①

YongQi LIANG
VR. 2/2014

Principe local-global pour les 0-cycles sur une fibration au-dessus des variétés rationnellement connexes

Notations

k, Ω, v, k_v, $\mathrm{Br}\,X$, CH_0, $M/n = \mathrm{Coker}(n : M \to M)$

X, X_v

$$CH_0'(X_v) = \begin{cases} CH_0(X_v) & v \text{ non-arch} \\ \mathrm{Coker}[N_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} : CH_0(X_{\mathbb{C}}) \to CH_0(X_{\mathbb{R}})] & v \text{ arch.} \end{cases}$$

X : propre lisse géo. int.

$$\mathrm{Br}\,X \times \prod_{v \in \Omega} CH_0'(X_v) \xrightarrow{\sum \mathrm{inv}_v(-)} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

(E) $\quad \varprojlim CH_0(X)/n \to \prod_{v\in\Omega} \varprojlim CH_0'(X_v)/n \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

Conjecture (CT-Sansuc, Kato-Saito)

(E) est exacte.

Rq exactitude $\Rightarrow$ obs. BM ~~se~~ est la seule au PH à l'AF pour les 0-cycles deg 1 sur X.

$X \longrightarrow B$ variété avec une structure de fibration.

Résultats connus sur une telle X :

(E) est exacte (avec conditions diverses sur les fibres)

Si B est

- $B = \mathbb{P}^1$ (Salberger, CT-SD, CT-Sk-SD ....)
- $B = \mathbb{P}^n$ (Wittenberg, L. .....)

(2)

Ex - $B = C$ courbe (Saito, CT, Wittenberg, L. ; ...)
avec $Ш(\mathrm{Jac}(C)) < +\infty$

<u>Question</u> (de Salberger, dans la soutenance de ma thèse)

Si $B =$ Grassmanien ?

Réponse : Oui, aussi pour les variété RC.

(Conj. 这些都有BM唯一AF $_{\text{rat. pt}}$)

<u>Thm</u> $X \to B$ morphisme entre des var. propres, lisses, géo. int. plat dominant, X_η : RC.

Supposons que
(base) ① B est RC. ($H^1(\bar{B}, \mathcal{O}) = H^2(\bar{B}, \mathcal{O}) = 0$, $NS(\bar{B})$ sans torsion)
② $\forall K/k$ finie obs. BM seule à l'AF pour les <u>pt. rat.</u> sur <u>B_K</u>

(fibre 1) ① toute fibre est géo. int. (X_η est RC) (Kollár-Szabó)[3]
② $\forall K/k$ finie. AF pour les 0-cyc. deg 1 sur <u>beaucoup de</u> (hilbertien) fibres de $X_K \to B_K$.

(fibre 2) ① (X_η est RC), admet un 0-cyc. deg 1.
② $\forall K/k$ finie, obs. BM seule à l'AF pour les 0-cyc. deg 1. sur <u>beaucoup de</u> fibres de $X_K \to B_K$.

Alors (E) est exacte pour X.

③

Rq 1. même le cas $id : X \to B$ n'est pas trivial [L, 2012]

2. l'hypothèse arith. sur la base est sur les pt. rat. qui est plus forte que l'exactitude de (E) pour B.

3. Résultats similaires pour les pt. rat. sont connues [Ekedahl 90] et [Harari, 2007]

4. En cours : (fibre 3) ~~ab esc~~ $\begin{cases} \text{abélienne scindée} \\ \text{AF} \end{cases}$

5. Harpaz - Wittenberg $\begin{cases} B = \mathbb{P}^1_{\mathbb{P}^n \text{ ou } C.} \xrightarrow{\boxed{\text{Question}}} B \text{ générale ?} \\ \text{(fibre 2) sans existence de 0-cyc. deg 1 sur } X_\eta. \end{cases}$

Application On peut appliquer Thm pour les X suivantes :

- $X \to B$ un B-schéma de Severi - Brauer
- $X \to B$ une fibratn lisse de Surfaces de Châtelet tq $\frac{Br X_\eta}{Br \eta} = 0$
  ou Châtelet p-folds
  ou certains variétés normiques
- $Y \to B$ un B-schéma en gpe aff. connexe (fibres aff. con.)
  $X := Y^c$
- X_η est définie par $N_{L/k(B)}(x) = P(t)$ $P(t) \in k(B)[t]$ séperable
  ↑ cyclique   deg. premier à $[L : k(B)]$
  ($\Rightarrow X_\eta$ admet un 0-cyc. deg 1)

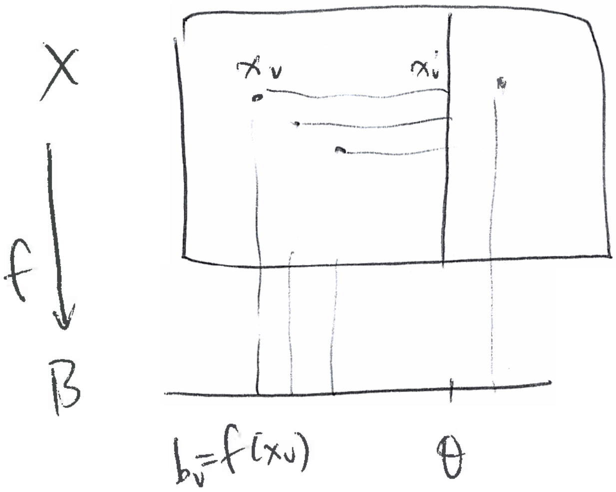
avec B =

- Surfaces de del Pezzo deg $d \geq 5$
- surfaces de Châtelet
- quadriques lisses
- compactifications lisses des esp. hom. des gp. lin. con. à stabilisateurs connexes (ex. Grassmanien)
- ....

④

Démonstration.

Rappel, méthode de fibrations pour les points rationnels



$\{x_v\} \perp Br X$

$\{b_v\} = \{f(x_v)\} \perp Br B$

$\exists\, \theta \in B(k) \qquad \theta \simeq f(x_v) \quad v \in S$ certain fini.

pour $v \in S$. $X_\theta(k_v) \neq \phi$. d'après le Thm des fonctions implicites

$\Downarrow$

$\exists\, x_v' \simeq x_v$

Si pour $v \notin S$ on a aussi $X_\theta(k_v) \neq \phi$

et $\left[\prod_v X_\theta(k_v)\right]^{Br X_\theta} \neq \phi$

On peut trouver $x \in X_\theta(k)$, $x \simeq x_v' \simeq x_v \quad (v \in S)$.

Pour $v \notin S$.

Sous l'hypo. (fibre 1). les fibres sont géo. int.

Lang-Weil + Hensel:

$\exists S$ suffisamment grand tq $\forall\, \theta \in B$ pt. k-rationnel ou pt fermé.

$X_\theta(k(\theta)_w) \neq \phi \qquad \forall w | v \notin S$

$$\begin{array}{cc} k(\theta) & w \\ | & | \\ k & v. \end{array}$$

(5)

Sous l'hypo (fibre 2).

- X_η admet un 0-cyc. deg 1. (pour pt rat. $X_\eta(k(B)) \neq \emptyset$)

$\Rightarrow \exists B_0 \subset B$ ouvert dense

tq $\forall \theta \in B_0$ pt fermé.

X_θ admet un 0-cyc. deg 1. global.

~~et ainsi~~ ainsi que localemt partout.

sur $k(\theta)_w$ $\forall w|v \notin S$.

Prop (Harari) $X \to B$ propre. X_η admet un 0-cyc. deg 1.

X_η : RC ($H^1(X_{\bar\eta}, \mathcal{O}) = H^2(-) = 0$, $NS(X_{\bar\eta})$ sans-torsion)

Alors $\exists$ Hil $\subset B$ sous-ensemble hilbertien généralisé tq.

$\forall \theta \in$ Hil. $Sp_\theta : \dfrac{Br\, X_\eta}{Br\, k(B)} \xrightarrow{\simeq} \dfrac{Br\, X_\theta}{Br\, k(\theta)}$ est un isom. des gps finis.

Lemme formel de Harari + Prop

$\Rightarrow$ $\perp Br X_\theta$ ~~une fois on trouve les pts. locaux pour $v \notin S$~~

Difficulté pour les 0-cycles au lieu des pts. rat.

从下页再起.

⑥ On veut montrer que l'obs BM est la seule à l'AF pour les 0-cyc. (deg 1)

$$(*)\quad \boxed{\begin{array}{l} \{z_v\}_{\deg=1} \perp \mathrm{Br}\,X \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall S \text{ fini} \subset \Omega \\ ?\ \exists\ z \ \deg 1 \ \text{tq} \ z = z_v \in CH_0(X_v)/n \quad \forall v \in S \end{array}}$$

$f_*(z_v)$ sont 0-cyc. au lieu des pts. rat.

$z_v' = z_v + k\cdot m\cdot n\cdot P$ avec $k \gg 0$ (on fixe $P \in X$ un pt. fermé) (m annihile les élts. de Br.)

(事实上我们时用的是 $\otimes\ z_v = z_v^+ - z_v^-$，配合 lem. formel)

$\deg z_v' \gg 0 \Rightarrow z_v' \sim z_v''$ eff.

$f_*(z_v'')$ 0-cyc. eff.

OPS aussi séparable (i.e. pas de multiplicité)

Difficulté Trouver un pt. fermé $\theta \in B$ tq.
$\in Hil$

$\theta \underset{\substack{\uparrow \\ B}}{\approx} z_v''$ $(v \in S)$ "proche topologiquement"

afin d'appliquer le Thm des fonctions implicites pour trouver les pts locaux sur $X_\theta/k(\theta)_w$ avec $w|v \in S$

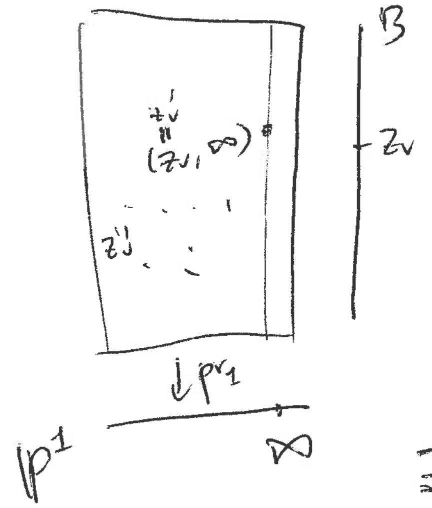
- facile pour $B = \mathbb{P}^1$ (Astuce de Salberger)
- récurrence $\rightsquigarrow B = \mathbb{P}^n$
- Sur $B = C$ on ~~appliq~~ approximer les fonctions $\varphi_v \in k_v(C)^*$ qui définissent $f_*(z_v'')$
- B général ??

(7).

Cas particulier $f = \mathrm{id} : X \to B$ $\quad X = B$

pour montrer ~~(*)~~ il suffit de montrer (*) pour $B' = B \times \mathbb{P}^1$

$\left(CH_0(B \times \mathbb{P}^1) \cong CH_0(B), \quad Br(B \times \mathbb{P}^1) \cong Br(B) \right)$



$z_v' + kmnQ \sim z_v''$ eff.

et $pr_{1*}(z_v'')$ séparable.

Thm. d'irréductibilité de Hilbert généralisé (L. 201?)

$\Downarrow$

$\exists\, \theta \in Hil_{\mathbb{P}^1}$ tq $\theta \simeq pr_{1*}(z_v'')$, $v \in S$.

$\left.\begin{array}{ll} \text{pour } v \in S & \text{Thm fonctions implicites} \\ \text{pour } v \notin S & \text{Lang-Weil + Hensel} \end{array}\right\} \Rightarrow B'_\theta(k(\theta)_w) \neq \emptyset \quad \forall w \in \Omega_{k(\theta)}$

Comparaison de $\frac{Br\, B}{Br\, k}$ avec $\frac{Br\, B'_\theta}{Br\, k(\theta)}$ $\Rightarrow \left[\prod_w B'_\theta(k(\theta)_w)\right]^{Br} \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$ $b \in B'_\theta(k(\theta))$ pt global (fermé) tq $b \simeq z_v'' \in B'$

— Sur $B' = B \times \mathbb{P}^1$ on peut approximer une famille locale des 0-cyc. eff. par un pt. fermé.

En cas général

$\begin{array}{ccc} X & & X' = X \times \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & \rightsquigarrow & \downarrow \\ B & & B' = B \times \mathbb{P}^1 \end{array}$

argument sur B' + méthode de fibration sur $\begin{array}{c} X' \\ \downarrow \\ B' \end{array}$

On gagne !