PRINCIPE LOCAL-GLOBAL POUR LES ZÉRO-CYCLES SUR CERTAINES FIBRATIONS AU-DESSUS D'UNE COURBE

YONGQI LIANG

Notations

k un corps de nombres. Ω, $k_v (v \in \Omega)$.

$X_{/k}$ une variété (schéma séparé de type fini sur un corps) projective lisse et géométriquement intègre sur k.

$X_v = X \times_k k_v$, $Br(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$

On a l'accouplement de Brauer-Manin (pour les zéro-cycles)

$$\prod_{v \in \Omega} Z_0(X_v) \times Br(X) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$\{z_v\}_v = \{\sum n_{P_v} P_v\}_v, b \mapsto \sum_{v \in \Omega} inv_v[\sum_{P_v} cores_{k_v(P_v)/k_v}(b(P_v)))],$$

qui se factorise à travers $\prod_{v \in \Omega} CH_0(X_v) \times Br(X)/Br(k) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Conjecture 1 (Colliot-Thélène, Saito)**.** *Soit X une variété projective lisse géométriquement intègre sur un corps de nombre k. Alors, l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur X est la seule. i.e. Le fait qu'il existe $z_v \in Z_0(X_v)(\forall v \in \Omega)$ tous de degré 1 satisfaisant $\{z_v\} \perp Br(X)$ implique qu'il existe un zéro-cycle global $z \in Z_0(X)$ de degré 1.*

Conjecture 2. *Soit X une variété projective lisse géométriquement intègre sur un corps de nombre k. Alors, pour tout entier positif non-nul m, il existe $z_m \in Z_0(X)$ de degré 1 tel que $z_m = z_v$ dans $CH_0(X_v)/m$ pour toute $v \in \Omega$ (une sorte d'approximation forte, resp. approximation faible : pour toute $v \in S$ où S est un ensemble fini de places de k).*

Quelques résultats connus

I. $dim(X) = 1$, $X = C$ est une courbe projective lisse géométriquement intègre.

Théorème (Saito 89, Colliot-Thélène 99, Eriksson/Scharaschkin 08)**.** *Les conjectures 1 et 2 sont vérifiées si $Ш(Jac(C))$ est fini.*

II. $dim(X) > 1$

On n'a que quelques résultats sur une fibration admissible $X \to C$. (*i.e.* le morphisme est non constant à fibre générique géométriquement intègre,

8 octobre 2010.

Séminaire Variétés rationnelles, École Normale Supérieure, Paris.

X (resp. C) est une variété (resp. courbe) projective lisse géométriquement intègre)

- La conjecture 1 est vérifiée pour les cas suivants :

(1) Salberger 88.

$X \to \mathbb{P}^1$ est un fibré en coniques, en supposant que $Br(X)/Br(k) \simeq H^1(k, Pic\bar{X}) = 0$.

(2) Colliot-Thélène/Swinnerton-Dyer 94, Frossard 03, van Hamel 03.

$X \to C$ est un fibré en variétés de Severi-Brauer d'indice sans facteur carré

(3) Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer 98, Wittenberg 09

$X \to C$ en supposant que

- Ш$(Jac(C))$ est fini ;

- (H fib) une hypothèse technique sur les fibres (vérifiée si toutes les fibres sont géométriquement intègres) ;

- toute fibre à l'exception d'un nombre fini satisfait le principe de Hasse (pour les zéro-cycles de degré 1).

Remarque. La conjecture 2 a été également discutée dans les travaux mentionnés ci-dessus.

Motivation de mon travail

un exemple (de Poonen)

Soit $V \to \mathbb{P}^1$ une fibration admissible définie par l'équation (affine) $y^2 - az^2 = P_t(x) \mapsto t$ où $P_t(x) \in k(t)[x]$ est un polynôme de degré 4, et où $a \in k^* \setminus k^{*2}$. Pour un morphisme $\psi : C \to \mathbb{P}^1$ non-constant, le pull-back $X \to C$ via ψ est une fibration en surfaces de Châtelet à fibres géométriquement intègres.

Théorème (Poonen 2010)**.** *On suppose que*

- $V_\infty(k_v) \neq \emptyset, \forall v$;

- $C(k)$ *est non-vide fini ;*

- $\phi(C(k)) = \infty \in \mathbb{P}^1(k)$.

Alors,

- $X(k_v) \neq \emptyset, \forall v$;

- *il n'existe pas d'obstruction de Brauer-Manin (même de Brauer-Manin-étale/descent) au principe de Hasse ;*

- $X(k) = \emptyset$.

Théorème (Colliot-Thélène 2010)**.** *Il existe un zéro-cycle de degré* 1 *sur une telle* X.

Attention.

On ne peut pas appliquer les résultats précédents pour obtenir un zéro-cycle global de degré 1. Pour un point fermé $\theta \in C$, la fibre X_θ satisfait le principe de Hasse (resp. l'approximation faible) si $P_{\psi(\theta)}(x) \in k(\theta)[x]$ est irréductible. Il y a beaucoup (de nombre infini) de fibres qui probablement ne satisfont pas le principe de Hasse.

Définition. *Soit X une variété géométriquement intègre sur un corps k. Hil un sous-ensemble de points fermés de X est dit un* sous-ensemble hilbertien généralisé *s'il existe un morphisme $Z \xrightarrow{\rho} U \subset X$, où Z est une variété intègre, U est un ouvert non-vide de X, et ρ est un morphisme étale fini, tel que $\mathsf{Hil} = \{\theta \in U$ est un point fermé, $\rho^{-1}(\theta)$ est connexe$\}$.*

Théorème principal (Liang 2010)**.** *Soit $X \to C$ une fibration admissible. On suppose que*

- toutes les fibres sont géométriquement intègres ;

- $Ш(Jac(C))$ est fini ;

- $\exists \mathsf{Hil} \subset C$ un sous-ensemble hilbertien généralisé tel que $\forall \theta \in \mathsf{Hil}$, la fibre X_θ satisfait le principe de Hasse (resp. l'approximation faible au niveau du groupe de Chow ou au niveau de la cohomologie aux places finies).

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible au niveau du groupe de Chow ou au niveau de la cohomologie aux places finies).

Application

En supposant la finitude de $Ш(Jac(C))$, on re-démontre le théorème de Colliot-Thélène sur les solides de Poonen, et de plus, on trouve “beaucoup de” zéro-cycles de degré 1 sur X au sens d'approximation faible.

Approximation faible

On considère l'application de cycle ($d = dim(X)$)

$$CH_0(X_v) \to CH_0(X_v)/m \to \tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m(d))$$

- Approximation faible au niveau de la cohomologie :

si pour tout m et pour tout ensemble fini S de places, pour toute famille $\{z_v\}_{v\in\Omega}$ de zéro-cycles de degré 1, il existe un zéro-cycle global $z = z(m, S)$ de degré 1 tel que $z = z_v \in \tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m(d))$ pour tout $v \in S$.

- L'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible au niveau de la cohomologie :

si pour tout m et pour tout ensemble fini S de places, pour toute famille $\{z_v\}_{v\in\Omega}$ de zéro-cycles de degré 1 orthogonale à $Br(X)$, il existe un zéro-cycle global $z = z(m, S)$ de degré 1 tel que $z = z_v \in \tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m(d))$ pour tout $v \in S$.

- au niveau du groupe de Chow :

on remplace $\tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m(d))$ par $CH_0(X_v)/m$.

Démonstration du théorème principal

Démonstration (esquisse) du théorème. - rappel de la méthode de fibration pour les points rationnels, deux difficultés : 1, passer de zéro-cycles aux points rationnels ; 2, existe-t-il $\theta \in \mathsf{Hil}$.

(1)“bonnes places”

- Comme toutes les fibres de $X \to C$ sont géométriquement intègre, on utilise les estimations de Lang-Weil + le lemme de Hensel : $\exists S \subset \Omega_k$ fini tel que pour tout point fermé $\theta \in C$ et pour toute $w \in (\Omega \setminus S) \otimes_k k(\theta)$ on ait $X_\theta^{lis}(k(\theta)_w) \neq \emptyset$.

(2)"$v \in S$"

On utilise les lemmes de déplacement (bien développés dans les articles précédents) qui ramène un problème sur les zéro-cycles à un problème sur les points rationnels. + le théorème des fonctions implicites pour conclure. (pour l'approximation faible au niveau de la cohomologie, il faut utiliser l'application de Gysin)

Il reste une question clé : En bas sur C, comment approximer les zéro-cycles effectifs par un point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$?

Lemme. *Soit C une courbe (projective lisse et géométriquement intègre) sur un corps de nombres k, on note $g = g(C)$ le genre de C, Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de C. Soient $y \in Z_0(C)$ un zéro-cycle effectif, $deg(y) = d > 2g$, $S \subset \Omega$ fini. Pour toute $v \in S$, soit $z_v \in Z_0(C_v)$ un zéro-cycle effectif séparable de degré d tel que $supp(z_v) \cap supp(y) = \emptyset$ et $z_v \sim y$ sur C_v.*

Alors, il existe un point fermé θ de C tel que

(1) $\theta \in \mathsf{Hil}$;

(2) $\theta \sim y$ sur C;

(3) θ soit suffisamment proche de z_v pour tout $v \in S$.

Démonstration. Pour $v \in S$, $z_v - y = div_{C_v}(f_v)$ pour certaine fonction $f_v \in k_v(C_v)^*/k_v^*$. Comme $deg(y) = d > 2g$, le théorème de Riemann-Roch implique que $\Gamma(C, \mathcal{O}_C(y))$ est un espace vectoriel de dimension $r = d+1-g > g+1$. L'approximation faible pour $\mathbb{P}^{r-1}$ implique qu'il existe une fonction $f \in k(C)^*/k^*$ tel que

(i) f soit suffisamment proche de $f_v (v \in S)$

(ii) $div_C(f) = y' - y$ où y' est un zéro-cycle effectif tel que $supp(y') \cap supp(y) = \emptyset$.

Le lemme de Krasner implique que y' est suffisamment proche de z_v, $y' \approx z_v$ pour $v \in S$.

La fonction f définit un k-morphisme $\psi : C \to \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^*(\infty) = y$ et $\psi^*(0) = y'$.

Supposons le sous-ensemble hilbertien généralisé Hil est défini par $Z \to U \subset C$, son composé avec ψ définit un sous-ensemble hilbertien généralisé $\mathsf{Hil}' \subset \mathbb{P}^1$. En enlevant quelques points fermés, on peut supposer que $\theta' \in \mathsf{Hil}'$ implique $\theta = \psi^{-1}(\theta') \in \mathsf{Hil}$. Le théorème d'irréductibilité de Hilbert (version effective par Ekedahl) dit que $\mathsf{Hil}' \cap \mathbb{P}^1(k)$ est dense dans $\prod_{v \in S} \mathbb{P}^1(k_v)$. Il existe alors $\theta' \in \mathsf{Hil}' \cap \mathbb{P}^1(k)$ suffisamment proche de $0 \in \mathbb{P}^1(k_v) (v \in S)$. Donc $\theta = \psi^{-1}(\theta') \in \mathsf{Hil}$ est suffisamment proche de $\psi^*(0) = y' \times_k k_v \approx z_v$ pour toute $v \in S$. On sait aussi que $\theta \sim y$ sur C. □

□

Bâtiment 425 Département de Mathématiques, Université Paris-sud XI, Orsay 91400, France

E-mail address: yongqi.liang@math.u-psud.fr