF-pt).

- Ce n'est pas souvent le cas!
- Exemple(Selmer) : X : la courbe (de genre 1) définie par $3x_0^3 + 4x_1^3 + 5x_2^3 = 0$
- $X(\mathbb{Q}_v) \neq \emptyset$ pour toute $v \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ mais $X(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Principe de Hasse et approximation faible

- $X(k) \subseteq \prod_{v\in\Omega} X(k_v)$

Définition

Pour une famille de variétés, si $\prod_v X(k_v) \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$ on dit que X satisfait le *principe de Hasse*, noté par (PH-pt). Si $\overline{X(k)} = \prod_v X(k_v)$ on dit que X satisfait l'*approximation faible*, noté par (AF-pt).

- Ce n'est pas souvent le cas!
- Exemple(Selmer) : X : la courbe (de genre 1) définie par $3x_0^3 + 4x_1^3 + 5x_2^3 = 0$
- $X(\mathbb{Q}_v) \neq \emptyset$ pour toute $v \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ mais $X(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Principe de Hasse et approximation faible

- $X(k) \subseteq \prod_{v\in\Omega} X(k_v)$

Définition

Pour une famille de variétés, si $\prod_v X(k_v) \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$ on dit que X satisfait le *principe de Hasse*, noté par (PH-pt). Si $\overline{X(k)} = \prod_v X(k_v)$ on dit que X satisfait l'*approximation faible*, noté par (AF-pt).

- Ce n'est pas souvent le cas!
- Exemple(Selmer) : X : la courbe (de genre 1) définie par $3x_0^3 + 4x_1^3 + 5x_2^3 = 0$
- $X(\mathbb{Q}_v) \neq \emptyset$ pour toute $v \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ mais $X(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Principe de Hasse et approximation faible

- $X(k) \subseteq \prod_{v\in\Omega} X(k_v)$

Définition

Pour une famille de variétés, si $\prod_v X(k_v) \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$ on dit que X satisfait le *principe de Hasse*, noté par (PH-pt). Si $\overline{X(k)} = \prod_v X(k_v)$ on dit que X satisfait l'*approximation faible*, noté par (AF-pt).

- Ce n'est pas souvent le cas!
- Exemple(Selmer) : X : la courbe (de genre 1) définie par $3x_0^3 + 4x_1^3 + 5x_2^3 = 0$
- $X(\mathbb{Q}_v) \neq \emptyset$ pour toute $v \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ mais $X(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Principe de Hasse et approximation faible

- $X(k) \subseteq \prod_{v\in\Omega} X(k_v)$

Définition

Pour une famille de variétés, si $\prod_v X(k_v) \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$ on dit que X satisfait le *principe de Hasse*, noté par (PH-pt). Si $\overline{X(k)} = \prod_v X(k_v)$ on dit que X satisfait l'*approximation faible*, noté par (AF-pt).

- Ce n'est pas souvent le cas!
- Exemple(Selmer) : X : la courbe (de genre 1) définie par $3x_0^3 + 4x_1^3 + 5x_2^3 = 0$
- $X(\mathbb{Q}_v) \neq \emptyset$ pour toute $v \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ mais $X(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Obstruction de Brauer-Manin

- Afin d'expliquer le défaut du principe de Hasse
- Manin (1970's) :
- Accouplement de Brauer-Manin (X propre)

$$[\prod_{v\in\Omega} X(k_v)] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$(\{x_v\}_{v\in\Omega},\beta) \mapsto \langle\{x_v\}_v,\beta\rangle := \sum_{v\in\Omega} inv_v(\beta(x_v))$$

où l'évaluation $\beta(x_v)$ est le pull-back de $\beta \in Br(X)$ par $x_v : Spec(k_v) \to X$ et où $inv_v : Br(k_v) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'invariant local.

- L'*ensemble de Brauer-Manin* $[\prod_{v\in\Omega} X(k_v)]^{Br}$:= "noyau" à gauche de cet accouplement.

Obstruction de Brauer-Manin

- Afin d'expliquer le défaut du principe de Hasse
- Manin (1970's) :
- Accouplement de Brauer-Manin (X propre)

$$[\prod_{v\in\Omega} X(k_v)] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$(\{x_v\}_{v\in\Omega},\beta) \mapsto \langle \{x_v\}_v,\beta\rangle := \sum_{v\in\Omega} inv_v(\beta(x_v))$$

où l'évaluation $\beta(x_v)$ est le pull-back de $\beta \in Br(X)$ par $x_v : Spec(k_v) \to X$ et où $inv_v : Br(k_v) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'invariant local.

- L'*ensemble de Brauer-Manin* $[\prod_{v\in\Omega} X(k_v)]^{Br}$:= "noyau" à gauche de cet accouplement.

Obstruction de Brauer-Manin

- Afin d'expliquer le défaut du principe de Hasse
- Manin (1970's) :
- Accouplement de Brauer-Manin (X propre)

$$[\prod_{v\in\Omega} X(k_v)] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$(\{x_v\}_{v\in\Omega},\beta) \mapsto \langle\{x_v\}_v,\beta\rangle := \sum_{v\in\Omega} inv_v(\beta(x_v))$$

où l'évaluation $\beta(x_v)$ est le pull-back de $\beta \in Br(X)$ par $x_v : Spec(k_v) \to X$ et où $inv_v : Br(k_v) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'invariant local.

- L'*ensemble de Brauer-Manin* $[\prod_{v\in\Omega} X(k_v)]^{Br}$:= "noyau" à gauche de cet accouplement.

Obstruction de Brauer-Manin

- Afin d'expliquer le défaut du principe de Hasse
- Manin (1970's) :
- Accouplement de Brauer-Manin (X propre)

$$\left[\prod_{v\in\Omega} X(k_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$(\{x_v\}_{v\in\Omega},\beta) \mapsto \langle\{x_v\}_v,\beta\rangle := \sum_{v\in\Omega} inv_v(\beta(x_v))$$

  où l'évaluation $\beta(x_v)$ est le pull-back de $\beta \in Br(X)$ par $x_v : Spec(k_v) \to X$ et où $inv_v : Br(k_v) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'invariant local.

- L'*ensemble de Brauer-Manin* $\left[\prod_{v\in\Omega} X(k_v)\right]^{Br}$:= "noyau" à gauche de cet accouplement.

Obstruction de Brauer-Manin

- D'après la suite exacte $0 \to Br(k) \to \bigoplus_v Br(k_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$
- $X(k) \subseteq \overline{X(k)} \subseteq [\prod_v X(k_v)]^{Br} \subseteq \prod_v X(k_v)$

Définition

Pour une famille de variétés, si $[\prod_v X(k_v)]^{Br} \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$ on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse*, noté par $(PH^{Br}$-pt). Si $\overline{X(k)} = [\prod_v X(k_v)]^{Br}$ on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible*, noté par $(AF^{Br}$-pt).

-

Obstruction de Brauer-Manin

- D'après la suite exacte $0 \to Br(k) \to \bigoplus_v Br(k_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$
- $X(k) \subseteq \overline{X(k)} \subseteq [\prod_v X(k_v)]^{Br} \subseteq \prod_v X(k_v)$

Définition

Pour une famille de variétés, si $[\prod_v X(k_v)]^{Br} \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$ on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse*, noté par $(PH^{Br}$-pt). Si $\overline{X(k)} = [\prod_v X(k_v)]^{Br}$ on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible*, noté par $(AF^{Br}$-pt).

Obstruction de Brauer-Manin

- D'après la suite exacte $0 \to Br(k) \to \bigoplus_v Br(k_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$
- $X(k) \subseteq \overline{X(k)} \subseteq [\prod_v X(k_v)]^{Br} \subseteq \prod_v X(k_v)$

Définition

Pour une famille de variétés, si $[\prod_v X(k_v)]^{Br} \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$ on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse*, noté par (PH^{Br}-pt). Si $\overline{X(k)} = [\prod_v X(k_v)]^{Br}$ on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible*, noté par (AF^{Br}-pt).

Zéro-cycles

- $Z_0(X)$: le groupe des zéro-cycles sur X

  $CH_0(X) := Z_0(X)/\sim$ le groupe de des zéro-cycles

  $A_0(X) = ker\left[CH_0(X) \xrightarrow{deg} \mathbb{Z}\right]$ (X propre)

- (Colliot-Thélène) accouplement de Brauer-Manin

$$\left[\prod_{v\in\Omega} Z_0(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

$$(\{\sum n_{P_v}P_v\}_v, b) \mapsto \sum_v n_{P_v} inv_v(cores_{k(P_v)/k_v}(b(P_v)));$$

$$\left[\prod_{v\in\Omega} CH_0(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

$$\left[\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

où le groupe de Chow modifié

$$CH_0'(X_v) = \begin{cases} CH_0(X_v), & v \in \Omega^f \\ CH_0(X_v)/N_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}CH_0(\overline{X}_v), & v \in \Omega^{\mathbb{R}} \\ 0, & v \in \Omega^{\mathbb{C}} \end{cases}$$

Zéro-cycles

- $Z_0(X)$: le groupe des zéro-cycles sur X
  $CH_0(X) := Z_0(X)/\sim$ le groupe de 周 des zéro-cycles
  $A_0(X) = ker\left[CH_0(X) \xrightarrow{deg} \mathbb{Z}\right]$ (X propre)
- (Colliot-Thélène) accouplement de Brauer-Manin

$$\left[\prod_{v\in\Omega} Z_0(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

$$(\{\sum n_{P_v} P_v\}_v, b) \mapsto \sum_v n_{P_v} inv_v(cores_{k(P_v)/k_v}(b(P_v)));$$

$$\left[\prod_{v\in\Omega} CH_0(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

$$\left[\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

où le groupe de Chow modifié

$$CH_0'(X_v) = \begin{cases} CH_0(X_v), & v \in \Omega^f \\ CH_0(X_v)/N_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} CH_0(\overline{X}_v), & v \in \Omega^{\mathbb{R}} \\ 0, & v \in \Omega^{\mathbb{C}} \end{cases}$$

Zéro-cycles

- $Z_0(X)$: le groupe des zéro-cycles sur X
  $CH_0(X) := Z_0(X)/\sim$ le groupe de 周 des zéro-cycles
  $A_0(X) = ker\left[CH_0(X) \xrightarrow{deg} \mathbb{Z}\right]$ (X propre)
- (Colliot-Thélène) accouplement de Brauer-Manin

$$\left[\prod_{v\in\Omega} Z_0(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

$$(\{\sum n_{P_v} P_v\}_v, b) \mapsto \sum_v n_{P_v} inv_v(cores_{k(P_v)/k_v}(b(P_v)));$$

$$\left[\prod_{v\in\Omega} CH_0(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

$$\left[\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

où le groupe de Chow modifié

$$CH_0'(X_v) = \begin{cases} CH_0(X_v), & v \in \Omega^f \\ CH_0(X_v)/N_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} CH_0(\overline{X}_v), & v \in \Omega^{\mathbb{R}} \\ 0, & v \in \Omega^{\mathbb{C}} \end{cases}$$

Zéro-cycles

- $Z_0(X)$: le groupe des zéro-cycles sur X
  $CH_0(X) := Z_0(X)/\sim$ le groupe de 周 des zéro-cycles
  $A_0(X) = ker\left[CH_0(X) \xrightarrow{deg} \mathbb{Z}\right]$ (X propre)
- (Colliot-Thélène) accouplement de Brauer-Manin

$$\left[\prod_{v\in\Omega} Z_0(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

$$(\{\sum n_{P_v} P_v\}_v, b) \mapsto \sum_v n_{P_v} inv_v(cores_{k(P_v)/k_v}(b(P_v)));$$

$$\left[\prod_{v\in\Omega} CH_0(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

$$\left[\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

où le groupe de Chow modifié

$$CH_0'(X_v) = \begin{cases} CH_0(X_v), & v \in \Omega^f \\ CH_0(X_v)/N_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} CH_0(\overline{X}_v), & v \in \Omega^{\mathbb{R}} \\ 0, & v \in \Omega^{\mathbb{C}} \end{cases}$$

Zéro-cycles

- $Z_0(X)$: le groupe des zéro-cycles sur X
  $CH_0(X) := Z_0(X)/\sim$ le groupe de 周 des zéro-cycles
  $A_0(X) = ker\left[CH_0(X) \xrightarrow{deg} \mathbb{Z}\right]$ (X propre)
- (Colliot-Thélène) accouplement de Brauer-Manin

$$\left[\prod_{v\in\Omega} Z_0(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

$$(\{\sum n_{P_v} P_v\}_v, b) \mapsto \sum_v n_{P_v} inv_v(cores_{k(P_v)/k_v}(b(P_v)));$$

$$\left[\prod_{v\in\Omega} CH_0(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

$$\left[\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

où le groupe de Chow modifié

$$CH_0'(X_v) = \begin{cases} CH_0(X_v), & v \in \Omega^f \\ CH_0(X_v)/N_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} CH_0(\overline{X}_v), & v \in \Omega^{\mathbb{R}} \\ 0, & v \in \Omega^{\mathbb{C}} \end{cases}$$

Zéro-cycles

- $Z_0(X)$: le groupe des zéro-cycles sur X
  $CH_0(X) := Z_0(X)/\sim$ le groupe de 周 des zéro-cycles
  $A_0(X) = ker\left[CH_0(X) \xrightarrow{deg} \mathbb{Z}\right]$ (X propre)
- (Colliot-Thélène) accouplement de Brauer-Manin

$$\left[\prod_{v\in\Omega} Z_0(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

$$(\{\sum n_{P_v} P_v\}_v, b) \mapsto \sum_v n_{P_v} inv_v(cores_{k(P_v)/k_v}(b(P_v)));$$

$$\left[\prod_{v\in\Omega} CH_0(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

$$\left[\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

où le groupe de Chow modifié

$$CH_0'(X_v) = \begin{cases} CH_0(X_v), & v \in \Omega^f \\ CH_0(X_v)/N_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} CH_0(\overline{X}_v), & v \in \Omega^{\mathbb{R}} \\ 0, & v \in \Omega^{\mathbb{C}} \end{cases}$$

Zéro-cycles

- $Z_0(X)$: le groupe des zéro-cycles sur X
  $CH_0(X) := Z_0(X)/\sim$ le groupe de 周 des zéro-cycles
  $A_0(X) = ker\left[CH_0(X) \xrightarrow{deg} \mathbb{Z}\right]$ (X propre)
- (Colliot-Thélène) accouplement de Brauer-Manin

$$\left[\prod_{v\in\Omega} Z_0(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

$$(\{\sum n_{P_v} P_v\}_v, b) \mapsto \sum_v n_{P_v} inv_v(cores_{k(P_v)/k_v}(b(P_v)));$$

$$\left[\prod_{v\in\Omega} CH_0(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

$$\left[\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v)\right] \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

où le groupe de Chow modifié

$$CH_0'(X_v) = \begin{cases} CH_0(X_v), & v \in \Omega^f \\ CH_0(X_v)/N_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} CH_0(\overline{X}_v), & v \in \Omega^{\mathbb{R}} \\ 0, & v \in \Omega^{\mathbb{C}} \end{cases}$$

Obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles

- complexe $CH_0(X) \to \prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v) \to Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$
- complexe
  $$(E)\ \ [CH_0(X)]^{\widehat{}} \to [\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v)]^{\widehat{}} \longrightarrow Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
- de même
  $$(E_0)\ \ [A_0(X)]^{\widehat{}} \to [\prod_{v\in\Omega} A_0(X_v)]^{\widehat{}} \longrightarrow Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
- **Question** : Est-ce qu'ils sont exacts?

Remarque (Wittenberg)

Exactitude de $(E) \Longrightarrow$

- Exactitude de (E_0)
- $(PH^{Br}\text{-}0cyc^1)$: *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse* pour les 0-cycles de degré 1 : l'existence de $z \in CH_0(X)$ de degré 1 en supposant l'existence d'une famille de zéro-cycles de degré 1 $\{z_v\} \perp Br(X)$.

Obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles

- complexe $CH_0(X) \to \prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v) \to Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$
- complexe
  $$(E)\ \ [CH_0(X)]^{\widehat{}} \to [\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v)]^{\widehat{}} \longrightarrow Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
- de même
  $$(E_0)\ \ [A_0(X)]^{\widehat{}} \to [\prod_{v\in\Omega} A_0(X_v)]^{\widehat{}} \longrightarrow Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
- **Question** : Est-ce qu'ils sont exacts?

Remarque (Wittenberg)

Exactitude de $(E) \Longrightarrow$

- Exactitude de (E_0)
- $(PH^{Br}$-0cyc[1]) : *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse* pour les 0-cycles de degré 1 : l'existence de $z \in CH_0(X)$ de degré 1 en supposant l'existence d'une famille de zéro-cycles de degré 1 $\{z_v\}\perp Br(X)$.

Obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles

- complexe $CH_0(X) \to \prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v) \to Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$
- complexe
  $$(E)\ \ [CH_0(X)]^{\widehat{}} \to [\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v)]^{\widehat{}} \longrightarrow Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
- de même
  $$(E_0)\ \ [A_0(X)]^{\widehat{}} \to [\prod_{v\in\Omega} A_0(X_v)]^{\widehat{}} \longrightarrow Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
- **Question** : Est-ce qu'ils sont exacts?

Remarque (Wittenberg)

Exactitude de $(E) \Longrightarrow$

- Exactitude de (E_0)
- $(PH^{Br}\text{-}0cyc^1)$: *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse* pour les 0-cycles de degré 1 : l'existence de $z \in CH_0(X)$ de degré 1 en supposant l'existence d'une famille de zéro-cycles de degré 1 $\{z_v\} \perp Br(X)$.

Obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles

- complexe $CH_0(X) \to \prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v) \to Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$
- complexe
$$(E)\ \ [CH_0(X)]^{\widehat{}} \to [\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v)]^{\widehat{}} \longrightarrow Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
- de même
$$(E_0)\ \ [A_0(X)]^{\widehat{}} \to [\prod_{v\in\Omega} A_0(X_v)]^{\widehat{}} \longrightarrow Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
- **Question** : Est-ce qu'ils sont exacts?

Remarque (Wittenberg)

Exactitude de $(E) \Longrightarrow$

- Exactitude de (E_0)
- $(PH^{Br}$-0cyc[1]) : *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse* pour les 0-cycles de degré 1 : l'existence de $z \in CH_0(X)$ de degré 1 en supposant l'existence d'une famille de zéro-cycles de degré 1 $\{z_v\} \perp Br(X)$.

Obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles

- complexe $CH_0(X) \to \prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v) \to Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$
- complexe

$$(E)\ \ [CH_0(X)]^{\widehat{}} \to [\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v)]^{\widehat{}} \longrightarrow Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

- de même

$$(E_0)\ \ [A_0(X)]^{\widehat{}} \to [\prod_{v\in\Omega} A_0(X_v)]^{\widehat{}} \longrightarrow Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

- **Question** : Est-ce qu'ils sont exacts?

Remarque (Wittenberg)

Exactitude de $(E) \Longrightarrow$

- Exactitude de (E_0)
- $(PH^{Br}\text{-0cyc}^1)$: *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse* pour les 0-cycles de degré 1 :

l'existence de $z \in CH_0(X)$ de degré 1 en supposant l'existence d'une famille de zéro-cycles de degré 1 $\{z_v\}\perp Br(X)$.

Obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles

Définition

Fixons $\delta \in \mathbb{Z}$, on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible* pour les zéro-cycles de degré δ, noté par (AF^{Br}-0cyc$^{\delta}$), si la propriété suivante est vérifiée

- Pour tout ensemble fini $S \subset \Omega$, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, étant donné une famille $\{z_v\} \perp Br(X)$ de zéro-cycles de degré δ, il existe $z = z_{n,S} \in Z_0(X)$ de degré δ tel que $z = z_v$ dans $CH_0(X_v)/n$ pour toute $v \in S$.

Remarque

- Exactitude de $(E_0) \Rightarrow$ (AF^{Br}-0cyc^0) par définition!
- Exactitude de $(E) \Rightarrow$ (AF^{Br}-0cyc^1) d'après un petit argument.
- Exactitude de $(E) \Rightarrow$ (AF^{Br}-0cyc$^{\delta}$) pour tout δ, s'il existe un zéro-cycle de degré 1 sur X.

Obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles

Définition

Fixons $\delta \in \mathbb{Z}$, on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible* pour les zéro-cycles de degré δ, noté par (AF^{Br}-0cyc$^{\delta}$), si la propriété suivante est vérifiée

> Pour tout ensemble fini $S \subset \Omega$, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, étant donné une famille $\{z_v\} \perp Br(X)$ de zéro-cycles de degré δ, il existe $z = z_{n,S} \in Z_0(X)$ de degré δ tel que $z = z_v$ dans $CH_0(X_v)/n$ pour toute $v \in S$.

Remarque

- Exactitude de $(E_0) \Rightarrow$ (AF^{Br}-0cyc^0) par définition!
- Exactitude de $(E) \Rightarrow$ (AF^{Br}-0cyc^1) d'après un petit argument.
- Exactitude de $(E) \Rightarrow$ (AF^{Br}-0cyc$^{\delta}$) pour tout δ, s'il existe un zéro-cycle de degré 1 sur X.

Obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles

Définition

Fixons $\delta \in \mathbb{Z}$, on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible* pour les zéro-cycles de degré δ, noté par (AF^{Br}-0cyc$^{\delta}$), si la propriété suivante est vérifiée

> Pour tout ensemble fini $S \subset \Omega$, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, étant donné une famille $\{z_v\} \perp Br(X)$ de zéro-cycles de degré δ, il existe $z = z_{n,S} \in Z_0(X)$ de degré δ tel que $z = z_v$ dans $CH_0(X_v)/n$ pour toute $v \in S$.

Remarque

- Exactitude de $(E_0) \Rightarrow$ (AF^{Br}-0cyc^0) par définition!
- Exactitude de $(E) \Rightarrow$ (AF^{Br}-0cyc^1) d'après un petit argument.
- Exactitude de $(E) \Rightarrow$ (AF^{Br}-0cyc$^{\delta}$) pour tout δ, s'il existe un zéro-cycle de degré 1 sur X.

Obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles

Définition

Fixons $\delta \in \mathbb{Z}$, on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible* pour les zéro-cycles de degré δ, noté par (AF^{Br}-0cyc$^{\delta}$), si la propriété suivante est vérifiée

> Pour tout ensemble fini $S \subset \Omega$, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, étant donné une famille $\{z_v\} \perp Br(X)$ de zéro-cycles de degré δ, il existe $z = z_{n,S} \in Z_0(X)$ de degré δ tel que $z = z_v$ dans $CH_0(X_v)/n$ pour toute $v \in S$.

Remarque

- Exactitude de $(E_0) \Rightarrow$ (AF^{Br}-0cyc^0) par définition!
- Exactitude de $(E) \Rightarrow$ (AF^{Br}-0cyc^1) d'après un petit argument.
- Exactitude de $(E) \Rightarrow$ (AF^{Br}-0cyc$^{\delta}$) pour tout δ, s'il existe un zéro-cycle de degré 1 sur X.

Conjectures pour les points rationnels

Conjecture-pt (1: Colliot-Thélène, 2: Skorobogatov)

1. Les assertions (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt) sont valables pour toute variété (géométriquement) rationnellement connexe définie sur un corps de nombres.
2. L'assertion (PH^{Br}-pt) est valable pour toute courbe définie sur un corps de nombres. (en supposant $Ш(Jac) < \infty$?)

- Contre-exemples : (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt) ne valent pas pour une certaine variété X
- Skorobogatov : $X =$ une surface bielliptique
- Poonen : $X =$ une fibration en surfaces de Châtelet au-dessus d'une courbe (de genre > 0)

Conjectures pour les points rationnels

Conjecture-pt (1: Colliot-Thélène, 2: Skorobogatov)

1. Les assertions (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt) sont valables pour toute variété (géométriquement) rationnellement connexe définie sur un corps de nombres.
2. L'assertion (PH^{Br}-pt) est valable pour toute courbe définie sur un corps de nombres. (en supposant $Ш(Jac) < \infty$?)

- Contre-exemples : (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt) ne valent pas pour une certaine variété X
- Skorobogatov : $X =$ une surface bielliptique
- Poonen : $X =$ une fibration en surfaces de Châtelet au-dessus d'une courbe (de genre > 0)

Conjectures pour les points rationnels

Conjecture-pt (1: Colliot-Thélène, 2: Skorobogatov)

1. Les assertions (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt) sont valables pour toute variété (géométriquement) rationnellement connexe définie sur un corps de nombres.
2. L'assertion (PH^{Br}-pt) est valable pour toute courbe définie sur un corps de nombres. (en supposant $Ш(Jac) < \infty$?)

- Contre-exemples : (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt) ne valent pas pour une certaine variété X
- Skorobogatov : $X =$ une surface bielliptique
- Poonen : $X =$ une fibration en surfaces de Châtelet au-dessus d'une courbe (de genre > 0)

Conjectures pour les points rationnels

Conjecture-pt (1: Colliot-Thélène, 2: Skorobogatov)

1. Les assertions (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt) sont valables pour toute variété (géométriquement) rationnellement connexe définie sur un corps de nombres.
2. L'assertion (PH^{Br}-pt) est valable pour toute courbe définie sur un corps de nombres. (en supposant $Ш(Jac) < \infty$?)

- Contre-exemples : (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt) ne valent pas pour une certaine variété X
- Skorobogatov : $X =$ une surface bielliptique
- Poonen : $X =$ une fibration en surfaces de Châtelet au-dessus d'une courbe (de genre > 0)

Conjecture pour les zéro-cycles

Conjecture-0cyc (Colliot-Thélène, Kato, Saito, Sansuc)

Le complexe (E) (alors (E_0) aussi) est exacte pour *toute* variété.

- On ne connaît aucun contre-exemple!
- Exemple :
- (Cassels-Tate) (E_0) est exact pour $X = A$ une variété abélienne (avec $Ш(A,k) < \infty$ supposé)
- (Saito, Colliot-Thélène) (E) est exact pour $X = C$ une courbe (avec $Ш(Jac(C),k) < \infty$ supposé)

Conjecture pour les zéro-cycles

Conjecture-0cyc (Colliot-Thélène, Kato, Saito, Sansuc)

Le complexe (E) (alors (E_0) aussi) est exacte pour *toute* variété.

- On ne connaît aucun contre-exemple!
- Exemple :
- (Cassels-Tate) (E_0) est exact pour $X = A$ une variété abélienne (avec $Ш(A,k) < \infty$ supposé)
- (Saito, Colliot-Thélène) (E) est exact pour $X = C$ une courbe (avec $Ш(Jac(C),k) < \infty$ supposé)

Conjecture pour les zéro-cycles

Conjecture-0cyc (Colliot-Thélène, Kato, Saito, Sansuc)

Le complexe (E) (alors (E_0) aussi) est exacte pour *toute* variété.

- On ne connaît aucun contre-exemple!
- Exemple :
- (Cassels-Tate) (E_0) est exact pour $X = A$ une variété abélienne (avec $Ш(A,k) < \infty$ supposé)
- (Saito, Colliot-Thélène) (E) est exact pour $X = C$ une courbe (avec $Ш(Jac(C),k) < \infty$ supposé)

Conjecture pour les zéro-cycles

Conjecture-0cyc (Colliot-Thélène, Kato, Saito, Sansuc)

Le complexe (E) (alors (E_0) aussi) est exacte pour *toute* variété.

- On ne connaît aucun contre-exemple!
- Exemple :
- (Cassels-Tate) (E_0) est exact pour $X = A$ une variété abélienne (avec $Ш(A,k) < \infty$ supposé)
- (Saito, Colliot-Thélène) (E) est exact pour $X = C$ une courbe (avec $Ш(Jac(C),k) < \infty$ supposé)

But de ma thèse

- Questions

1. Pour les résultats affirmatifs sur la conjecture-pt, est-ce qu'on peut les étendre aux résultats sur la conjecture-0cyc?
2. Pour les contre-exemples pour (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt), est-ce qu'on peut encore espérer la validité de la conjecture-0cyc?
3. Plus généralement, est-ce qu'on peut trouver un lien entre la conjecture-pt et la conjecture-0cyc?

- Réponses provenant de ma thèse

1. Oui, on peut! (évident? pas si évident.)
2. Peut-être. Ça marche pour les solides (3-folds) de Poonen. (difficile? pas trop!)
3. Oui, pour les variétés rationnellement connexes! (surprise? au moins pour moi-même!)

- Un mot pour répondre à toutes les questions?
- sous-ensemble hilbertien généralisé !

But de ma thèse

- Questions

1. Pour les résultats affirmatifs sur la conjecture-pt, est-ce qu'on peut les étendre aux résultats sur la conjecture-0cyc?
2. Pour les contre-exemples pour (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt), est-ce qu'on peut encore espérer la validité de la conjecture-0cyc?
3. Plus généralement, est-ce qu'on peut trouver un lien entre la conjecture-pt et la conjecture-0cyc?

- Réponses provenant de ma thèse

1. Oui, on peut! (évident? pas si évident.)
2. Peut-être. Ça marche pour les solides (3-folds) de Poonen. (difficile? pas trop!)
3. Oui, pour les variétés rationnellement connexes! (surprise? au moins pour moi-même!)

- Un mot pour répondre à toutes les questions?
- sous-ensemble hilbertien généralisé !

But de ma thèse

- Questions

1. Pour les résultats affirmatifs sur la conjecture-pt, est-ce qu'on peut les étendre aux résultats sur la conjecture-0cyc?
2. Pour les contre-exemples pour (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt), est-ce qu'on peut encore espérer la validité de la conjecture-0cyc?
3. Plus généralement, est-ce qu'on peut trouver un lien entre la conjecture-pt et la conjecture-0cyc?

- Réponses provenant de ma thèse

1. Oui, on peut! (évident? pas si évident.)
2. Peut-être. Ça marche pour les solides (3-folds) de Poonen. (difficile? pas trop!)
3. Oui, pour les variétés rationnellement connexes! (surprise? au moins pour moi-même!)

- Un mot pour répondre à toutes les questions?
- sous-ensemble hilbertien généralisé !

But de ma thèse

- **Questions**

1. Pour les résultats affirmatifs sur la conjecture-pt, est-ce qu'on peut les étendre aux résultats sur la conjecture-0cyc?
2. Pour les contre-exemples pour (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt), est-ce qu'on peut encore espérer la validité de la conjecture-0cyc?
3. Plus généralement, est-ce qu'on peut trouver un lien entre la conjecture-pt et la conjecture-0cyc?

- **Réponses provenant de ma thèse**

1. Oui, on peut! (évident? pas si évident.)
2. Peut-être. Ça marche pour les solides (3-folds) de Poonen. (difficile? pas trop!)
3. Oui, pour les variétés rationnellement connexes! (surprise? au moins pour moi-même!)

- Un mot pour répondre à toutes les questions?
- sous-ensemble hilbertien généralisé !

But de ma thèse

- **Questions**

1. Pour les résultats affirmatifs sur la conjecture-pt, est-ce qu'on peut les étendre aux résultats sur la conjecture-0cyc?
2. Pour les contre-exemples pour (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt), est-ce qu'on peut encore espérer la validité de la conjecture-0cyc?
3. Plus généralement, est-ce qu'on peut trouver un lien entre la conjecture-pt et la conjecture-0cyc?

- **Réponses provenant de ma thèse**

1. Oui, on peut! (évident? pas si évident.)
2. Peut-être. Ça marche pour les solides (3-folds) de Poonen. (difficile? pas trop!)
3. Oui, pour les variétés rationnellement connexes! (surprise? au moins pour moi-même!)

- Un mot pour répondre à toutes les questions?
- sous-ensemble hilbertien généralisé !

But de ma thèse

- **Questions**

1. Pour les résultats affirmatifs sur la conjecture-pt, est-ce qu'on peut les étendre aux résultats sur la conjecture-0cyc?
2. Pour les contre-exemples pour (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt), est-ce qu'on peut encore espérer la validité de la conjecture-0cyc?
3. Plus généralement, est-ce qu'on peut trouver un lien entre la conjecture-pt et la conjecture-0cyc?

- **Réponses provenant de ma thèse**

1. Oui, on peut! (évident? pas si évident.)
2. Peut-être. Ça marche pour les solides (3-folds) de Poonen. (difficile? pas trop!)
3. Oui, pour les variétés rationnellement connexes! (surprise? au moins pour moi-même!)

- Un mot pour répondre à toutes les questions?
- sous-ensemble hilbertien généralisé !

But de ma thèse

- **Questions**

1. Pour les résultats affirmatifs sur la conjecture-pt, est-ce qu'on peut les étendre aux résultats sur la conjecture-0cyc?
2. Pour les contre-exemples pour (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt), est-ce qu'on peut encore espérer la validité de la conjecture-0cyc?
3. Plus généralement, est-ce qu'on peut trouver un lien entre la conjecture-pt et la conjecture-0cyc?

- **Réponses provenant de ma thèse**

1. Oui, on peut! (évident? pas si évident.)
2. Peut-être. Ça marche pour les solides (3-folds) de Poonen. (difficile? pas trop!)
3. Oui, pour les variétés rationnellement connexes! (surprise? au moins pour moi-même!)

- Un mot pour répondre à toutes les questions?
- sous-ensemble hilbertien généralisé !

But de ma thèse

- Questions

1. Pour les résultats affirmatifs sur la conjecture-pt, est-ce qu'on peut les étendre aux résultats sur la conjecture-0cyc?
2. Pour les contre-exemples pour (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt), est-ce qu'on peut encore espérer la validité de la conjecture-0cyc?
3. Plus généralement, est-ce qu'on peut trouver un lien entre la conjecture-pt et la conjecture-0cyc?

- Réponses provenant de ma thèse

1. Oui, on peut! (évident? pas si évident.)
2. Peut-être. Ça marche pour les solides (3-folds) de Poonen. (difficile? pas trop!)
3. Oui, pour les variétés rationnellement connexes! (surprise? au moins pour moi-même!)

- Un mot pour répondre à toutes les questions?
- sous-ensemble hilbertien généralisé !

But de ma thèse

- **Questions**

1. Pour les résultats affirmatifs sur la conjecture-pt, est-ce qu'on peut les étendre aux résultats sur la conjecture-0cyc?
2. Pour les contre-exemples pour (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt), est-ce qu'on peut encore espérer la validité de la conjecture-0cyc?
3. Plus généralement, est-ce qu'on peut trouver un lien entre la conjecture-pt et la conjecture-0cyc?

- **Réponses provenant de ma thèse**

1. Oui, on peut! (évident? pas si évident.)
2. Peut-être. Ça marche pour les solides (3-folds) de Poonen. (difficile? pas trop!)
3. Oui, pour les variétés rationnellement connexes! (surprise? au moins pour moi-même!)

- Un mot pour répondre à toutes les questions?
- sous-ensemble hilbertien généralisé !

Résultats avant ma thèse (sur la conjecture-pt)

(PH^{Br}-pt) [resp. (AF^{Br}-pt)] est valable pour les variétés X :

1. (Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer, Wittenberg) $X \to \mathbb{P}^n$ est une fibration à fibres *abélienne-scindées* (i.e. chaque fibre possède une composante irréductible de multiplicité 1 déployée par une extension abélienne du corps résiduel du point de base) et satisfaisant (PH-pt) [resp. (AF-pt)], avec l'*hypothèse de Schinzel* (une généralisation du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet) supposée.
2. (Harari) $X \to \mathbb{P}^n$ est une fibration à fibres géométriquement intègres (en dehors d'un fermé de codimension 2) et rationnellement connexes, beaucoup de fibres satisfont (PH^{Br}-pt) [resp. (AF^{Br}-pt)].
3. (Sansuc, Borovoi) X est une compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe linéaire connexe G à stabilisateur connexe (ou abélien si G est simplement connexe).

Résultats avant ma thèse (sur la conjecture-pt)

(PH^{Br}-pt) [resp. (AF^{Br}-pt)] est valable pour les variétés X :

1. (Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer, Wittenberg) $X \to \mathbb{P}^n$ est une fibration à fibres *abélienne-scindées* (i.e. chaque fibre possède une composante irréductible de multiplicité 1 déployée par une extension abélienne du corps résiduel du point de base) et satisfaisant (PH-pt) [resp. (AF-pt)], avec l'*hypothèse de Schinzel* (une généralisation du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet) supposée.
2. (Harari) $X \to \mathbb{P}^n$ est une fibration à fibres géométriquement intègres (en dehors d'un fermé de codimension 2) et rationnellement connexes, beaucoup de fibres satisfont (PH^{Br}-pt) [resp. (AF^{Br}-pt)].
3. (Sansuc, Borovoi) X est une compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe linéaire connexe G à stabilisateur connexe (ou abélien si G est simplement connexe).

Résultats avant ma thèse (sur la conjecture-pt)

(PH^{Br}-pt) [resp. (AF^{Br}-pt)] est valable pour les variétés X :

1. (Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer, Wittenberg) $X \to \mathbb{P}^n$ est une fibration à fibres *abélienne-scindées* (i.e. chaque fibre possède une composante irréductible de multiplicité 1 déployée par une extension abélienne du corps résiduel du point de base) et satisfaisant (PH-pt) [resp. (AF-pt)], avec l'*hypothèse de Schinzel* (une généralisation du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet) supposée.
2. (Harari) $X \to \mathbb{P}^n$ est une fibration à fibres géométriquement intègres (en dehors d'un fermé de codimension 2) et rationnellement connexes, beaucoup de fibres satisfont (PH^{Br}-pt) [resp. (AF^{Br}-pt)].
3. (Sansuc, Borovoi) X est une compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe linéaire connexe G à stabilisateur connexe (ou abélien si G est simplement connexe).

Résultats avant ma thèse (sur la conjecture-pt)

(PH^{Br}-pt) [resp. (AF^{Br}-pt)] est valable pour les variétés X :

1. (Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer, Wittenberg) $X \to \mathbb{P}^n$ est une fibration à fibres *abélienne-scindées* (i.e. chaque fibre possède une composante irréductible de multiplicité 1 déployée par une extension abélienne du corps résiduel du point de base) et satisfaisant (PH-pt) [resp. (AF-pt)], avec l'*hypothèse de Schinzel* (une généralisation du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet) supposée.
2. (Harari) $X \to \mathbb{P}^n$ est une fibration à fibres géométriquement intègres (en dehors d'un fermé de codimension 2) et rationnellement connexes, beaucoup de fibres satisfont (PH^{Br}-pt) [resp. (AF^{Br}-pt)].
3. (Sansuc, Borovoi) X est une compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe linéaire connexe G à stabilisateur connexe (ou abélien si G est simplement connexe).

Résultats avant ma thèse (sur la conjecture-0cyc)

(PH^{Br}-0cyc[1]) est valable pour les variétés X :

1. (Salberger, Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer) $X \to \mathbb{P}^1$ est une fibration à fibres abélienne-scindées et satisfaisant (PH-pt) (sans hypothèse!). (cas sur $\mathbb{P}^n$ mentionné sans preuve détaillée dans la thèse de Wittenberg)
2. (Saito, Colliot-Thélène, Eriksson/Scharaschkin, Frossard, van Hamel...$\subset$ Wittenberg) $X \to C$ est une fibration à fibres abélienne-scindées, rationnellement connexe, et satisfaisant (PH-pt) [resp. (AF-pt)], avec $Ш(Jac(C)) < \infty$ supposé. [resp. De plus, (E) est exacte pour X.]
3. (Colliot-Thélène) X est un solide de Poonen. (sans supposer $Ш < \infty$!)

Remarque

Comme beaucoup de fibres ne satisfont pas (PH-pt), 3 n'est pas un cas particulier de 2, même si $Ш < \infty$.

Résultats avant ma thèse (sur la conjecture-0cyc)

(PH^{Br}-0cyc[1]) est valable pour les variétés X :

1. (Salberger, Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer) $X \to \mathbb{P}^1$ est une fibration à fibres abélienne-scindées et satisfaisant (PH-pt) (sans hypothèse!). (cas sur $\mathbb{P}^n$ mentionné sans preuve détaillée dans la thèse de Wittenberg)
2. (Saito, Colliot-Thélène, Eriksson/Scharaschkin, Frossard, van Hamel...$\subset$ Wittenberg) $X \to C$ est une fibration à fibres abélienne-scindées, rationnellement connexe, et satisfaisant (PH-pt) [resp. (AF-pt)], avec $Ш(Jac(C)) < \infty$ supposé. [resp. De plus, (E) est exacte pour X.]
3. (Colliot-Thélène) X est un solide de Poonen. (sans supposer $Ш < \infty$!)

Remarque

Comme beaucoup de fibres ne satisfont pas (PH-pt), ③ n'est pas un cas particulier de ②, même si $Ш < \infty$.

Résultats avant ma thèse (sur la conjecture-0cyc)

(PH^{Br}-0cyc^1) est valable pour les variétés X :

1. (Salberger, Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer) $X \to \mathbb{P}^1$ est une fibration à fibres abélienne-scindées et satisfaisant (PH-pt) (sans hypothèse!). (cas sur $\mathbb{P}^n$ mentionné sans preuve détaillée dans la thèse de Wittenberg)
2. (Saito, Colliot-Thélène, Eriksson/Scharaschkin, Frossard, van Hamel...$\subset$ Wittenberg) $X \to C$ est une fibration à fibres abélienne-scindées, rationnellement connexe, et satisfaisant (PH-pt) [resp. (AF-pt)], avec $Ш(Jac(C)) < \infty$ supposé. [resp. De plus, (E) est exacte pour X.]
3. (Colliot-Thélène) X est un solide de Poonen. (sans supposer $Ш < \infty$!)

Remarque

Comme beaucoup de fibres ne satisfont pas (PH-pt), ③ n'est pas un cas particulier de ②, même si $Ш < \infty$.

Résultats avant ma thèse (sur la conjecture-0cyc)

(PH^{Br}-0cyc^1) est valable pour les variétés X :

1. (Salberger, Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer) $X \to \mathbb{P}^1$ est une fibration à fibres abélienne-scindées et satisfaisant (PH-pt) (sans hypothèse!). (cas sur $\mathbb{P}^n$ mentionné sans preuve détaillée dans la thèse de Wittenberg)
2. (Saito, Colliot-Thélène, Eriksson/Scharaschkin, Frossard, van Hamel...$\subset$ Wittenberg) $X \to C$ est une fibration à fibres abélienne-scindées, rationnellement connexe, et satisfaisant (PH-pt) [resp. (AF-pt)], avec $Ш(Jac(C)) < \infty$ supposé. [resp. De plus, (E) est exacte pour X.]
3. (Colliot-Thélène) X est un solide de Poonen. (sans supposer $Ш < \infty$!)

Remarque

Comme beaucoup de fibres ne satisfont pas (PH-pt), ③ n'est pas un cas particulier de ②, même si $Ш < \infty$.

Résultats avant ma thèse (sur la conjecture-0cyc)

(PH^{Br}-0cyc[1]) est valable pour les variétés X :

1. (Salberger, Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer) $X \to \mathbb{P}^1$ est une fibration à fibres abélienne-scindées et satisfaisant (PH-pt) (sans hypothèse!). (cas sur $\mathbb{P}^n$ mentionné sans preuve détaillée dans la thèse de Wittenberg)
2. (Saito, Colliot-Thélène, Eriksson/Scharaschkin, Frossard, van Hamel...$\subset$ Wittenberg) $X \to C$ est une fibration à fibres abélienne-scindées, rationnellement connexe, et satisfaisant (PH-pt) [resp. (AF-pt)], avec $Ш(Jac(C)) < \infty$ supposé. [resp. De plus, (E) est exacte pour X.]
3. (Colliot-Thélène) X est un solide de Poonen. (sans supposer $Ш < \infty$!)

Remarque

Comme beaucoup de fibres ne satisfont pas (PH-pt), 3 n'est pas un cas particulier de 2, même si $Ш < \infty$.

Résultats principaux de ma thèse

- Établir une version pour les zéro-cycles de degré 1 des résultats mentionnés ci-dessus sur les points rationnels.
  - En particulier, $(AF^{Br}$-0cyc$^1)$ est valable, de plus, (E) est exacte pour les espaces homogènes.
- Rétablir (et étendre) les résultats mentionnés ci-dessus sur les zéro-cycles avec l'hypothèse arithmétique moins forte sur les fibres. (plus de mauvaises fibres <sans (PH),(AF)> sont permises)
  - En particulier, le résultat de Colliot-Thélène sur les solides de Poonen est mis dans un cadre général (si $Ш < \infty$), de plus, (E) est exacte.
- Découvrir une relation entre l'arithmétique des points rationnels et l'arithmétique des zéro-cycles sur les variétés rationnellement connexes.
  $(AF^{Br}$-pt$) \leftrightsquigarrow$ l'exactitude de (E)

Résultats principaux de ma thèse

- Établir une version pour les zéro-cycles de degré 1 des résultats mentionnés ci-dessus sur les points rationnels.
  - En particulier, (AF^{Br}-0cyc^1) est valable, de plus, (E) est exacte pour les espaces homogènes.
- Rétablir (et étendre) les résultats mentionnés ci-dessus sur les zéro-cycles avec l'hypothèse arithmétique moins forte sur les fibres. (plus de mauvaises fibres <sans (PH),(AF)> sont permises)
  - En particulier, le résultat de Colliot-Thélène sur les solides de Poonen est mis dans un cadre général (si $\text{Ш} < \infty$), de plus, (E) est exacte.
- Découvrir une relation entre l'arithmétique des points rationnels et l'arithmétique des zéro-cycles sur les variétés rationnellement connexes.
  (AF^{Br}-pt) $\rightsquigarrow$ l'exactitude de (E)

Résultats principaux de ma thèse

- Établir une version pour les zéro-cycles de degré 1 des résultats mentionnés ci-dessus sur les points rationnels.
  - En particulier, (AF^{Br}-0cyc^1) est valable, de plus, (E) est exacte pour les espaces homogènes.
- Rétablir (et étendre) les résultats mentionnés ci-dessus sur les zéro-cycles avec l'hypothèse arithmétique moins forte sur les fibres. (plus de mauvaises fibres <sans (PH),(AF)> sont permises)
  - En particulier, le résultat de Colliot-Thélène sur les solides de Poonen est mis dans un cadre général (si $Ш < \infty$), de plus, (E) est exacte.
- Découvrir une relation entre l'arithmétique des points rationnels et l'arithmétique des zéro-cycles sur les variétés rationnellement connexes.
  (AF^{Br}-pt) $\leftrightsquigarrow$ l'exactitude de (E)

Résultats principaux de ma thèse

- Établir une version pour les zéro-cycles de degré 1 des résultats mentionnés ci-dessus sur les points rationnels.
  - En particulier, (AF^{Br}-0cyc^1) est valable, de plus, (E) est exacte pour les espaces homogènes.
- Rétablir (et étendre) les résultats mentionnés ci-dessus sur les zéro-cycles avec l'hypothèse arithmétique moins forte sur les fibres. (plus de mauvaises fibres <sans (PH),(AF)> sont permises)
  - En particulier, le résultat de Colliot-Thélène sur les solides de Poonen est mis dans un cadre général (si $\text{Ш} < \infty$), de plus, (E) est exacte.
- Découvrir une relation entre l'arithmétique des points rationnels et l'arithmétique des zéro-cycles sur les variétés rationnellement connexes.
  (AF^{Br}-pt) $\rightsquigarrow$ l'exactitude de (E)

Résultats principaux de ma thèse

- Établir une version pour les zéro-cycles de degré 1 des résultats mentionnés ci-dessus sur les points rationnels.
  - En particulier, (AF^{Br}-0cyc^1) est valable, de plus, (E) est exacte pour les espaces homogènes.
- Rétablir (et étendre) les résultats mentionnés ci-dessus sur les zéro-cycles avec l'hypothèse arithmétique moins forte sur les fibres. (plus de mauvaises fibres <sans (PH),(AF)> sont permises)
  - En particulier, le résultat de Colliot-Thélène sur les solides de Poonen est mis dans un cadre général (si $Ш < \infty$), de plus, (E) est exacte.
- Découvrir une relation entre l'arithmétique des points rationnels et l'arithmétique des zéro-cycles sur les variétés rationnellement connexes.
  (AF^{Br}-pt) $\leftrightsquigarrow$ l'exactitude de (E)

Organisation du reste de cet exposé

- Zéro-cycles sur une fibration
  - Préliminaires
  - Fibrations au-dessus de l'espace projectif
  - Fibrations au-dessus d'une courbe
- Zéro-cycles vs. points rationnels

Zéro-cycles sur une fibration

Sous-ensemble hilbertien généralisé

Définition

Soit X une variété intègre sur un corps k, un sous-ensemble Hil $\subset X$ de points fermés est un *sous-ensemble hilbertien généralisé* s'il existe un morphisme étale fini $Z \xrightarrow{\rho} U \subset X$ avec $U \neq \emptyset$ un ouvert de X et Z une variété intègre, tel que
Hil $= \{\theta$ un point fermé de U, $\rho^{-1}(\theta)$ est connexe$\}$.

Remarque

1. L'ensemble des points rationnels $X(k) \cap Hil$ est dit un *sous-ensemble hilbertien (classique)*. Il peut être vide.
2. Si k est un corps de nombres, un sous-ensemble hilbertien généralisé est toujours non-vide.

Sous-ensemble hilbertien généralisé

Définition

Soit X une variété intègre sur un corps k, un sous-ensemble Hil $\subset X$ de points fermés est un *sous-ensemble hilbertien généralisé* s'il existe un morphisme étale fini $Z \xrightarrow{\rho} U \subset X$ avec $U \neq \emptyset$ un ouvert de X et Z une variété intègre, tel que
$\mathrm{Hil} = \{\theta \text{ un point fermé de } U,\ \rho^{-1}(\theta) \text{ est connexe}\}$.

Remarque

1. L'ensemble des points rationnels $X(k) \cap Hil$ est dit un *sous-ensemble hilbertien (classique)*. Il peut être vide.
2. Si k est un corps de nombres, un sous-ensemble hilbertien généralisé est toujours non-vide.

Sous-ensemble hilbertien généralisé

Définition

Soit X une variété intègre sur un corps k, un sous-ensemble Hil $\subset X$ de points fermés est un *sous-ensemble hilbertien généralisé* s'il existe un morphisme étale fini $Z \xrightarrow{\rho} U \subset X$ avec $U \neq \emptyset$ un ouvert de X et Z une variété intègre, tel que
Hil $= \{\theta$ un point fermé de U, $\rho^{-1}(\theta)$ est connexe$\}$.

Remarque

1. L'ensemble des points rationnels $X(k) \cap$ *Hil* est dit un *sous-ensemble hilbertien (classique)*. Il peut être vide.
2. Si k est un corps de nombres, un sous-ensemble hilbertien généralisé est toujours non-vide.

Théorème d'irréductibilité de Hilbert

Théorème (d'irréductibilité de Hilbert)

Soit k un corps de nombres. Tout sous-ensemble hilbertien (classique) de $\mathbb{P}^1(k)$ est non-vide.

Théorème (Ekedahl : version effective, approx. faible)

Soit k un corps de nombres. Tout sous-ensemble hilbertien (classique) de $\mathbb{P}^1(k)$ est dense dans $\prod_{v\in\Omega}\mathbb{P}^1(k_v)$.

Remarque

On va voir plus tard un théorème de ce type pour les zéro-cycles (effectifs) sur une courbe, qui joue un rôle très important dans cette thèse.

Théorème d'irréductibilité de Hilbert

Théorème (d'irréductibilité de Hilbert)

Soit k un corps de nombres. Tout sous-ensemble hilbertien (classique) de $\mathbb{P}^1(k)$ *est non-vide.*

Théorème (Ekedahl : version effective, approx. faible)

Soit k un corps de nombres. Tout sous-ensemble hilbertien (classique) de $\mathbb{P}^1(k)$ *est dense dans* $\prod_{v\in\Omega}\mathbb{P}^1(k_v)$.

Remarque

On va voir plus tard un théorème de ce type pour les zéro-cycles (effectifs) sur une courbe, qui joue un rôle très important dans cette thèse.

Théorème d'irréductibilité de Hilbert

Théorème (d'irréductibilité de Hilbert)

Soit k un corps de nombres. Tout sous-ensemble hilbertien (classique) de $\mathbb{P}^1(k)$ est non-vide.

Théorème (Ekedahl : version effective, approx. faible)

Soit k un corps de nombres. Tout sous-ensemble hilbertien (classique) de $\mathbb{P}^1(k)$ est dense dans $\prod_{v\in\Omega}\mathbb{P}^1(k_v)$.

Remarque

On va voir plus tard un théorème de ce type pour les zéro-cycles (effectifs) sur une courbe, qui joue un rôle très important dans cette thèse.

Connexité rationnelle

Définition

Une variété $X_{/k}$ est dite *(géométriquement) rationnellement connexe*, si pour tout $P, Q \in X(\mathbb{C})$, il existe un $\mathbb{C}$-morphism $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$ tel que $f(0) = P$ et $f(\infty) = Q$.

Remarque

Il y a plusieurs de définitions équivalentes de la connexité rationnelle, mais aucune ne joue un rôle particulier dans cette thèse. Les choses importantes sont :

- $\pi_1(X_{\bar{k}}) = 1$ si X est rationnellement connexe.
- comme pour n suffisamment divisible la suite

$$0 \to (NS(X_{\bar{k}})_{tors})^* \to \pi_1^{ab}(X_{\bar{k}})/n\pi_1^{ab}(X_{\bar{k}}) \to (Pic^o(X_{\bar{k}})_n)^* \to 0$$

est exacte, le groupe $Pic(X_{\bar{k}})$ est sans torsion.

Connexité rationnelle

Définition

Une variété $X_{/k}$ est dite *(géométriquement) rationnellement connexe*, si pour tout $P,Q \in X(\mathbb{C})$, il existe un $\mathbb{C}$-morphism $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$ tel que $f(0) = P$ et $f(\infty) = Q$.

Remarque

Il y a plusieurs de définitions équivalentes de la connexité rationnelle, mais aucune ne joue un rôle particulier dans cette thèse. Les choses importantes sont :

- $\pi_1(X_{\bar{k}}) = 1$ si X est rationnellement connexe.
- comme pour n suffisamment divisible la suite

$$0 \to (NS(X_{\bar{k}})_{tors})^* \to \pi_1^{ab}(X_{\bar{k}})/n\pi_1^{ab}(X_{\bar{k}}) \to (Pic^o(X_{\bar{k}})_n)^* \to 0$$

est exacte, le groupe $Pic(X_{\bar{k}})$ est sans torsion.

Connexité rationnelle

Définition

Une variété $X_{/k}$ est dite *(géométriquement) rationnellement connexe*, si pour tout $P,Q \in X(\mathbb{C})$, il existe un $\mathbb{C}$-morphism $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$ tel que $f(0) = P$ et $f(\infty) = Q$.

Remarque

Il y a plusieurs de définitions équivalentes de la connexité rationnelle, mais aucune ne joue un rôle particulier dans cette thèse. Les choses importantes sont :

- $\pi_1(X_{\bar{k}}) = 1$ si X est rationnellement connexe.
- comme pour n suffisamment divisible la suite

$$0 \to (NS(X_{\bar{k}})_{tors})^* \to \pi_1^{ab}(X_{\bar{k}})/n\pi_1^{ab}(X_{\bar{k}}) \to (Pic^o(X_{\bar{k}})_n)^* \to 0$$

est exacte, le groupe $Pic(X_{\bar{k}})$ est sans torsion.

Connexité rationnelle

Définition

Une variété $X_{/k}$ est dite *(géométriquement) rationnellement connexe*, si pour tout $P, Q \in X(\mathbb{C})$, il existe un $\mathbb{C}$-morphism $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$ tel que $f(0) = P$ et $f(\infty) = Q$.

Remarque

Il y a plusieurs de définitions équivalentes de la connexité rationnelle, mais aucune ne joue un rôle particulier dans cette thèse. Les choses importantes sont :

- $\pi_1(X_{\bar{k}}) = 1$ si X est rationnellement connexe.
- comme pour n suffisamment divisible la suite

$$0 \to (NS(X_{\bar{k}})_{tors})^* \to \pi_1^{ab}(X_{\bar{k}})/n\pi_1^{ab}(X_{\bar{k}}) \to (Pic^o(X_{\bar{k}})_n)^* \to 0$$

est exacte, le groupe $Pic(X_{\bar{k}})$ est sans torsion.

Connexité rationnelle

- En utilisant une astuce du point générique (Lemme 2.4.1), on sait que $Br(X_{\bar{k}})$ est fini, si X est rationnellement connexe.
- En prenant un modèle entier, on trouve

Théorème (Kollár/Szabó)

Soit X une variété rationnellement connexe définie sur un corps de nombres k. Alors pour presque toute place v, l'application $deg_v : CH_0(X_v) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

Connexité rationnelle

- En utilisant une astuce du point générique (Lemme 2.4.1), on sait que $Br(X_{\bar{k}})$ est fini, si X est rationnellement connexe.
- En prenant un modèle entier, on trouve

Théorème (Kollár/Szabó)

Soit X une variété rationnellement connexe définie sur un corps de nombres k. Alors pour presque toute place v, l'application $deg_v : CH_0(X_v) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

Fibrations au-dessus de l'espace projectif

Fibrations au-dessus de $\mathbb{P}^n$

Théorème A

Soit $X \to \mathbb{P}^n$ une fibration à fibre générique rationnellement connexe satisfaisant un des deux groupes de conditions suivants, où $Hil \subset \mathbb{P}^n$ est un sous-ensemble hilbertien généralisé.

1.
   - *toute fibre de codimension 1 est géométriquement intègre,*
   - *pour tout $\theta \in Hil$, la fibre X_θ satisfait (PH^{Br}-pt) ou (PH^{Br}-0cyc^1) [resp. (AF^{Br}-pt) ou (AF^{Br}-0cyc^1)];*
2.
   - *toute fibre fermée est abélienne-scindée,*
   - *pour tout $\theta \in Hil$, la fibre X_θ satisfait (PH-pt) ou (PH-0cyc^1) [resp. (AF-pt) ou (AF-0cyc^1)];*

Alors, pour X, (PH^{Br}-0cyc^1) est valable [resp. la suite (E) est exacte, (AF^{Br}-0cyc^1) est valable].

"Preuve" du Th. A 1

Le cas $n = 1$ (pas du tout facile)

- lemme de déplacement pour les zéro-cycles
- méthode des fibrations (sera expliquée plus tard)
- étendre les arguments de la thèse de Harari, lemme formel etc.

Proposition (Harari : comparaison des groupes de Brauer)

Soit $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration définie sur un corps de nombres k. Supposons que $Br(X_{\bar{\eta}})$ est fini et que $Pic(X_{\bar{\eta}})$ est sans torsion, où $X_{\bar{\eta}} = X_\eta \otimes \overline{k(t)}$. (C'est le cas si $X_{\bar{\eta}}$ est rationnellement connexe.)
Alors, il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé $Hil \subset \mathbb{P}^1$ tel que pour tout $\theta \in Hil$, la spécialisation suivante est un isomorphisme.

$$sp_\theta : \frac{Br(X_\eta)}{Br(k(t))} \xrightarrow{\simeq} \frac{Br(X_\theta)}{Br(k(\theta))}$$

Comment trouver un tel $\theta \in$ Hil? sera expliqué plus tard.

"Preuve" du Th. A 1

Le cas $n = 1$ (pas du tout facile)

- lemme de déplacement pour les zéro-cycles
- méthode des fibrations (sera expliquée plus tard)
- étendre les arguments de la thèse de Harari, lemme formel etc.

Proposition (Harari : comparaison des groupes de Brauer)

Soit $X \to \mathbb{P}^1$ une fibration définie sur un corps de nombres k. Supposons que $Br(X_{\bar{\eta}})$ est fini et que $Pic(X_{\bar{\eta}})$ est sans torsion, où $X_{\bar{\eta}} = X_\eta \otimes \overline{k(t)}$. (C'est le cas si $X_{\bar{\eta}}$ est rationnellement connexe.)
Alors, il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé $Hil \subset \mathbb{P}^1$ tel que pour tout $\theta \in Hil$, la spécialisation suivante est un isomorphisme.

$$sp_\theta : \frac{Br(X_\eta)}{Br(k(t))} \xrightarrow{\simeq} \frac{Br(X_\theta)}{Br(k(\theta))}$$

Comment trouver un tel $\theta \in$ Hil? sera expliqué plus tard.

"Preuve" du Th. A 1

Le cas $n = 1$ (pas du tout facile)

- lemme de déplacement pour les zéro-cycles
- méthode des fibrations (sera expliquée plus tard)
- étendre les arguments de la thèse de Harari, lemme formel etc.

Proposition (Harari : comparaison des groupes de Brauer)

Soit $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration définie sur un corps de nombres k. Supposons que $Br(X_{\bar{\eta}})$ est fini et que $Pic(X_{\bar{\eta}})$ est sans torsion, où $X_{\bar{\eta}} = X_\eta \otimes \overline{k(t)}$. (C'est le cas si $X_{\bar{\eta}}$ est rationnellement connexe.)
Alors, il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé $Hil \subset \mathbb{P}^1$ tel que pour tout $\theta \in Hil$, la spécialisation suivante est un isomorphisme.

$$sp_\theta : \frac{Br(X_\eta)}{Br(k(t))} \xrightarrow{\simeq} \frac{Br(X_\theta)}{Br(k(\theta))}$$

Comment trouver un tel $\theta \in$ Hil? sera expliqué plus tard.

"Preuve" du Th. A 1

Le cas $n = 1$ (pas du tout facile)

- lemme de déplacement pour les zéro-cycles
- méthode des fibrations (sera expliquée plus tard)
- étendre les arguments de la thèse de Harari, lemme formel etc.

Proposition (Harari : comparaison des groupes de Brauer)

Soit $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration définie sur un corps de nombres k. Supposons que $Br(X_{\bar{\eta}})$ est fini et que $Pic(X_{\bar{\eta}})$ est sans torsion, où $X_{\bar{\eta}} = X_\eta \otimes \overline{k(t)}$. (C'est le cas si $X_{\bar{\eta}}$ est rationnellement connexe.)
Alors, il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé $Hil \subset \mathbb{P}^1$ tel que pour tout $\theta \in Hil$, la spécialisation suivante est un isomorphisme.

$$sp_\theta : \frac{Br(X_\eta)}{Br(k(t))} \xrightarrow{\simeq} \frac{Br(X_\theta)}{Br(k(\theta))}$$

Comment trouver un tel $\theta \in$ Hil? sera expliqué plus tard.

"Preuve" du Th. A 1

Le cas $n = 1$ (pas du tout facile)

- lemme de déplacement pour les zéro-cycles
- méthode des fibrations (sera expliquée plus tard)
- étendre les arguments de la thèse de Harari, lemme formel etc.

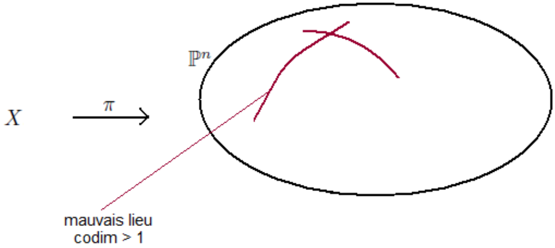
Proposition (Harari : comparaison des groupes de Brauer)

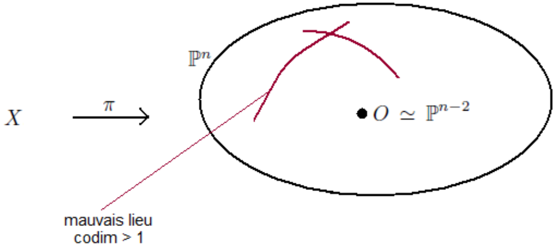
Soit $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration définie sur un corps de nombres k. Supposons que $Br(X_{\bar{\eta}})$ est fini et que $Pic(X_{\bar{\eta}})$ est sans torsion, où $X_{\bar{\eta}} = X_\eta \otimes \overline{k(t)}$. (C'est le cas si $X_{\bar{\eta}}$ est rationnellement connexe.)
Alors, il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé $Hil \subset \mathbb{P}^1$ tel que pour tout $\theta \in Hil$, la spécialisation suivante est un isomorphisme.

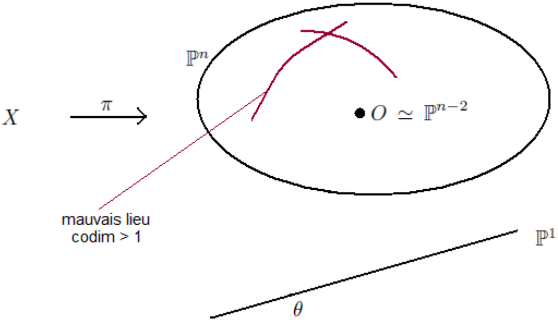
$$sp_\theta : \frac{Br(X_\eta)}{Br(k(t))} \xrightarrow{\simeq} \frac{Br(X_\theta)}{Br(k(\theta))}$$

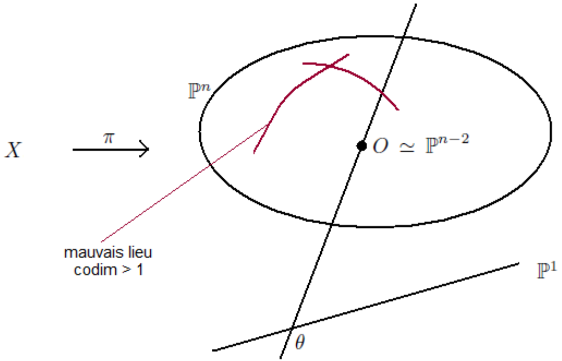
Comment trouver un tel $\theta \in$ Hil? sera expliqué plus tard.

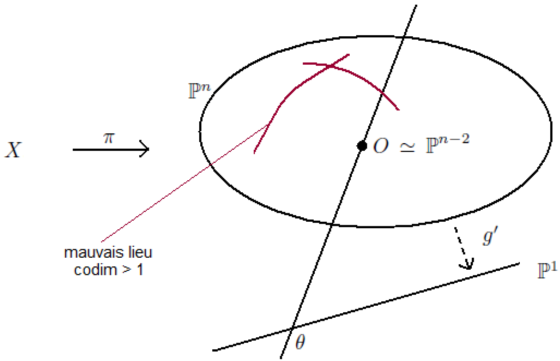
Récurrence sur n

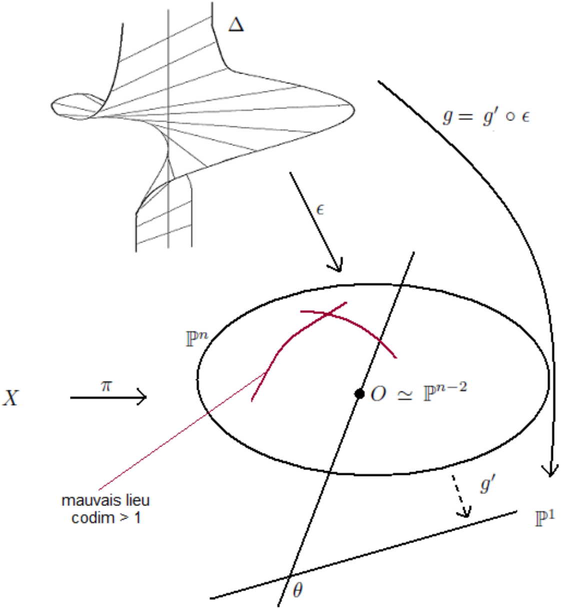

$X \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n$
mauvais lieu
codim > 1

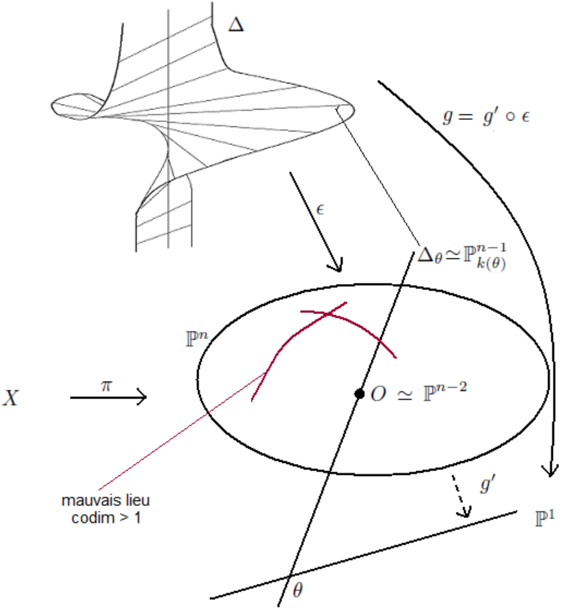

X
π
$\mathbb{P}^n$
$O \simeq \mathbb{P}^{n-2}$
mauvais lieu
codim > 1

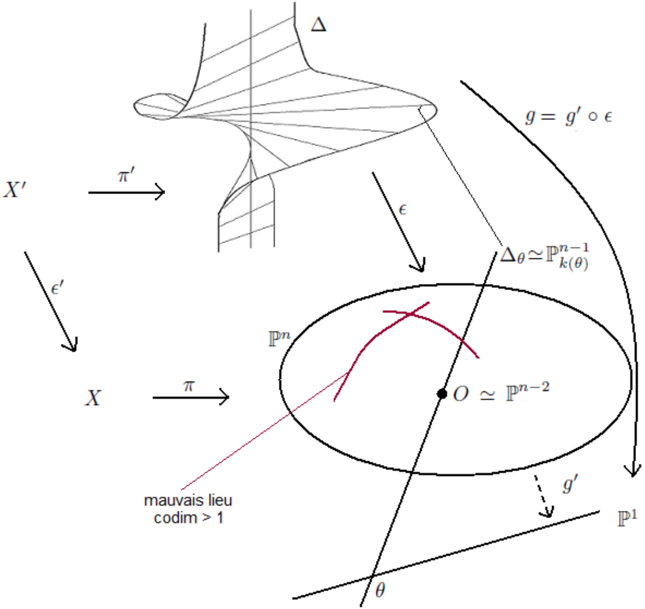

X
π
$\mathbb{P}^n$
$O \simeq \mathbb{P}^{n-2}$
mauvais lieu
codim > 1
$\mathbb{P}^1$
θ

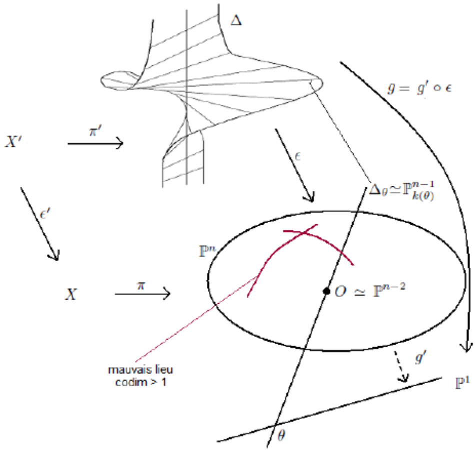

X
π
$\mathbb{P}^n$
$O \simeq \mathbb{P}^{n-2}$
mauvais lieu
codim > 1
$\mathbb{P}^1$
θ


X
π
$\mathbb{P}^n$
$O \simeq \mathbb{P}^{n-2}$
g'
$\mathbb{P}^1$
θ
mauvais lieu
codim > 1

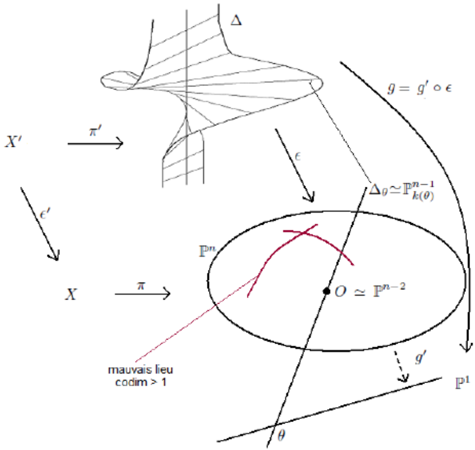

Δ
$g = g' \circ \epsilon$
ϵ
$\mathbb{P}^n$
X
π
$O \simeq \mathbb{P}^{n-2}$
g'
$\mathbb{P}^1$
mauvais lieu
codim > 1
θ


Δ
$g = g' \circ \epsilon$
ϵ
$\Delta_\theta \simeq \mathbb{P}^{n-1}_{k(\theta)}$
$\mathbb{P}^n$
X
π
$O \simeq \mathbb{P}^{n-2}$
g'
$\mathbb{P}^1$
mauvais lieu
codim > 1
θ

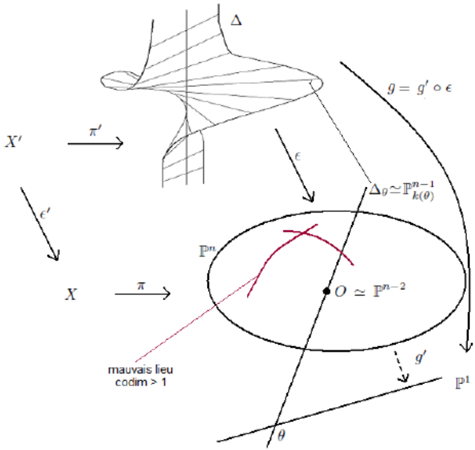

Δ
$g = g' \circ \epsilon$
X'
π'
ϵ
$\Delta_\theta \simeq \mathbb{P}^{n-1}_{k(\theta)}$
ϵ'
$\mathbb{P}^n$
X
π
$O \simeq \mathbb{P}^{n-2}$
g'
$\mathbb{P}^1$
mauvais lieu
codim > 1
θ



- se ramène à X', qui est birationnellement équivalente à X
- pour beaucoup de θ, la variété X'_θ satisfait $(PH^{Br}\text{-0cyc}^1)$ d'après la récurrence appliquée à $X'_\theta \to \Delta_\theta \simeq \mathbb{P}^{n-1}_{k(\theta)}$.
- les fibres de $g \circ \pi' : X' \to \mathbb{P}^1$ sont géométriquement intègres, le cas $n = 1 \Rightarrow (PH^{Br}\text{-0cyc}^1)$ pour X'.



- se ramène à X', qui est birationnellement équivalente à X
- pour beaucoup de θ, la variété X'_θ satisfait $(PH^{Br}\text{-}0cyc^1)$ d'après la récurrence appliquée à $X'_\theta \to \Delta_\theta \simeq \mathbb{P}^{n-1}_{k(\theta)}$.
- les fibres de $g \circ \pi' : X' \to \mathbb{P}^1$ sont géométriquement intègres, le cas $n = 1 \Rightarrow (PH^{Br}\text{-}0cyc^1)$ pour X'.



- se ramène à X', qui est birationnellement équivalente à X
- pour beaucoup de θ, la variété X'_θ satisfait (PH^{Br}-0cyc^1) d'après la récurrence appliquée à $X'_\theta \to \Delta_\theta \simeq \mathbb{P}^{n-1}_{k(\theta)}$.
- les fibres de $g \circ \pi' : X' \to \mathbb{P}^1$ sont géométriquement intègres, le cas $n = 1 \Rightarrow$ (PH^{Br}-0cyc^1) pour X'.

"Preuve" du Th. A 2

- La même récurrence fonctionne également.
- Pour le cas $n = 1$, on n'a pas besoin de comparer les groupes de Brauer de la fibre générique et des fibres fermées.
- Dans Th. A 1, les fibres sont géo. int., on utilise Lang-Weil (+ Hensel) pour assurer que on a des points locaux sur les fibres fermées, au lieu, dans Th. A 2, les fibres sont seulement abélienne-scindées, il faut appliquer la méthode de CT/Sk/SD (utilise les éléments du groupe de Brauer vertical) plus l'astuce de Salberger.
- Adapter l'astuce de Salberger aux sous-ensembles hilbertiens généralisés

"Preuve" du Th. A 2

- La même récurrence fonctionne également.
- Pour le cas $n = 1$, on n'a pas besoin de comparer les groupes de Brauer de la fibre générique et des fibres fermées.
- Dans Th. A 1, les fibres sont géo. int., on utilise Lang-Weil (+ Hensel) pour assurer que on a des points locaux sur les fibres fermées, au lieu, dans Th. A 2, les fibres sont seulement abélienne-scindées, il faut appliquer la méthode de CT/Sk/SD (utilise les éléments du groupe de Brauer vertical) plus l'astuce de Salberger.
- Adapter l'astuce de Salberger aux sous-ensembles hilbertiens généralisés

"Preuve" du Th. A 2

- La même récurrence fonctionne également.
- Pour le cas $n = 1$, on n'a pas besoin de comparer les groupes de Brauer de la fibre générique et des fibres fermées.
- Dans Th. A 1, les fibres sont géo. int., on utilise Lang-Weil (+ Hensel) pour assurer que on a des points locaux sur les fibres fermées, au lieu, dans Th. A 2, les fibres sont seulement abélienne-scindées, il faut appliquer la méthode de CT/Sk/SD (utilise les éléments du groupe de Brauer vertical) plus l'astuce de Salberger.
- Adapter l'astuce de Salberger aux sous-ensembles hilbertiens généralisés

"Preuve" du Th. A 2

- La même récurrence fonctionne également.
- Pour le cas $n = 1$, on n'a pas besoin de comparer les groupes de Brauer de la fibre générique et des fibres fermées.
- Dans Th. A 1, les fibres sont géo. int., on utilise Lang-Weil (+ Hensel) pour assurer que on a des points locaux sur les fibres fermées, au lieu, dans Th. A 2, les fibres sont seulement abélienne-scindées, il faut appliquer la méthode de CT/Sk/SD (utilise les éléments du groupe de Brauer vertical) plus l'astuce de Salberger.
- Adapter l'astuce de Salberger aux sous-ensembles hilbertiens généralisés

Adapter l'astuce de Salberger avec Hil

- L'astuce de Salberger est un argument purement algébrique pour les polynômes.
- On a une interprétation en terme de la géométrie sur $\mathbb{P}^1$.
- Imitons la preuve d'Ekedahl, notre argument utilise de plus
  - la notion de l'indice d'intersection sur un modèle entier de $\mathbb{P}^1$,
  - le théorème de densité de Chebotarev.
- Les détails sont trop subtils (*cf.* les preuves des Prop. 3.1.1 et 3.2.1, environ 9 pages). $\square$

Adapter l'astuce de Salberger avec Hil

- L'astuce de Salberger est un argument purement algébrique pour les polynômes.
- On a une interprétation en terme de la géométrie sur $\mathbb{P}^1$.
- Imitons la preuve d'Ekedahl, notre argument utilise de plus
  - la notion de l'indice d'intersection sur un modèle entier de $\mathbb{P}^1$,
  - le théorème de densité de Chebotarev.
- Les détails sont trop subtils (*cf.* les preuves des Prop. 3.1.1 et 3.2.1, environ 9 pages). $\square$

Adapter l'astuce de Salberger avec Hil

- L'astuce de Salberger est un argument purement algébrique pour les polynômes.
- On a une interprétation en terme de la géométrie sur $\mathbb{P}^1$.
- Imitons la preuve d'Ekedahl, notre argument utilise de plus
  - la notion de l'indice d'intersection sur un modèle entier de $\mathbb{P}^1$,
  - le théorème de densité de Chebotarev.
- Les détails sont trop subtils (*cf.* les preuves des Prop. 3.1.1 et 3.2.1, environ 9 pages). $\square$

Adapter l'astuce de Salberger avec Hil

- L'astuce de Salberger est un argument purement algébrique pour les polynômes.
- On a une interprétation en terme de la géométrie sur $\mathbb{P}^1$.
- Imitons la preuve d'Ekedahl, notre argument utilise de plus
  - la notion de l'indice d'intersection sur un modèle entier de $\mathbb{P}^1$,
  - le théorème de densité de Chebotarev.
- Les détails sont trop subtils (*cf.* les preuves des Prop. 3.1.1 et 3.2.1, environ 9 pages). $\square$

Adapter l'astuce de Salberger avec Hil

- L'astuce de Salberger est un argument purement algébrique pour les polynômes.
- On a une interprétation en terme de la géométrie sur $\mathbb{P}^1$.
- Imitons la preuve d'Ekedahl, notre argument utilise de plus
  - la notion de l'indice d'intersection sur un modèle entier de $\mathbb{P}^1$,
  - le théorème de densité de Chebotarev.
- Les détails sont trop subtils (*cf.* les preuves des Prop. 3.1.1 et 3.2.1, environ 9 pages). □

Adapter l'astuce de Salberger avec Hil

- L'astuce de Salberger est un argument purement algébrique pour les polynômes.
- On a une interprétation en terme de la géométrie sur $\mathbb{P}^1$.
- Imitons la preuve d'Ekedahl, notre argument utilise de plus
  - la notion de l'indice d'intersection sur un modèle entier de $\mathbb{P}^1$,
  - le théorème de densité de Chebotarev.
- Les détails sont trop subtils (*cf.* les preuves des Prop. 3.1.1 et 3.2.1, environ 9 pages). $\square$

Applications

Corollaire

La suite (E) est exacte, et $(PH^{Br}\text{-0cyc}^1)$ et $(AF^{Br}\text{-0cyc}^1)$ sont valables pour

- les fibrations en variétés de Severi-Brauer au-dessus de l'espace projectif,
- les fibrations en surfaces de Châtelet au-dessus de l'espace projectif.

Fibrations au-dessus d'une courbe

Fibrations au-dessus de C

Théorème B

Soit $X \to C$ une fibration au-dessus d'une courbe (avec $Ш(Jac(C)) < \infty$ supposé) satisfaisant les conditions suivantes, où $Hil \subset C$ est un sous-ensemble hilbertien généralisé.

- *toute fibre fermée est abélienne-scindée,*
- *pour tout $\theta \in Hil$, la fibre X_θ satisfait (PH-pt) ou (PH-0cyc^1) [resp. (AF-pt) ou (AF-0cyc^1)].*

Alors, pour X, (PH^{Br}-0cyc^1) est valable [resp. la suite (E) est exacte, (AF^{Br}-0cyc^1) est valable].

Application : fibrations en surfaces de Châtelet)

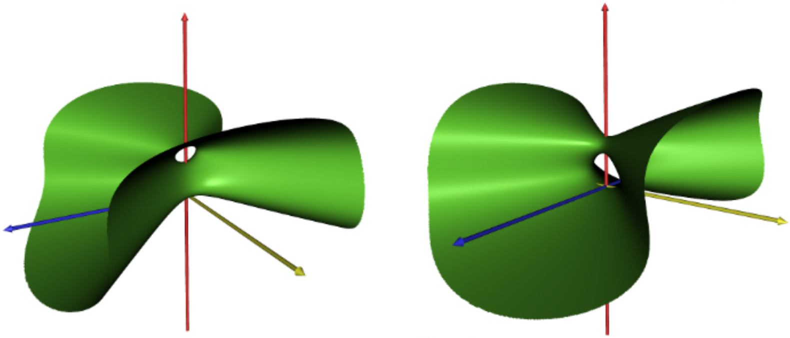
- Surface de Châtelet : $x_1^2 - ax_2^2 = P(z)$ avec $P \in k[z]$ de degré 4
- on la met en famille au-dessus d'une courbe C
- $x_1^2 - ax_2^2 = P(z)$ avec $P \in k(C)[z]$
- plus généralement, on considère

$$N_{l(C)|k(C)}(x_1 w_1 + \ldots + x_p w_p) = N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P(z)$$

avec l/k une extension cyclique de degré premier p et $P \in k(C)[z]$ (supposé irréductible sur $k(C)$, de degré quelconque)

Application : fibrations en surfaces de Châtelet)

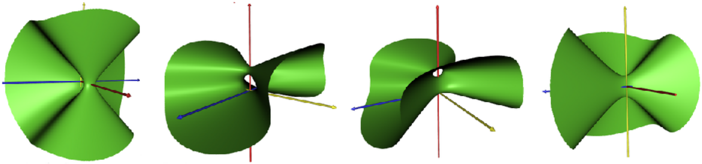
- Surface de Châtelet : $x_1^2 - ax_2^2 = P(z)$ avec $P \in k[z]$ de degré 4



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Chatelet_surface.png

Application : fibrations en surfaces de Châtelet)

- Surface de Châtelet : $x_1^2 - ax_2^2 = P(z)$ avec $P \in k[z]$ de degré 4



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Chatelet_surface.png

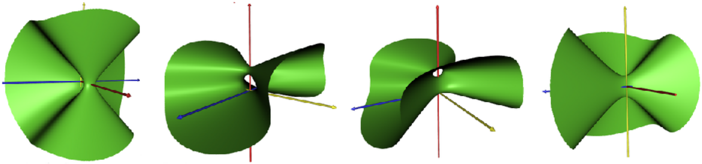
- on la met en famille au-dessus d'une courbe C
- $x_1^2 - ax_2^2 = P(z)$ avec $P \in k(C)[z]$
- plus généralement, on considère

$$N_{l(C)|k(C)}(x_1w_1 + \ldots + x_pw_p) = N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P(z)$$

avec l/k une extension cyclique de degré premier p et $P \in k(C)[z]$ (supposé irréductible sur $k(C)$, de degré quelconque)

Application : fibrations en surfaces de Châtelet)

- Surface de Châtelet : $x_1^2 - ax_2^2 = P(z)$ avec $P \in k[z]$ de degré 4



W http://en.wikipedia.org/wiki/File:Chatelet_surface.png

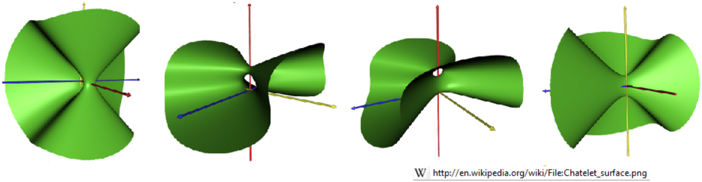
- on la met en famille au-dessus d'une courbe C
- $x_1^2 - ax_2^2 = P(z)$ avec $P \in k(C)[z]$
- plus généralement, on considère

$$N_{l(C)|k(C)}(x_1 w_1 + \ldots + x_p w_p) = N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P(z)$$

avec l/k une extension cyclique de degré premier p et $P \in k(C)[z]$ (supposé irréductible sur $k(C)$, de degré quelconque)

Application : fibrations en surfaces de Châtelet)

- Surface de Châtelet : $x_1^2 - ax_2^2 = P(z)$ avec $P \in k[z]$ de degré 4



- on la met en famille au-dessus d'une courbe C
- $x_1^2 - ax_2^2 = P(z)$ avec $P \in k(C)[z]$
- plus généralement, on considère

$$N_{l(C)|k(C)}(x_1 w_1 + \ldots + x_p w_p) = N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P(z)$$

avec l/k une extension cyclique de degré premier p et $P \in k(C)[z]$ (supposé irréductible sur $k(C)$, de degré quelconque)

Fibrations en surfaces de Châtelet

$$X: \ N_{l(C)|k(C)}(x_1 w_1 + \ldots + x_p w_p) = N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P(z)$$

l/k cyclique degré p, $P \in k(C)[z]$ irréductible sur $k(C)$

- L'extension finie $k(C)[z]/P(z)$ de $k(C)$ définit un Hil tel que $\theta \in$ Hil $\Leftrightarrow P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$ est irréductible.
- La fibre $X_\theta/k(\theta)$:

$$N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$$

  - géométriquement intègre si $P_\theta \neq 0$.
  - déployée par l'extension abélienne $l(\theta)/k(\theta)$ si $P_\theta = 0$.
- (PH^{Br}-pt) et (AF^{Br}-pt) sont valables pour X_θ, [CT/San/SD]
- $Br(X_\theta)/Br(k(\theta)) = 0$, si $\theta \in$ Hil. X_θ : (PH-pt) et (AF-pt)
- La suite (E) est exacte pour X d'après le Th. B, en particulier, pour les solides de Poonen.

Fibrations en surfaces de Châtelet

$$X: \ N_{l(C)|k(C)}(x_1 w_1 + \ldots + x_p w_p) = N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P(z)$$

l/k cyclique degré p, $P \in k(C)[z]$ irréductible sur $k(C)$

- L'extension finie $k(C)[z]/P(z)$ de $k(C)$ définit un Hil tel que $\theta \in$ Hil $\Leftrightarrow P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$ est irréductible.
- La fibre $X_\theta/k(\theta)$:

$$N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$$

  - géométriquement intègre si $P_\theta \neq 0$.
  - déployée par l'extension abélienne $l(\theta)/k(\theta)$ si $P_\theta = 0$.
- $(PH^{Br}$-pt) et $(AF^{Br}$-pt) sont valables pour X_θ, [CT/San/SD]
- $Br(X_\theta)/Br(k(\theta)) = 0$, si $\theta \in$ Hil. X_θ : (PH-pt) et (AF-pt)
- La suite (E) est exacte pour X d'après le Th. B, en particulier, pour les solides de Poonen.

Fibrations en surfaces de Châtelet

$$X: \ N_{l(C)|k(C)}(x_1w_1+\ldots+x_pw_p)=N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x})=P(z)$$

l/k cyclique degré p, $P\in k(C)[z]$ irréductible sur $k(C)$

- L'extension finie $k(C)[z]/P(z)$ de $k(C)$ définit un Hil tel que $\theta\in \text{Hil} \Leftrightarrow P_\theta(z)\in k(\theta)[z]$ est irréductible.
- La fibre $X_\theta/k(\theta)$:

$$N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x})=P_\theta(z)\in k(\theta)[z]$$

  - géométriquement intègre si $P_\theta\neq 0$.
  - déployée par l'extension abélienne $l(\theta)/k(\theta)$ si $P_\theta=0$.
- $(PH^{Br}$-pt) et $(AF^{Br}$-pt) sont valables pour X_θ, [CT/San/SD]
- $Br(X_\theta)/Br(k(\theta))=0$, si $\theta\in$ Hil. X_θ : (PH-pt) et (AF-pt)
- La suite (E) est exacte pour X d'après le Th. B, en particulier, pour les solides de Poonen.

Fibrations en surfaces de Châtelet

$$X: \ N_{l(C)|k(C)}(x_1 w_1 + \ldots + x_p w_p) = N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P(z)$$

l/k cyclique degré p, $P \in k(C)[z]$ irréductible sur $k(C)$

- L'extension finie $k(C)[z]/P(z)$ de $k(C)$ définit un Hil tel que $\theta \in \text{Hil} \Leftrightarrow P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$ est irréductible.
- La fibre $X_\theta/k(\theta)$:

$$N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$$

  - géométriquement intègre si $P_\theta \neq 0$.
  - déployée par l'extension abélienne $l(\theta)/k(\theta)$ si $P_\theta = 0$.
- $(PH^{Br}$-pt) et $(AF^{Br}$-pt) sont valables pour X_θ, [CT/San/SD]
- $Br(X_\theta)/Br(k(\theta)) = 0$, si $\theta \in \text{Hil}$. X_θ : (PH-pt) et (AF-pt)
- La suite (E) est exacte pour X d'après le Th. B, en particulier, pour les solides de Poonen.

Fibrations en surfaces de Châtelet

$$X : \; N_{l(C)|k(C)}(x_1 w_1 + \ldots + x_p w_p) = N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P(z)$$

l/k cyclique degré p, $P \in k(C)[z]$ irréductible sur $k(C)$

- L'extension finie $k(C)[z]/P(z)$ de $k(C)$ définit un Hil tel que $\theta \in \text{Hil} \Leftrightarrow P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$ est irréductible.
- La fibre $X_\theta/k(\theta)$:

$$N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$$

  - géométriquement intègre si $P_\theta \neq 0$.
  - déployée par l'extension abélienne $l(\theta)/k(\theta)$ si $P_\theta = 0$.
- $(PH^{Br}$-pt) et $(AF^{Br}$-pt) sont valables pour X_θ, [CT/San/SD]
- $Br(X_\theta)/Br(k(\theta)) = 0$, si $\theta \in \text{Hil}$. X_θ : (PH-pt) et (AF-pt)
- La suite (E) est exacte pour X d'après le Th. B, en particulier, pour les solides de Poonen.

Fibrations en surfaces de Châtelet

$$X: \; N_{l(C)|k(C)}(x_1 w_1 + \ldots + x_p w_p) = N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P(z)$$

l/k cyclique degré p, $P \in k(C)[z]$ irréductible sur $k(C)$

- L'extension finie $k(C)[z]/P(z)$ de $k(C)$ définit un Hil tel que $\theta \in \text{Hil} \Leftrightarrow P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$ est irréductible.
- La fibre $X_\theta/k(\theta)$:

$$N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$$

  - géométriquement intègre si $P_\theta \neq 0$.
  - déployée par l'extension abélienne $l(\theta)/k(\theta)$ si $P_\theta = 0$.
- $(PH^{Br}$-pt) et $(AF^{Br}$-pt) sont valables pour X_θ, [CT/San/SD]
- $Br(X_\theta)/Br(k(\theta)) = 0$, si $\theta \in \text{Hil}$. X_θ : (PH-pt) et (AF-pt)
- La suite (E) est exacte pour X d'après le Th. B, en particulier, pour les solides de Poonen.

Fibrations en surfaces de Châtelet

$$X: \; N_{l(C)|k(C)}(x_1 w_1 + \ldots + x_p w_p) = N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P(z)$$

l/k cyclique degré p, $P \in k(C)[z]$ irréductible sur $k(C)$

- L'extension finie $k(C)[z]/P(z)$ de $k(C)$ définit un Hil tel que $\theta \in \text{Hil} \Leftrightarrow P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$ est irréductible.
- La fibre $X_\theta/k(\theta)$:

$$N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$$

  - géométriquement intègre si $P_\theta \neq 0$.
  - déployée par l'extension abélienne $l(\theta)/k(\theta)$ si $P_\theta = 0$.
- $(PH^{Br}$-pt) et $(AF^{Br}$-pt) sont valables pour X_θ, [CT/San/SD]
- $Br(X_\theta)/Br(k(\theta)) = 0$, si $\theta \in \text{Hil}$. X_θ : (PH-pt) et (AF-pt)
- La suite (E) est exacte pour X d'après le Th. B, en particulier, pour les solides de Poonen.

Fibrations en surfaces de Châtelet

$$X: \ N_{l(C)|k(C)}(x_1w_1+\ldots+x_pw_p) = N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P(z)$$

l/k cyclique degré p, $P \in k(C)[z]$ irréductible sur $k(C)$

- L'extension finie $k(C)[z]/P(z)$ de $k(C)$ définit un Hil tel que $\theta \in \mathrm{Hil} \Leftrightarrow P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$ est irréductible.
- La fibre $X_\theta/k(\theta)$:

$$N_{l(C)|k(C)}(\overrightarrow{x}) = P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$$

  - géométriquement intègre si $P_\theta \neq 0$.
  - déployée par l'extension abélienne $l(\theta)/k(\theta)$ si $P_\theta = 0$.
- $(PH^{Br}$-pt) et $(AF^{Br}$-pt) sont valables pour X_θ, [CT/San/SD]
- $Br(X_\theta)/Br(k(\theta)) = 0$, si $\theta \in \mathrm{Hil}$. X_θ : (PH-pt) et (AF-pt)
- La suite (E) est exacte pour X d'après le Th. B, en particulier, pour les solides de Poonen.

Rappel Th. B

Théorème B

Soit $X \to C$ une fibration au-dessus d'une courbe (avec $Ш(Jac(C)) < \infty$ supposé) satisfaisant les conditions suivantes, où $Hil \subset C$ est un sous-ensemble hilbertien généralisé.

- *toute fibre fermée est abélienne-scindée,*
- *pour tout $\theta \in Hil$, la fibre X_θ satisfait (PH-pt) ou (PH-0cyc^1) [resp. (AF-pt) ou (AF-0cyc^1)].*

Alors, pour X, (PH^{Br}-0cyc^1) est valable [resp. la suite (E) est exacte, (AF^{Br}-0cyc^1) est valable].

"Preuve" du Th. B

- Le cas où $C = \mathbb{P}^1$ a été fait (Th. A 2).
- Afin de passer au cas général, on applique l'argument récent de Wittenberg (2010) :
- plus un argument complémentaire si k n'est pas totalement imaginaire, $H^2(k, Pic^o(C_{\bar{k}})) \neq 0$.
- Rq : Hil se comporte bien avec le revêtement fini $C \to \mathbb{P}^1$. $\square$

"Preuve" du Th. B

- Le cas où $C = \mathbb{P}^1$ a été fait (Th. A 2).
- Afin de passer au cas général, on applique l'argument récent de Wittenberg (2010) :
- plus un argument complémentaire si k n'est pas totalement imaginaire, $H^2(k, Pic^o(C_{\bar{k}})) \neq 0$.
- Rq : Hil se comporte bien avec le revêtement fini $C \to \mathbb{P}^1$. □

"Preuve" du Th. B

- Le cas où $C = \mathbb{P}^1$ a été fait (Th. A 2).
- Afin de passer au cas général, on applique l'argument récent de Wittenberg (2010) :

On part de

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"] \\ C \end{tikzcd}$$

- plus un argument complémentaire si k n'est pas totalement imaginaire, $H^2(k, Pic^o(C_{\bar{k}})) \neq 0$.

"Preuve" du Th. B

- Le cas où $C = \mathbb{P}^1$ a été fait (Th. A 2).
- Afin de passer au cas général, on applique l'argument récent de Wittenberg (2010) :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] & \\ C \arrow[r, "\psi", "\text{(bien choisi)}"'] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

- plus un argument complémentaire si k n'est pas totalement imaginaire, $H^2(k, Pic^o(C_{\bar{k}})) \neq 0$.

"Preuve" du Th. B

- Le cas où $C = \mathbb{P}^1$ a été fait (Th. A 2).
- Afin de passer au cas général, on applique l'argument récent de Wittenberg (2010) :

$R = R_{C/\mathbb{P}^1}(X)$
restriction à la Weil le long de ψ

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[ddr, "\pi\ (\text{propre})"'] & & \\
& & R \arrow[d, "p\ (\text{pas propre})"] \\
& C \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

- plus un argument complémentaire si k n'est pas totalement imaginaire, $H^2(k, Pic^o(C_{\bar{k}})) \neq 0$.

"Preuve" du Th. B

- Le cas où $C = \mathbb{P}^1$ a été fait (Th. A 2).
- Afin de passer au cas général, on applique l'argument récent de Wittenberg (2010) :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[ddr, "\pi"'] & & & R' \arrow[ddl, "p' \text{ (Nagata : propre)}"] \\
& & R \arrow[ur] \arrow[d, "p"] & \\
& C \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd}$$

- plus un argument complémentaire si k n'est pas totalement imaginaire, $H^2(k, Pic^o(C_{\bar{k}})) \neq 0$.

"Preuve" du Th. B

- Le cas où $C = \mathbb{P}^1$ a été fait (Th. A 2).
- Afin de passer au cas général, on applique l'argument récent de Wittenberg (2010) :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[ddr, "\pi"'] & & R' \times_{\mathbb{P}^1} C \arrow[r, "\psi''"] \arrow[ddl] & R' \arrow[ddl, "p'"] \\
 & & R \arrow[ur] \arrow[d, "p"] & \\
 & C \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd}$$

- plus un argument complémentaire si k n'est pas totalement imaginaire, $H^2(k, Pic^o(C_{\bar{k}})) \neq 0$.

"Preuve" du Th. B

- Le cas où $C = \mathbb{P}^1$ a été fait (Th. A 2).
- Afin de passer au cas général, on applique l'argument récent de Wittenberg (2010) :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[ddr, "\pi"'] & & R' \times_{\mathbb{P}^1} C \arrow[rr, "\psi''"] & & R' \arrow[ddl, "p'"] \\
& R \times_{\mathbb{P}^1} C \arrow[ur] \arrow[rr, "\psi'"] \arrow[d, "p_C"] & & R \arrow[ur] \arrow[d, "p"] & \\
& C \arrow[rr, "\psi"] & & \mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd}$$

- plus un argument complémentaire si k n'est pas totalement imaginaire, $H^2(k, Pic^o(C_{\bar{k}})) \neq 0$.

"Preuve" du Th. B

- Le cas où $C = \mathbb{P}^1$ a été fait (Th. A 2).
- Afin de passer au cas général, on applique l'argument récent de Wittenberg (2010) :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[ddr, "\pi"'] & & R' \times_{\mathbb{P}^1} C \arrow[r, "\psi''"] & R' \arrow[ddl, "p'"] \\
& R \times_{\mathbb{P}^1} C \arrow[ul, "\sigma"'] \arrow[ur] \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "p_C"] & R \arrow[ur] \arrow[d, "p"] & \\
& C \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd}$$

On compare
$Br_{vert}(X) \longleftrightarrow Br_{vert}(R')$

- plus un argument complémentaire si k n'est pas totalement imaginaire, $H^2(k, Pic^o(C_{\bar{k}})) \neq 0$.

"Preuve" du Th. B

- Le cas où $C = \mathbb{P}^1$ a été fait (Th. A 2).
- Afin de passer au cas général, on applique l'argument récent de Wittenberg (2010) :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[ddr, "\pi"'] & & R' \times_{\mathbb{P}^1} C \arrow[r, "\psi''"] & R' \arrow[ddl, "p'"] \\
& R \times_{\mathbb{P}^1} C \arrow[ul, "\sigma"'] \arrow[ur] \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "p_C"] & R \arrow[ur] \arrow[d, "p"] & \\
& C \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd}$$

- plus un argument complémentaire si k n'est pas totalement imaginaire, $H^2(k, Pic^o(C_{\bar{k}})) \neq 0$.
- Rq : Hil se comporte bien avec le revêtement fini $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$.

"Preuve" du Th. B

- Le cas où $C = \mathbb{P}^1$ a été fait (Th. A 2).
- Afin de passer au cas général, on applique l'argument récent de Wittenberg (2010) :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[ddr, "\pi"'] & & R' \times_{\mathbb{P}^1} C \arrow[r, "\psi''"] & R' \arrow[ddl, "p'"] \\
& R \times_{\mathbb{P}^1} C \arrow[ul, "\sigma"'] \arrow[ur] \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "p_C"] & R \arrow[ur] \arrow[d, "p"] & \\
& C \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd}$$

- plus un argument complémentaire si k n'est pas totalement imaginaire, $H^2(k, Pic^o(C_{\bar{k}})) \neq 0$.
- Rq : Hil se comporte bien avec le revêtement fini $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$. $\square$

"Preuve" du Th. B, cas facile

La preuve précédente est assez compliquée.
Si l'on suppose que *toutes les fibres sont géométriquement intègres* (c'est le cas pour l'exemple original de Poonen),
la preuve deviendra plus simple.

- Lang-Weil + Hensel $\Rightarrow \exists S \overset{fini}{\subset} \Omega$, tel que $X_\theta(k(\theta)_w) \neq \emptyset$ pour $w \notin S \otimes_k k(\theta)$.
- Approx. faible appliquée à S, méthode des fibrations, théorème des fonctions implicites :

"Preuve" du Th. B, cas facile

La preuve précédente est assez compliquée.
Si l'on suppose que *toutes les fibres sont géométriquement intègres* (c'est le cas pour l'exemple original de Poonen),
la preuve deviendra plus simple.

- Lang-Weil + Hensel $\Rightarrow \exists S \overset{fini}{\subset} \Omega$, tel que $X_\theta(k(\theta)_w) \neq \emptyset$ pour $w \notin S \otimes_k k(\theta)$.
- Approx. faible appliquée à S, méthode des fibrations, théorème des fonctions implicites :

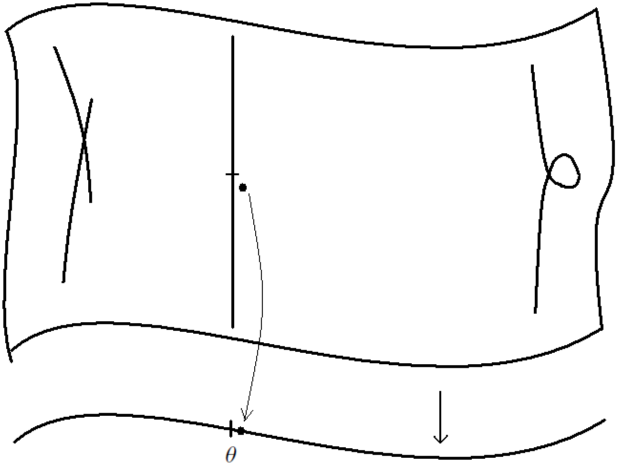
"Preuve" du Th. B, cas facile

La preuve précédente est assez compliquée.
Si l'on suppose que *toutes les fibres sont géométriquement intègres* (c'est le cas pour l'exemple original de Poonen),
la preuve deviendra plus simple.

- Lang-Weil + Hensel $\Rightarrow \exists S \overset{fini}{\subset} \Omega$, tel que $X_\theta(k(\theta)_w) \neq \emptyset$ pour $w \notin S \otimes_k k(\theta)$.
- Approx. faible appliquée à S, méthode des fibrations, théorème des fonctions implicites :

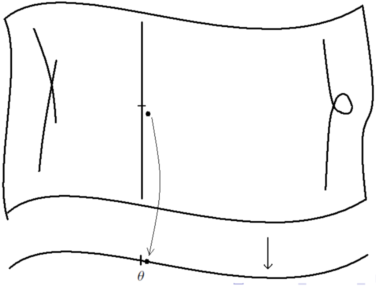
Méthode des fibrations

un dessin qui vit génériquement dans la tête d'un géomètre algébriste



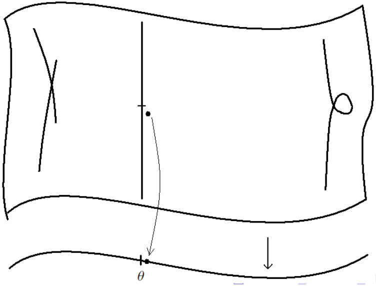
Méthode des fibrations

- **Q** : 0-cycles $\rightsquigarrow$ points rationnels (de corps résiduels certaines extensions)?
  - ajouter un multiple d'un point fermé + lemme de déplacement $\rightsquigarrow$ 0-cycles effectifs locaux
- **Q** : Comment assurer que θ est un point fermé (au lieu d'un 0-cycle eff.), de plus $\theta \in$ Hil ?
  - Théorème d'irréductibilité de Hilbert généralisé



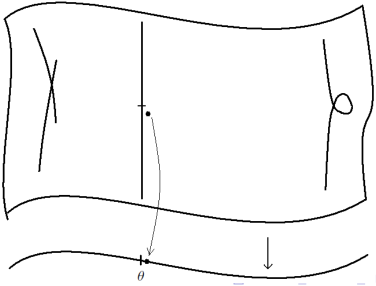
Méthode des fibrations

- **Q** : 0-cycles $\rightsquigarrow$ points rationnels (de corps résiduels certaines extensions)?
  - ajouter un multiple d'un point fermé + lemme de déplacement $\rightsquigarrow$ 0-cycles effectifs locaux
- **Q** : Comment assurer que θ est un point fermé (au lieu d'un 0-cycle eff.), de plus $\theta \in$ Hil ?
  - Théorème d'irréductibilité de Hilbert généralisé



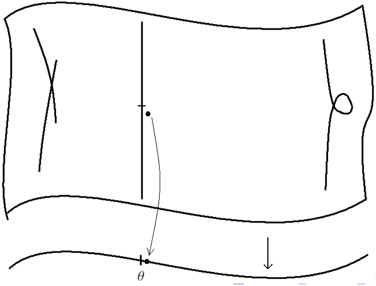
Méthode des fibrations

- **Q** : 0-cycles $\rightsquigarrow$ points rationnels (de corps résiduels certaines extensions)?
  - ajouter un multiple d'un point fermé + lemme de déplacement $\rightsquigarrow$ 0-cycles effectifs locaux
- **Q** : Comment assurer que θ est un point fermé (au lieu d'un 0-cycle eff.), de plus $\theta \in$ Hil ?
  - Théorème d'irréductibilité de Hilbert généralisé



Méthode des fibrations

- **Q** : 0-cycles $\rightsquigarrow$ points rationnels (de corps résiduels certaines extensions)?
  - ajouter un multiple d'un point fermé + lemme de déplacement $\rightsquigarrow$ 0-cycles effectifs locaux
- **Q** : Comment assurer que θ est un point fermé (au lieu d'un 0-cycle eff.), de plus $\theta \in$ Hil ?
  - Théorème d'irréductibilité de Hilbert généralisé



Théorème d'irréductibilité de Hilbert généralisé

Proposition (Lemme 1.3.4)

Soient C une courbe (proj. lis. géo. int.) de genre g sur un corps de nombres k et $Hil \subset C$ un sous-ensemble hilbertien généralisé. Soit $y \in Z_0^{eff}(C)$ un zéro-cycle de degré $d > 2g$. On fixe $S \overset{fini}{\subset} \Omega$. On suppose que $z_v \in Z_0^{eff}(C_v)$ est séparable de degré d à support disjoint de supp(y) et $z_v \sim y \times_k k_v$ sur C_v pour toute $v \in S$.
Alors, il existe un point fermé θ de C tel que
(1) $\theta \in Hil$,
(2) $\theta \sim y$ sur C,
(3) θ soit suffisamment proche de z_v pour tout $v \in S$.

Remarque

Si $C = \mathbb{P}^1$ et $d = 1$, on retrouve le résultat d'Ekedahl.

Théorème d'irréductibilité de Hilbert généralisé

Proposition (Lemme 1.3.4)

Soient C une courbe (proj. lis. géo. int.) de genre g sur un corps de nombres k et $Hil \subset C$ un sous-ensemble hilbertien généralisé. Soit $y \in Z_0^{eff}(C)$ un zéro-cycle de degré $d > 2g$. On fixe $S \overset{fini}{\subset} \Omega$. On suppose que $z_v \in Z_0^{eff}(C_v)$ est séparable de degré d à support disjoint de supp(y) et $z_v \sim y \times_k k_v$ sur C_v pour toute $v \in S$.
Alors, il existe un point fermé θ de C tel que
(1) $\theta \in Hil$,
(2) $\theta \sim y$ sur C,
(3) θ soit suffisamment proche de z_v pour tout $v \in S$.

Remarque

Si $C = \mathbb{P}^1$ et $d = 1$, on retrouve le résultat d'Ekedahl.

Démonstration

- $\forall v \in S$, $z_v - y = div(f_v)$ avec $f_v \in k_v^*(C_v)/k_v^*$.
- $deg(y) = d > 2g \overset{\text{R.-R.}}{\Longrightarrow}$ $dim_k \Gamma(C, \mathcal{O}_C(y)) = r = d + 1 - g > g + 1$
- AF appliquée à $\mathbb{P}^{r-1} \Rightarrow \exists f \in k(C)^*/k^*$ telle que
  - (i) f suffisamment proche de f_v $\forall v \in S$,
  - (ii) $div(f) = y' - y$ avec $y' \in Z_0^{eff}(C)$ $supp(y') \cap supp(y) = \emptyset$.
- (i) $\Rightarrow y'$ est suffisamment proche de z_v $\forall v \in S$
- (ii) $\Rightarrow \exists \psi : C \to \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^*(\infty) = y$ et $\psi^*(0) = y'$
- Hil est défini par $Z \to U \subset C \rightsquigarrow Z \to C \to \mathbb{P}^1$ définit $\mathrm{Hil}' \subset \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}$ pour tout $\theta' \in \mathrm{Hil}'$.
- (Ekedahl) $\exists \theta' \in \mathrm{Hil}' \cap \mathbb{P}^1(k)$ proche de 0 $\forall v \in S$
- $\theta = \psi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}$ proche de $y' \times_k k_v$ donc de z_v $\forall v \in S$ et de plus $\theta \sim y$.

Démonstration

- $\forall v \in S$, $z_v - y = div(f_v)$ avec $f_v \in k_v^*(C_v)/k_v^*$.
- $deg(y) = d > 2g \overset{\text{R.-R.}}{\Longrightarrow}$
  $dim_k \Gamma(C, \mathcal{O}_C(y)) = r = d + 1 - g > g + 1$
- AF appliquée à $\mathbb{P}^{r-1} \Rightarrow \exists f \in k(C)^*/k^*$ telle que
  (i) f suffisamment proche de f_v $\forall v \in S$,
  (ii) $div(f) = y' - y$ avec $y' \in Z_0^{eff}(C)$ $supp(y') \cap supp(y) = \emptyset$.
- (i) $\Rightarrow$ y' est suffisamment proche de z_v $\forall v \in S$
- (ii) $\Rightarrow \exists \psi : C \to \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^*(\infty) = y$ et $\psi^*(0) = y'$
- Hil est défini par $Z \to U \subset C \rightsquigarrow Z \to C \to \mathbb{P}^1$ définit $\mathrm{Hil}' \subset \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}$ pour tout $\theta' \in \mathrm{Hil}'$.
- (Ekedahl) $\exists \theta' \in \mathrm{Hil}' \cap \mathbb{P}^1(k)$ proche de 0 $\forall v \in S$
- $\theta = \psi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}$ proche de $y' \times_k k_v$ donc de z_v $\forall v \in S$ et de plus $\theta \sim y$.

Démonstration

- $\forall v \in S$, $z_v - y = div(f_v)$ avec $f_v \in k_v^*(C_v)/k_v^*$.
- $deg(y) = d > 2g \overset{\text{R.-R.}}{\Longrightarrow}$
  $dim_k \Gamma(C, \mathcal{O}_C(y)) = r = d + 1 - g > g + 1$
- AF appliquée à $\mathbb{P}^{r-1} \Rightarrow \exists f \in k(C)^*/k^*$ telle que
  - (i) f suffisamment proche de f_v $\forall v \in S$,
  - (ii) $div(f) = y' - y$ avec $y' \in Z_0^{eff}(C)$ $supp(y') \cap supp(y) = \emptyset$.
- (i) $\Rightarrow y'$ est suffisamment proche de z_v $\forall v \in S$
- (ii) $\Rightarrow \exists \psi : C \to \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^*(\infty) = y$ et $\psi^*(0) = y'$
- Hil est défini par $Z \to U \subset C \rightsquigarrow Z \to C \to \mathbb{P}^1$ définit $\mathrm{Hil}' \subset \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}$ pour tout $\theta' \in \mathrm{Hil}'$.
- (Ekedahl) $\exists \theta' \in \mathrm{Hil}' \cap \mathbb{P}^1(k)$ proche de 0 $\forall v \in S$
- $\theta = \psi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}$ proche de $y' \times_k k_v$ donc de z_v $\forall v \in S$ et de plus $\theta \sim y$.

Démonstration

- $\forall v \in S$, $z_v - y = div(f_v)$ avec $f_v \in k_v^*(C_v)/k_v^*$.
- $deg(y) = d > 2g \overset{\text{R.-R.}}{\Longrightarrow}$ $dim_k\Gamma(C,\mathcal{O}_C(y)) = r = d + 1 - g > g + 1$
- AF appliquée à $\mathbb{P}^{r-1} \Rightarrow \exists f \in k(C)^*/k^*$ telle que
  - (i) f suffisamment proche de f_v $\forall v \in S$,
  - (ii) $div(f) = y' - y$ avec $y' \in Z_0^{eff}(C)$ $supp(y') \cap supp(y) = \emptyset$.
- (i) $\Rightarrow y'$ est suffisamment proche de z_v $\forall v \in S$
- (ii) $\Rightarrow \exists \psi : C \to \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^*(\infty) = y$ et $\psi^*(0) = y'$
- Hil est défini par $Z \to U \subset C \rightsquigarrow Z \to C \to \mathbb{P}^1$ définit $\mathrm{Hil}' \subset \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}$ pour tout $\theta' \in \mathrm{Hil}'$.
- (Ekedahl) $\exists \theta' \in \mathrm{Hil}' \cap \mathbb{P}^1(k)$ proche de 0 $\forall v \in S$
- $\theta = \psi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}$ proche de $y' \times_k k_v$ donc de z_v $\forall v \in S$ et de plus $\theta \sim y$.

Démonstration

- $\forall v \in S$, $z_v - y = div(f_v)$ avec $f_v \in k_v^*(C_v)/k_v^*$.
- $deg(y) = d > 2g \overset{\text{R.-R.}}{\Longrightarrow}$
  $dim_k\Gamma(C,\mathcal{O}_C(y)) = r = d+1-g > g+1$
- AF appliquée à $\mathbb{P}^{r-1} \Rightarrow \exists f \in k(C)^*/k^*$ telle que
  (i) f suffisamment proche de f_v $\forall v \in S$,
  (ii) $div(f) = y' - y$ avec $y' \in Z_0^{eff}(C)$ $supp(y') \cap supp(y) = \emptyset$.
- (i) $\Rightarrow$ y' est suffisamment proche de z_v $\forall v \in S$
- (ii) $\Rightarrow \exists \psi : C \to \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^*(\infty) = y$ et $\psi^*(0) = y'$
- Hil est défini par $Z \to U \subset C \rightsquigarrow Z \to C \to \mathbb{P}^1$ définit $\mathrm{Hil}' \subset \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}$ pour tout $\theta' \in \mathrm{Hil}'$.
- (Ekedahl) $\exists \theta' \in \mathrm{Hil}' \cap \mathbb{P}^1(k)$ proche de 0 $\forall v \in S$
- $\theta = \psi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}$ proche de $y' \times_k k_v$ donc de z_v $\forall v \in S$ et de plus $\theta \sim y$.

Démonstration

- $\forall v \in S$, $z_v - y = div(f_v)$ avec $f_v \in k_v^*(C_v)/k_v^*$.
- $deg(y) = d > 2g \overset{\text{R.-R.}}{\Longrightarrow}$ $dim_k\Gamma(C,\mathcal{O}_C(y)) = r = d+1-g > g+1$
- AF appliquée à $\mathbb{P}^{r-1} \Rightarrow \exists f \in k(C)^*/k^*$ telle que
  - (i) f suffisamment proche de f_v $\forall v \in S$,
  - (ii) $div(f) = y' - y$ avec $y' \in Z_0^{eff}(C)$ $supp(y') \cap supp(y) = \emptyset$.
- (i) $\Rightarrow$ y' est suffisamment proche de z_v $\forall v \in S$
- (ii) $\Rightarrow \exists \psi : C \to \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^*(\infty) = y$ et $\psi^*(0) = y'$
- Hil est défini par $Z \to U \subset C \rightsquigarrow Z \to C \to \mathbb{P}^1$ définit $\mathrm{Hil}' \subset \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}$ pour tout $\theta' \in \mathrm{Hil}'$.
- (Ekedahl) $\exists \theta' \in \mathrm{Hil}' \cap \mathbb{P}^1(k)$ proche de 0 $\forall v \in S$
- $\theta = \psi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}$ proche de $y' \times_k k_v$ donc de z_v $\forall v \in S$ et de plus $\theta \sim y$.

Démonstration

- $\forall v \in S$, $z_v - y = div(f_v)$ avec $f_v \in k_v^*(C_v)/k_v^*$.
- $deg(y) = d > 2g \overset{\text{R.-R.}}{\Longrightarrow}$
  $dim_k \Gamma(C, \mathcal{O}_C(y)) = r = d + 1 - g > g + 1$
- AF appliquée à $\mathbb{P}^{r-1} \Rightarrow \exists f \in k(C)^*/k^*$ telle que
  (i) f suffisamment proche de f_v $\forall v \in S$,
  (ii) $div(f) = y' - y$ avec $y' \in Z_0^{eff}(C)$ $supp(y') \cap supp(y) = \emptyset$.
- (i) $\Rightarrow y'$ est suffisamment proche de z_v $\forall v \in S$
- (ii) $\Rightarrow \exists \psi : C \to \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^*(\infty) = y$ et $\psi^*(0) = y'$
- Hil est défini par $Z \to U \subset C \rightsquigarrow Z \to C \to \mathbb{P}^1$ définit
  $\text{Hil}' \subset \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^{-1}(\theta') \in \text{Hil}$ pour tout $\theta' \in \text{Hil}'$.
- (Ekedahl) $\exists \theta' \in \text{Hil}' \cap \mathbb{P}^1(k)$ proche de 0 $\forall v \in S$
- $\theta = \psi^{-1}(\theta') \in \text{Hil}$ proche de $y' \times_k k_v$ donc de z_v $\forall v \in S$ et de plus $\theta \sim y$.

Démonstration

- $\forall v \in S$, $z_v - y = div(f_v)$ avec $f_v \in k_v^*(C_v)/k_v^*$.
- $deg(y) = d > 2g \overset{\text{R.-R.}}{\Longrightarrow}$
  $dim_k \Gamma(C, \mathcal{O}_C(y)) = r = d + 1 - g > g + 1$
- AF appliquée à $\mathbb{P}^{r-1} \Rightarrow \exists f \in k(C)^*/k^*$ telle que
  (i) f suffisamment proche de f_v $\forall v \in S$,
  (ii) $div(f) = y' - y$ avec $y' \in Z_0^{eff}(C)$ $supp(y') \cap supp(y) = \emptyset$.
- (i) $\Rightarrow y'$ est suffisamment proche de z_v $\forall v \in S$
- (ii) $\Rightarrow \exists \psi : C \to \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^*(\infty) = y$ et $\psi^*(0) = y'$
- Hil est défini par $Z \to U \subset C \rightsquigarrow Z \to C \to \mathbb{P}^1$ définit
  $\mathrm{Hil}' \subset \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}$ pour tout $\theta' \in \mathrm{Hil}'$.
- (Ekedahl) $\exists \theta' \in \mathrm{Hil}' \cap \mathbb{P}^1(k)$ proche de 0 $\forall v \in S$
- $\theta = \psi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}$ proche de $y' \times_k k_v$ donc de z_v $\forall v \in S$ et de plus $\theta \sim y$. $\square$

Zéro-cycles vs. points rationnels

Résultat principal

Théorème C

Soit $X_{/k}$ une variété rationnellement connexe, on a les implications suivantes :

- *(PH^{Br}-pt) pour $X_K (\forall K/k)$ finie $\Rightarrow$ (PH^{Br}-0cyc^1) pour X;*
- *(AF^{Br}-pt) pour $X_K (\forall K/k)$ finie $\Rightarrow$ (AF^{Br}-0cyc^1) pour X;*
- *(AF^{Br}-0cyc^1) pour $X_K (\forall K/k)$ finie $\Rightarrow$ (E) est exacte pour X.*

- Rq : On sait déjà que (E) exacte $\Rightarrow$ (PH^{Br}-0cyc^1) et (AF^{Br}-0cyc^1).

Corollaire (Th. C + Borovoi)

Soit X une compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe linéaire connexe G à stabilisateur connexe (ou abélien si G est simplement connexe). Alors la suite (E) est exacte pour X.

- Rq : Ce n'était pas connu même pour un tore de dim≥ 2.

Résultat principal

Théorème C

Soit $X_{/k}$ une variété rationnellement connexe, on a les implications suivantes :

- $(PH^{Br}\text{-}pt)$ *pour* $X_K(\forall K/k)$ *finie* $\Rightarrow$ $(PH^{Br}\text{-}0cyc^1)$ *pour* X;
- $(AF^{Br}\text{-}pt)$ *pour* $X_K(\forall K/k)$ *finie* $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-}0cyc^1)$ *pour* X;
- $(AF^{Br}\text{-}0cyc^1)$ *pour* $X_K(\forall K/k)$ *finie* $\Rightarrow$ (E) *est exacte pour* X.

- Rq : On sait déjà que (E) exacte $\Rightarrow$ $(PH^{Br}\text{-}0\mathrm{cyc}^1)$ et $(AF^{Br}\text{-}0\mathrm{cyc}^1)$.

Corollaire (Th. C + Borovoi)

Soit X une compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe linéaire connexe G à stabilisateur connexe (ou abélien si G est simplement connexe). Alors la suite (E) est exacte pour X.

- Rq : Ce n'était pas connu même pour un tore de dim≥2.

Résultat principal

Théorème C

Soit $X_{/k}$ une variété rationnellement connexe, on a les implications suivantes :

- $(PH^{Br}\text{-}pt)$ *pour* $X_K(\forall K/k)$ *finie* $\Rightarrow$ $(PH^{Br}\text{-}0cyc^1)$ *pour* X;
- $(AF^{Br}\text{-}pt)$ *pour* $X_K(\forall K/k)$ *finie* $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-}0cyc^1)$ *pour* X;
- $(AF^{Br}\text{-}0cyc^1)$ *pour* $X_K(\forall K/k)$ *finie* $\Rightarrow$ (E) *est exacte pour* X.

- Rq : On sait déjà que (E) exacte $\Rightarrow$ $(PH^{Br}\text{-}0\text{cyc}^1)$ et $(AF^{Br}\text{-}0\text{cyc}^1)$.

Corollaire (Th. C + Borovoi)

Soit X une compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe linéaire connexe G à stabilisateur connexe (ou abélien si G est simplement connexe). Alors la suite (E) est exacte pour X.

- Rq : Ce n'était pas connu même pour un tore de dim≥2.

Résultat principal

Théorème C

Soit $X_{/k}$ une variété rationnellement connexe, on a les implications suivantes :

- $(PH^{Br}\text{-}pt)$ *pour* $X_K (\forall K/k)$ *finie* $\Rightarrow$ $(PH^{Br}\text{-}0cyc^1)$ *pour* X;
- $(AF^{Br}\text{-}pt)$ *pour* $X_K (\forall K/k)$ *finie* $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-}0cyc^1)$ *pour* X;
- $(AF^{Br}\text{-}0cyc^1)$ *pour* $X_K (\forall K/k)$ *finie* $\Rightarrow$ (E) *est exacte pour* X.

- Rq : On sait déjà que (E) exacte $\Rightarrow$ $(PH^{Br}\text{-}0\mathrm{cyc}^1)$ et $(AF^{Br}\text{-}0\mathrm{cyc}^1)$.

Corollaire (Th. C + Borovoi)

Soit X une compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe linéaire connexe G à stabilisateur connexe (ou abélien si G est simplement connexe). Alors la suite (E) est exacte pour X.

- Rq : Ce n'était pas connu même pour un tore de dim>2.

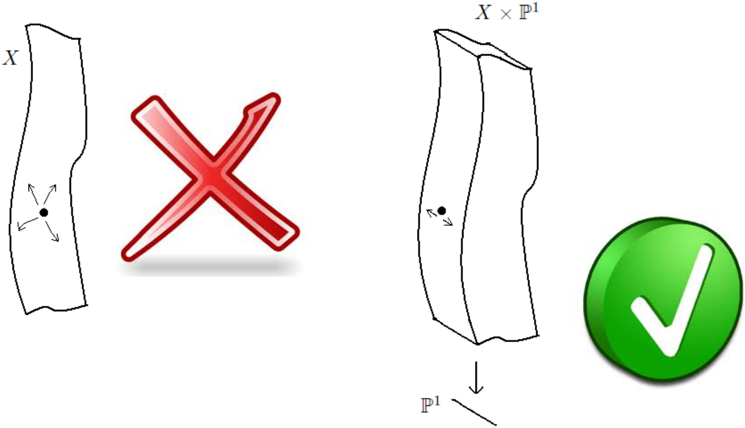
Idée de la preuve

idée : méthode des fibrations appliquée à $X \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$

- avantages :
  - plus de flexibilité
  - une structure de fibration, toutes les techniques précédentes fonctionnent!
  - ceci ne change pas le groupe de Brauer

Idée de la preuve

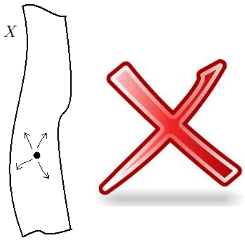
idée : méthode des fibrations appliquée à $X \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$

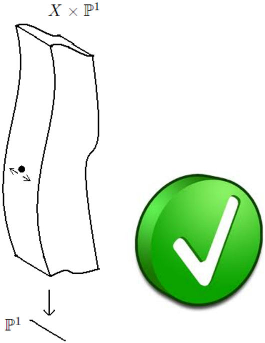


- avantages :
  - plus de flexibilité

Idée de la preuve

idée : méthode des fibrations appliquée à $X \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$

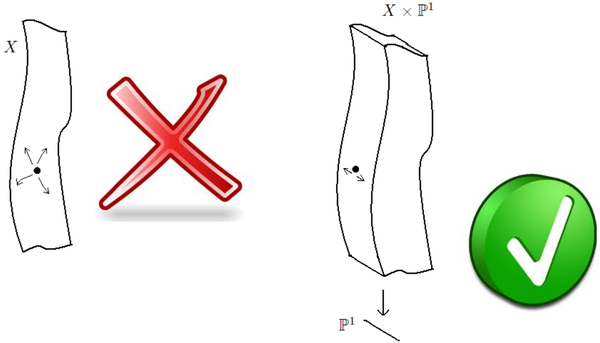




- avantages :
  - plus de flexibilité
  - une structure de fibration, toutes les techniques précédentes fonctionnent!
  - ceci ne change pas le groupe de Brauer

Idée de la preuve

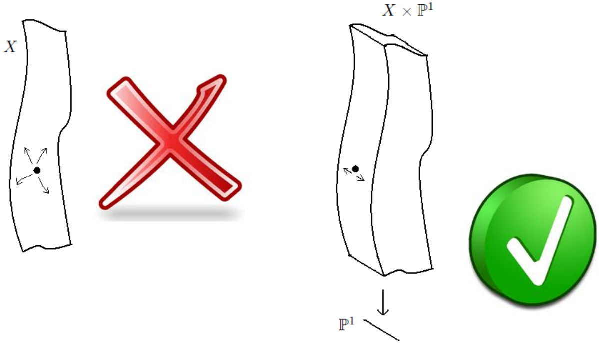
idée : méthode des fibrations appliquée à $X \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$



- avantages :
  - plus de flexibilité
  - une structure de fibration, toutes les techniques précédentes fonctionnent!
  - ceci ne change pas le groupe de Brauer

Idée de la preuve

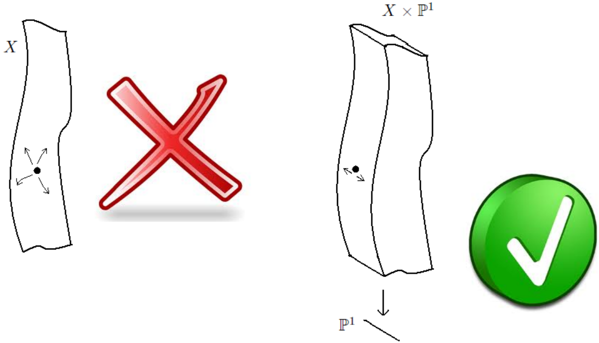
idée : méthode des fibrations appliquée à $X \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$



- avantages :
  - plus de flexibilité
  - une structure de fibration, toutes les techniques précédentes fonctionnent!
  - ceci ne change pas le groupe de Brauer

Idée de la preuve

idée : méthode des fibrations appliquée à $X \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$



- avantages :
  - plus de flexibilité
  - une structure de fibration, toutes les techniques précédentes fonctionnent!
  - ceci ne change pas le groupe de Brauer

Esquisse de la preuve

- $(AF^{Br}\text{-pt})$ pour X_K $\forall K/k$ finie $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-0cyc}^1)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$
  - méthode des fibrations (Th. A 1)
- $(AF^{Br}\text{-0cyc}^1)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-0cyc}^1)$ pour X
  - $Br(X) \simeq Br(X \times \mathbb{P}^1)$ et $CH_0(X \times \mathbb{P}^1) \to CH_0(X)$ a une section.
- [essentiel] $(AF^{Br}\text{-0cyc}^1)$ pour X_K $\forall K/k$ finie $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-0cyc}^\delta)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\forall \delta \in \mathbb{Z}$
  - méthode des fibrations, Hil pour comparer les Br des fibres, le Th. d'irréductibilité de Hilbert généralisé est crucial
- $(AF^{Br}\text{-0cyc}^\delta)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-0cyc}^\delta)$ pour X
- $(AF^{Br}\text{-0cyc}^\delta)$ pour X $\Rightarrow$ l'exactitude de (E) pour X
  - X : RC, Th. Kollár/Szabó $\rightsquigarrow$ il suffit de considère un nombre fini de places.

Esquisse de la preuve

- $(AF^{Br}\text{-pt})$ pour X_K $\forall K/k$ finie $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-0cyc}^1)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$
  - méthode des fibrations (Th. A 1)
- $(AF^{Br}\text{-0cyc}^1)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-0cyc}^1)$ pour X
  - $Br(X) \simeq Br(X \times \mathbb{P}^1)$ et $CH_0(X \times \mathbb{P}^1) \to CH_0(X)$ a une section.
- [essentiel] $(AF^{Br}\text{-0cyc}^1)$ pour X_K $\forall K/k$ finie $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-0cyc}^\delta)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\forall \delta \in \mathbb{Z}$
  - méthode des fibrations, Hil pour comparer les Br des fibres, le Th. d'irréductibilité de Hilbert généralisé est crucial
- $(AF^{Br}\text{-0cyc}^\delta)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-0cyc}^\delta)$ pour X
- $(AF^{Br}\text{-0cyc}^\delta)$ pour X $\Rightarrow$ l'exactitude de (E) pour X
  - X : RC, Th. Kollár/Szabó $\rightsquigarrow$ il suffit de considère un nombre fini de places.

Esquisse de la preuve

- $(AF^{Br}\text{-pt})$ pour X_K $\forall K/k$ finie $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-0cyc}^1)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$
  - méthode des fibrations (Th. A 1)
- $(AF^{Br}\text{-0cyc}^1)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-0cyc}^1)$ pour X
  - $Br(X) \simeq Br(X \times \mathbb{P}^1)$ et $CH_0(X \times \mathbb{P}^1) \to CH_0(X)$ a une section.
- [essentiel] $(AF^{Br}\text{-0cyc}^1)$ pour X_K $\forall K/k$ finie $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-0cyc}^\delta)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\forall \delta \in \mathbb{Z}$
  - méthode des fibrations, Hil pour comparer les Br des fibres, le Th. d'irréductibilité de Hilbert généralisé est crucial
- $(AF^{Br}\text{-0cyc}^\delta)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ $(AF^{Br}\text{-0cyc}^\delta)$ pour X
- $(AF^{Br}\text{-0cyc}^\delta)$ pour X $\Rightarrow$ l'exactitude de (E) pour X
  - X : RC, Th. Kollár/Szabó $\rightsquigarrow$ il suffit de considère un nombre fini de places.

Esquisse de la preuve

- $(AF^{Br}$-pt) pour X_K $\forall K/k$ finie $\Rightarrow$ $(AF^{Br}$-0cyc$^1)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$
  - méthode des fibrations (Th. A 1)
- $(AF^{Br}$-0cyc$^1)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ $(AF^{Br}$-0cyc$^1)$ pour X
  - $Br(X) \simeq Br(X \times \mathbb{P}^1)$ et $CH_0(X \times \mathbb{P}^1) \to CH_0(X)$ a une section.
- [essentiel] $(AF^{Br}$-0cyc$^1)$ pour X_K $\forall K/k$ finie $\Rightarrow$ $(AF^{Br}$-0cyc$^\delta)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\forall \delta \in \mathbb{Z}$
  - méthode des fibrations, Hil pour comparer les Br des fibres, le Th. d'irréductibilité de Hilbert généralisé est crucial
- $(AF^{Br}$-0cyc$^\delta)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ $(AF^{Br}$-0cyc$^\delta)$ pour X
- $(AF^{Br}$-0cyc$^\delta)$ pour X $\Rightarrow$ l'exactitude de (E) pour X
  - X : RC, Th. Kollár/Szabó $\rightsquigarrow$ il suffit de considère un nombre fini de places.

Esquisse de la preuve

- $(AF^{Br}$-pt) pour X_K $\forall K/k$ finie $\Rightarrow$ $(AF^{Br}$-0cyc$^1)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$
  - méthode des fibrations (Th. A 1)
- $(AF^{Br}$-0cyc$^1)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ $(AF^{Br}$-0cyc$^1)$ pour X
  - $Br(X) \simeq Br(X \times \mathbb{P}^1)$ et $CH_0(X \times \mathbb{P}^1) \to CH_0(X)$ a une section.
- [essentiel] $(AF^{Br}$-0cyc$^1)$ pour X_K $\forall K/k$ finie $\Rightarrow$ $(AF^{Br}$-0cyc$^\delta)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\forall \delta \in \mathbb{Z}$
  - méthode des fibrations, Hil pour comparer les Br des fibres, le Th. d'irréductibilité de Hilbert généralisé est crucial
- $(AF^{Br}$-0cyc$^\delta)$ pour $X \times \mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ $(AF^{Br}$-0cyc$^\delta)$ pour X
- $(AF^{Br}$-0cyc$^\delta)$ pour X $\Rightarrow$ l'exactitude de (E) pour X
  - X : RC, Th. Kollár/Szabó $\rightsquigarrow$ il suffit de considère un nombre fini de places.

$\square$

Th. (en gras) : résultat obtenu dans cette thèse

BM seule pour **PH/AF** sur X							
0-cycles de degré 1	(E) si X_η RC	X	fib. géo.	fib. arith. /...	autre hypo.	points. rationnels	autre hypo.
Th. 1.2.1, 1.2.2, 2.3.7	**Th. p. Ch. III**	$X \to \mathbb{P}^1$	géo. int.	PH,AF/Hil		[Sko90]Th.1	
Th. 2.3.7		$X \to \mathbb{P}^1$	géo. int.	BM seule/Hil	X_η RC	[Har94]Th.4.2.1 (+[Har97]Th.2.3.1)	X_η RC
Th. 2.3.2		$X \to \mathbb{P}^1$		BM seule/Hil	$ind(X_\eta) = 1$ X_η RC	[Har94]Th.4.3.1 (+[Har97]Th.2.3.1)	$X_\eta(K) \neq \emptyset$ X_η RC
[Sal88],[CTSD94]Th.5.1	[vH03]	$X \to \mathbb{P}^1$	var. SB	automatique		[CTSSD98]Th.4.2	Schinzel
[CTSSD98]Th.4.1	[Wit]Th.1.3,1.4	$X \to \mathbb{P}^1$	(Ab-Scin)	PH,AF/ouvt		[CTSSD98]Th.1.1	Schinzel
Th. p. Ch. III	**Th. p. Ch. III**	$X \to \mathbb{P}^1$	(Ab-Scin)	PH,AF/Hil		[Wit07]Cor.3.5	Schinzel
Th. p. Ch. III	**Th. p. Ch. III**	$X \to \mathbb{P}^n$	géo. int.	PH,AF/Hil		[Sko90]Th.1	
Th. 2.4.4		$X \to \mathbb{P}^n$	géo. int.	BM seule/Hil	X_η RC	[Har07]Th.1	
Th. 2.4.6		$X \to \mathbb{P}^n$		BM seule/Hil	$ind(X_\eta) = 1$ X_η RC	[Har94]Th.4.3.1 (+[Har97]Th.2.3.1)	$X_\eta(K) \neq \emptyset$ X_η RC
Th. p. Ch. III	**Th. p. Ch. III**	$X \to \mathbb{P}^n$	(Ab-Scin)	PH,AF/Hil		[Wit07]Cor.3.5	Schinzel
[Sai89b],[CT99],[ES08]	[vH03]	$X = C$	–	–	$Ш < \infty$	Conj.[Sko01]	$Ш < \infty$
Th. 1.2.1, 1.2.2	**Th. p. Ch. III**	$X \to C$	géo. int.	PH,AF/Hil	$Ш < \infty$	contre-ex.[Poo10]	$Ш < \infty$
Conj.	Conj.	$X \to C$	géo. int.	BM seule/Hil	$Ш < \infty$	contre-ex.[Poo10]	$Ш < \infty$
Th. 2.2.1		$X \to C$		PH,AF/Hil	$Ш < \infty$ $ind(X_\eta) = 1$		
[CT00],[Fro03]Th.0.3,[vH03]	[vH03]	$X \to C$	var. $\mathrm{SB}^\natural$	automatique	$Ш < \infty$		
[Wit]Th.1.3,1.4	[Wit]Th.1.3,1.4	$X \to C$	(Ab-Scin)	PH,AF/ouvt	$Ш < \infty$		
Th. p. Ch. III	**Th. p. Ch. III**	$X \to C$	(Ab-Scin)	PH,AF/Hil	$Ш < \infty$	contre-ex.[Poo10]	$Ш < \infty$
Th. 2.6.5		espace homog.	–	–	stabilisateur	[Bor96]Cor.2.5	stabilisateur

Introduction générale 7

Le futur

- Les techniques des chapitres 2 et 3 $\rightsquigarrow$ (E) pour les variétés définies par $N_{K/k}(\overrightarrow{x}) = P(z)$ avec K/k une extension abélienne (pas forcément cyclique, ex. de groupe de Galois $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$).
  - fibration au-dessus de $\mathbb{P}^n$,
    fibre : $(AF^{Br}$-pt) + (Abélienne-Scindée)
- (E) pour les espaces homogènes d'un groupe algébrique (pas nécessairement linéaire) ?
- Les zéro-cycles sur l'exemple violent $(PH^{Br}$-pt) de Skorobogatov ?
  - surfaces biellipiques.

Le futur

- Les techniques des chapitres 2 et 3 $\rightsquigarrow$ (E) pour les variétés définies par $N_{K/k}(\overrightarrow{x}) = P(z)$ avec K/k une extension abélienne (pas forcément cyclique, ex. de groupe de Galois $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$).
  - fibration au-dessus de $\mathbb{P}^n$,
    fibre : $(AF^{Br}$-pt$)$ + (Abélienne-Scindée)
- (E) pour les espaces homogènes d'un groupe algébrique (pas nécessairement linéaire) ?
- Les zéro-cycles sur l'exemple violent $(PH^{Br}$-pt$)$ de Skorobogatov ?
  - surfaces bielliptiques.

Le futur

- Les techniques des chapitres 2 et 3 $\rightsquigarrow$ (E) pour les variétés définies par $N_{K/k}(\overrightarrow{x}) = P(z)$ avec K/k une extension abélienne (pas forcément cyclique, ex. de groupe de Galois $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$).
  - fibration au-dessus de $\mathbb{P}^n$,
    fibre : $(AF^{Br}$-pt$)$ + (Abélienne-Scindée)
- (E) pour les espaces homogènes d'un groupe algébrique (pas nécessairement linéaire) ?
- Les zéro-cycles sur l'exemple violent $(PH^{Br}$-pt$)$ de Skorobogatov ?
  - surfaces biellipiques.

Le futur

- Les techniques des chapitres 2 et 3 $\rightsquigarrow$ (E) pour les variétés définies par $N_{K/k}(\overrightarrow{x}) = P(z)$ avec K/k une extension abélienne (pas forcément cyclique, ex. de groupe de Galois $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$).
  - fibration au-dessus de $\mathbb{P}^n$,
    fibre : $(AF^{Br}$-pt) + (Abélienne-Scindée)
- (E) pour les espaces homogènes d'un groupe algébrique (pas nécessairement linéaire) ?
- Les zéro-cycles sur l'exemple violent $(PH^{Br}$-pt) de Skorobogatov ?
  - surfaces bielliptiques.

Le futur

- Les techniques des chapitres 2 et 3 $\rightsquigarrow$ (E) pour les variétés définies par $N_{K/k}(\overrightarrow{x}) = P(z)$ avec K/k une extension abélienne (pas forcément cyclique, ex. de groupe de Galois $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$).
  - fibration au-dessus de $\mathbb{P}^n$,
    fibre : $(AF^{Br}$-pt$)$ + (Abélienne-Scindée)
- (E) pour les espaces homogènes d'un groupe algébrique (pas nécessairement linéaire) ?
- Les zéro-cycles sur l'exemple violent $(PH^{Br}$-pt$)$ de Skorobogatov ?
  - surfaces bielliptiques.

谢谢捧场！