PRINCIPE DE HASSE POUR LES ZÉRO-CYCLES DE DEGRÉ UN SUR CERTAINES FIBRATIONS

YONGQI LIANG

Résumé. Soit X une variété projective lisse sur un corps de nombres k, fibrée au-dessus d'une courbe C, à fibres géométriquement intègres. Nous introduirons la notion d'obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles de degré 1 sur X et présenterons quelques résultats sur le principe de Hasse pour ces zéro-cycles.

Notations.

k = un corps de nombres
$\Omega = \Omega_k = \{$ places de $k\}$
k_v = le complété v-adique de k pour $v \in \Omega$
X = k-variété lisse projectif géométriquement intègre
(variété=shéma séparé de type fini sur k)
$X_v = X \times_k k_v$
$Z_0(X) = \{\sum n_P P\}$ = le groupe de zéro-cycles de X, où $n_P \in \mathbb{Z}$ et P : point fermé de X,
$deg : Z_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'application de degré
$Z_0^1(X)$ = l'ensemble de zéro-cycles de degré 1
$BrX = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ le groupe de Brauer de X
C = une k-courbe
(courbe= variété lisse projective géométriquement intègre de dimension 1)
$K = k(C)$ le corps de fonctions de C
$\eta = Spec(K)$ le point générique de C
$\pi : X \longrightarrow C$ "une fibration (sur de k)"
(1)C est une courbe,
(2)X est une variété,
(3)π est un morphisme non-constant (donc plat),
(4)la fibre générique X_η est une K-variété géométriquement intègre.

Principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1.

Parallèle au cas des points rationnels, on sait que

$$Z_0^1(X) \subset \prod_{v \in \Omega_k} Z_0^1(X_v).$$

Si $Z_0^1(X) \neq \emptyset$, alors $\prod_{v\in\Omega_k} Z_0^1(X_v) \neq \emptyset$.
Question :

Date: 3 juin 2010.
Colloque Jeunes Chercheurs en Théorie des nombres, IRMA Strasbourg.

Est-ce que le principe de Hasse vaut pour les zéro-cycles de degré 1 ?
(HP)$\prod_{v\in\Omega_k} Z_0^1(X_v) \neq \emptyset \Rightarrow Z_0^1(X) \neq \emptyset$?

Exemple 0.0.1. Soit $X \subset \mathbb{P}^2$ une variété définie par l'équation $a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2 = 0$, où $a_i \in k^*(i=1,2,3)$. (HP) vaut pour toute courbes de genre 0.

Contre-exemple 0.0.2. Soit $X \subset \mathbb{P}^2$ définie par l'équation $3x_1^3 + 4x_2^3 + 5x_3^3 = 0$, X est une courbe de genre 1. (HP) ne vaut pas pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

Obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse.

Soit X une variété lisse projective géométriquement intègre sur k (un corps quelconque, *pas nécessairement* un corps de nombres). Pour un point fermé P de X, le corps résiduel $k(P)$ est une extension finie de k. Le morphisme correspondant $Spec(k(P)) \longrightarrow X$ induit l'application d'évaluation $BrX \longrightarrow Brk(P)$. Pour un élément $b \in BrX$, on note son image dans $Brk(P)$ par $b(P)$. On trouve un accouplement

$$\begin{array}{rccl} <\cdot,\cdot>_k\colon Z_0(X) & \times & BrX & \to & Brk, \\ (\ \sum_P n_PP & , & b\ ) & \mapsto & \sum_P cores_{k(P)/k}(b(P)), \end{array}$$

Lorsque k est un corps de nombres, on peut définir **l'accouplement de Brauer-Manin** :

$$\begin{array}{rccl} <\cdot,\cdot>_{BM}\colon \prod_{v\in\Omega_k} Z_0(X_v) & \times & BrX & \to & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \\ (\ \{z_v\}_{v\in\Omega} & , & b\ ) & \mapsto & \sum_{v\in\Omega_k} inv_v(<z_v,b>_{k_v}), \end{array}$$

où $inv_v : Br(k_v) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'invariant local pour $v \in \Omega$.

On note (appelé *sous-ensemble de Brauer-Manin*)

$$\begin{array}{rcl} BM & = & \{\{z_v\}_{v\in\Omega} \in \prod_{v\in\Omega_k} Z_0(X_v); deg(z_v)=1 \text{ for any } v\in\Omega, \{z_v\}_{v\in\Omega}\perp b \text{ for any } b \in BrX\} \\ & \subset & \prod_{v\in\Omega_k} Z_0^1(X_v) \end{array}$$

Fait :

$Z_0^1(X) \subset BM$ (la théorie de corps de classes : $0 \to Brk \to \bigoplus_v Brk_v \xrightarrow{\sum_v inv_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$)

Si $BM = \emptyset$, alors $Z_0^1(X) = \emptyset$, dans ce case, on dit qu'il y a une **obstruction de Brauer-Manin** au principe de Hasse.

Question :

Est-ce que "l'obstruction de Brauer-Manin est la seule" au principe de Hasse ?
(BM seule)$BM \neq \emptyset \Rightarrow Z_0^1(X) \neq \emptyset$?

Théorème 0.0.3 (Y.I.Manin 1970s)**.** ***(BM seule)*** *vaut pour toute courbe C de genre* 1 *en supposant la finitude de* $\text{Ш}(Jac(C))$.

Théorème 0.0.4 (S.Saito 1989(la première preuve), Colliot-Thélène 1999(une preuve simple), Eriksson/Scharaschkin 2008(un résultat plus précis))**.** ***(BM seule)*** *vaut pour toute courbe C (de genre* quelconque*) en supposant la finitude de* $\text{Ш}(Jac(C))$.

(Remarque : Pour la question parallèle pour les points rationnels, il est conjecturé que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour toute courbe i.e. $BM \cap \prod_v X(k_v) \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$.)

Conjecture 0.0.5 (Colliot-Thélène)**.** ***(BM seule)*** *vaut pour toutes les variétés.*

Peu de résultats sont connus pour les variétés de dimension supérieure.

Pour le cas d'une fibration $X \longrightarrow C$ au-dessus d'une courbe, on a les résultats suivants.

À partir de maintenant, on suppose toujours que $Ш(Jac(C))$ est un groupe fini. Dans les cas suivants, **(BM seule)** vaut pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

(1)(Colliot-Thélène/Swinnerton-Dyer 1994)$X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration en variétés de Severi-Brauer.

(2)(Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer 1998)$X \longrightarrow \mathbb{P}^1$, en supposant

$\diamond$(H fibre)[1] - une hypothèse technique sur les fibres. (X_Q est géométriquement intègre sur $k(Q)$ pour tout $Q \in C \Rightarrow$ (H fibre))

$\diamond$ presque toute fibre satisfait **(HP)**.

(3)(Colliot-Thélène 2000, E.Frossard 2003)$X \longrightarrow C$ une fibration en variétés de Severi-Brauer d'indice sans facteur carré. ($[X_\eta] \in Brk(C), indice = pgcd\{n; [L : k(C)] = n, [X_\eta \times_{k(C)} L] = 0 \in BrL\}$)

(4)(O.Wittenberg 2010)$X \longrightarrow C$, en supposant

$\diamond$(H fibre)

$\diamond$ presque toute fibre satisfait **(HP)**,

Sous-ensemble hilbertien généralisé.

Définition 0.0.6. Soit V une variété géométriquement intègre sur un corps quelconque k. Un sous-ensemble H des points fermés de X est dit un **sous-ensemble hilbertien généralisé**, s'il existe un morphisme fini étale $Z \to U \subset X$ avec U un ouvert non-vide de X et Z une variété intègre, tel que H est l'ensemble des points fermés P de U ayant fibre X_P connexe.

Théorème 0.0.7. *Soit k un corps de nombres. Soit $X \longrightarrow C$ une fibration au-dessus d'une courbe sur k avec $Ш(Jac(C))$ fini. Supposons que*

$\diamond$ toute fibre X_P est géométriquement intègre sur $k(P)$,

*$\diamond$ il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé H de C, tel que pour tout $P \in \mathsf{H}$ la fibre X_P satisfait **(HP)** le principle de Hasse.*

*Alors **(BM seule)** vaut pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.*

Points clés sur la preuve :

- En utilisant un certain type du lemme de déplacement, on ramène les questions sur les zéro-cycles aux questions sur les zéro-cycles effectifs/points rationnels.
- Appliquer la méthode des fibrations pour les points rationnels.
- Théorème d'irréductibilité de Hilbert (version effective par Ekedahl).

Remarque 0.0.8. En appliquant la même méthode, on peut obtenir également quelques résultats sur “l'approximation faible”.

Une application du théorème. On considère certaines fibrations en surfaces de Châtelet construites par Poonen.

Soit $V_0 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ une variété définie par l'équation

$$y^2 - az^2 = u^2 \tilde{P}_\infty(r, w) + v^2 \tilde{P}_0(r, w),$$

[1]Pour tout point fermé Q de C, il existe un composant irréductible Z de X_Q de multiplicité 1 tel que la fermeture algébrique de $k(Q)$ dans $k(Z)$ est une extension abélienne de $k(Q)$.

où $\tilde{P}_\infty(r,w)$ et $\tilde{P}_0(r,w)$ sont les homogénésation des polynômes $P_\infty(x), P_0(x) \in k[x]$ de degré 4. Soit V une compactification lisse de V_0. On note $Z_1 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ la courbe définie par $0 = u^2\tilde{P}_\infty(r,w) + v^2\tilde{P}_0(r,w)$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \mathbb{P}^1 & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \supset Z_1 \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (u:v;r:w;y,z) \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\ (u:v) & (u:v;r:w) \arrow[l, mapsto] \end{tikzcd}$$

Pour un morphisme (non-constant) $\psi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$, on pull-back toutes les choses et obtient une fibration $X = V \times_{\mathbb{P}^1} C \longrightarrow C$ et un revêtement fini $Z = Z_1 \times_{\mathbb{P}^1} C \longrightarrow C$. Le revêtement fini $Z \longrightarrow C$ définit un sous-ensemble hilbertien généralisé H de C. Pour un point fermé θ de C, la fibre X_θ est une surface de Châtelet définie par $y^2 - az^2 = P_\theta(x)$ avec $P_\theta(x) = \psi(\theta)P_\infty(x) + P_0(x) \in k(\theta)[x]$. La condition $\theta \in \mathsf{H}$ signifie que le polynôme $P_\theta(x)$ est irréductible sur $k(\theta)$, dans ce cas **(HP)** le principe de Hasse vaut pour X_θ.

Poonen a montré que si

- $C(k)$ est fini
- $\psi(C(k)) = \infty \in \mathbb{P}^1(k)$

alors $BM \cap \prod_v X(k_v) \neq \emptyset$ mais $X(k) = \emptyset$, i.e. **(BM seule)** n'est pas valable pour les points rationnels sur X.

Le théorème implique que **(BM seule)** est valable pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

Références

Yongqi LIANG
Département de Mathématiques,
Bâtiment 425,
Université Paris-sud 11,
F-91405 Orsay,
France
E-mail address: yongqi.liang@math.u-psud.fr