0-CYCLES SUR LES VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES

YONGQI LIANG

1. Introduction

Notations

k un corps de nombres.

Ω ensemble des places de k.

$X_{/k}$ une variété (schéma séparé de type fini) projective lisse et géométriquement intègre sur k.

$X_v = X \times_k k_v$, $Br(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$

$CH_0(X)$ le groupe de Chow des 0-cycles.

Accouplement de Brauer-Manin (pour les zéro-cycles)

$$\prod_{v\in\Omega} Z_0(X_v) \times Br(X) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$\{z_v\}_v = \{\sum n_{P_v} P_v\}_v, b \mapsto \sum_{v\in\Omega} inv_v[\sum_{P_v} n_{P_v} cores_{k_v(P_v)/k_v}(b(P_v)))],$$

qui se factorise à travers $\prod_{v\in\Omega} CH'_0(X_v) \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Ici le groupe de Chow modifié est défini comme la suite. Il est le groupe de Chow usuel $CH_0(X_v)$ si v est une place non-archimédienne ; il est nul si v est une place complex ; il est $CH_0(X_v)/N_{\bar{k}_v|k_v} CH_0(\overline{X}_v)$ si v est une place réelle. On sait que $im[CH_0(X) \to \prod_v CH'_v(X_v)] \subset$ noyau à gauche de l'accouplement. On note $\widehat{M} = \varprojlim_n M/nM$.

Conjecture 1 (Colliot-Thélène, Kato, Saito, Sansuc)**.** *Soit X une variété projective lisse géométriquement intègre sur un corps de nombre k.*

Alors la suite suivante est exacte pour X.

$$(E) \qquad CH_0(X)\widehat{\ } \to \prod_{v\in\Omega} CH'_0(X_v)\widehat{\ } \to Hom(Br(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Remarque 2. (1) $(E) \Rightarrow (E_0)$ est exacte.

$$(E_0) \qquad A_0(X)\widehat{\ } \to \prod_{v\in\Omega} A_0(X_v)\widehat{\ } \to Hom(Br(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

où $A_0(-) = ker[deg : CH_0(-) \to \mathbb{Z}]$.

(2) $(E) \Rightarrow (PH^{Br} - 0cyc^1)$ l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse pour les 0-cycles de degré 1, *i.e.* il existe une famille de 0-cycles de degré 1 $\{z_v\} \perp Br(X) \Rightarrow$ il existe $z \in Z_0(X)$ de degré 1.

---

18 novembre 2011.

Séminaire Variétés rationnelles, École Normale Supérieure, Paris.

Résultats

(Salberger, Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer)

$X \to \mathbb{P}^1$ à fibres abéliennes-scindées et satisfont le principe de Hasse (pour les points rationnels ou pour les 0-cycles)

Alors, X satisfait $(PH^{Br} - 0cyc^1)$.

(Saito, Colliot-Thélène, Eriksson/Scharaschkin, Frossard, van Hamel $\subset$ Wittenberg)

$X \to C$ à fibres abéliennes-scindées et satisfont le principe de Hasse, en supposant la finitude de $Ш(Jac(C), k)$.

Alors, (E) est exacte pour X.

Théorème 3 (Wittenberg, Liang). *Soit $X \to \mathbb{P}^n$ une fibration à fibre générique rationnellement connexe satisfaisant un des deux groupes des hypothèses*

(1) toute fibre de codimension 1 est géométriquement intègre ; pour presque tout point fermé $\theta \in \mathbb{P}^n$, X_θ satisfait $(AF^{Br} - pt)$ ou $(AF^{Br} - 0cyc^1)$

(2) toute fibre de codimension 1 est abélienne-scindée ; pour presque tout point fermé $\theta \in \mathbb{P}^n$, X_θ satisfait $(AF - pt)$ ou $(AF - 0cyc^1)$

Théorème 4 (Liang). *Soient G un groupe algébrique linéaire connexe sur k, Y un espace homogène de G à stabilisateur connexe (ou abélien si G est supposé de plus simplement connexe), et X une compactification lisse de Y.*

Alors (E) est exacte pour X.

On dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible pour les 0-cycles de degré δ* $(\delta \in \mathbb{Z})$, noté par $(AF^{Br} - 0cyc^\delta)$, si pour tout ensemble fini $S \subset \Omega_k$, pour tout nombre entier positif $n \in \mathbb{Z}$, et pour toute famille $\{z_v\} \perp Br(X)$ de 0-cycles de degré δ il existe un 0-cycle global $z = z_{n,S}$ de degré δ tel que $z = z_v \in CH_0(X_v)/n$ pour toute $v \in S$.

Remarque 5. Soit $X \to \mathbb{P}^1$ à fibre générique rationnellement connexe. Si X satisfait $(AF^{Br} - 0cyc^\delta)$ pour tout $\delta \in \mathbb{Z}$, alors (E) est exacte pour X. Ici la première assertion concerne les places dans un certain ensemble fini S et la dernière concerne toutes les places. En fait, l'application induite $CH_0(X) \to CH_0(\mathbb{P}^1 = \mathbb{Z})$ est l'application de degré. On applique le théorème de Kollár-Szabó : pour presque toute place v, le groupe $A_0(X_v) = 0$, donc $CH_0(X_v) \xrightarrow{\simeq} CH_0(\mathbb{P}^1_v) = \mathbb{Z}$ est un isomorphisme pour presque toute v.

2. Démonstration des théorèmes

Théorème 6. *Soit $X \to \mathbb{P}^1$ une fibration à fibre générique rationnellement connexe (donc $Br(X_{\bar{eta}})$ est fini, et $Pic(X_{\bar{eta}})$ est sans torsion). Supposons que pout tout point fermé $\theta \in \mathbb{P}^1$, X_θ est scindée ; pour presque tout θ X_θ satisfaite $(AF^{Br} - pt)$ ou $(AF^{Br} - 0cyc^1)$.*

Alors, X satisfait $(AF^{Br} - 0cyc^\delta)$ pour tout $\delta \in \mathbb{Z}$.

Pour montrer ce théorème, on applique le lemme formel de Harari (pour obtenir l'orthogonalité), le lemme de déplacement pour les 0-cycles (pour obtenir les 0-cycles effectifs séparables), le théorème des fonctions implicites, la comparaison entre les groupes de Brauer de la fibre générique et d'une fibre fermé, le théorème d'irréductibilité de Hilbert (version effective pour les 0-cycles).

Preuve du théorème 4. On considère la fibration $Z = X \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Pour tout point fermé $\theta \in \mathbb{P}^1$, la fibre $X_\theta = X \times_k k(\theta)$ satisfait $(AF^{Br} - pt)$ d'après Borovoi. Le théorème 6 implique que $(AF^{Br} - 0cyc^\delta)$ est valable pour $Z = X \times \mathbb{P}^1$ pour tout $\delta \in \mathbb{Z}$. Le théorème de Kollár-Szabó nous donne l'exactitude de (E) pour $X \times \mathbb{P}^1$, ainsi pour X en notant qu'il existe une section triviale de $X \times \mathbb{P}^1 \to X$. □

Preuve du théorème 3. On fait la récurrence pour n. Le cas $n = 1$ a été contenu respectivement dans le théorème 6 et (Wittenberg 2010). On choisit un sous-espace linéaire O de dimension $n-2$ de $\mathbb{P}^n$. La projection au centre O est une application rationnelle $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^1$. On prend l'éclatement $\Delta = Bl_O\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ et obtient un morphisme $\Delta \to \mathbb{P}^1$. Le produit fibré $X' = X \times_{\mathbb{P}^1} \mathbb{P}^n$ est birationnellement équivalent à X. On regard la fibration $X' \to \mathbb{P}^1$, une fois que O est bien choisi, toutes les fibres de cette fibration sont géométriquement intègres. Pour presque tout point fermé $\theta \in \mathbb{P}^1$ la fibre X'_θ admet une structure de fibration $X'_\theta \to \Delta_\theta \simeq \mathbb{P}^{n-1}_{k(\theta)}$, dont les fibres satisfont respectivement (1) et (2). Alors X'_θ satisfait $(AF^{Br} - 0cyc^1)$ par récurrence. On applique le théorème 6, alors X' satisfait $(AF^{Br} - 0cyc^\delta)$ et (E) est exacte, ainsi que X. □

Bâtiment 425 Département de Mathématiques, Université Paris-sud XI, Orsay 91400, France

E-mail address: yongqi.liang@math.u-psud.fr