Méthodes cohomologiques pour l'étude des points rationnels

—dirigée par David HARARI

LIANG, Yong Qi

Université de Paris-Sud XI, Orsay France

Journée des doctorants
11/01/2010

Questions

- Famille d'équations

$$\begin{cases} f_1(X_1, \cdots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ f_r(X_1, \cdots, X_n) = 0 \end{cases}$$

- $f_i \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n], 1 \leqslant i \leqslant r$
- Questions :
  - Y a-t-il des solutions sur $\mathbb{Q}$?
  - Combien de solutions sur $\mathbb{Q}$?

Questions

- Famille d'équations

$$\begin{cases} f_1(X_1, \cdots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ f_r(X_1, \cdots, X_n) = 0 \end{cases}$$

- $f_i \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n], 1 \leqslant i \leqslant r$
- Questions :
  - Y a-t-il des solutions sur $\mathbb{Q}$?
  - Combien de solutions sur $\mathbb{Q}$?

Questions

- Famille d'équations

$$\begin{cases} f_1(X_1, \cdots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ f_r(X_1, \cdots, X_n) = 0 \end{cases}$$

- $f_i \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n], 1 \leqslant i \leqslant r$
- Questions :
  - Y a-t-il des solutions sur $\mathbb{Q}$?
  - Combien de solutions sur $\mathbb{Q}$?

Interprétation géométrique

- La langue de géométrie algébrique
  - Problème algébrique $\leftrightsquigarrow$ Problème géométrique
  - une famille d'équations de coefficient dans $\mathbb{Q}$ $\leftrightsquigarrow$ une variété algébrique X sur $\mathbb{Q}$
  - ses solutions sur $\mathbb{Q}$ $\leftrightsquigarrow$ l'ensemble des points rationnels $X(\mathbb{Q})$
- Questions ?
  - $X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$?
  - $X(\mathbb{Q})$ est gros ou petit (s'il n'est pas vide) ?

Interprétation géométrique

- La langue de géométrie algébrique
  - Problème algébrique $\leftrightsquigarrow$ Problème géométrique
  - une famille d'équations de coefficient dans $\mathbb{Q}$ $\leftrightsquigarrow$ une variété algébrique X sur $\mathbb{Q}$
  - ses solutions sur $\mathbb{Q}$ $\leftrightsquigarrow$ l'ensemble des points rationnels $X(\mathbb{Q})$
- Questions ?
  - $X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$?
  - $X(\mathbb{Q})$ est gros ou petit (s'il n'est pas vide) ?

Interprétation géométrique

- La langue de géométrie algébrique
  - Problème algébrique $\leftrightsquigarrow$ Problème géométrique
  - une famille d'équations de coefficient dans $\mathbb{Q}$ $\leftrightsquigarrow$ une variété algébrique X sur $\mathbb{Q}$
  - ses solutions sur $\mathbb{Q}$ $\leftrightsquigarrow$ l'ensemble des points rationnels $X(\mathbb{Q})$
- Questions ?
  - $X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$?
  - $X(\mathbb{Q})$ est gros ou petit (s'il n'est pas vide) ?

Interprétation géométrique

- La langue de géométrie algébrique
  - Problème algébrique $\leftrightsquigarrow$ Problème géométrique
  - une famille d'équations de coefficient dans $\mathbb{Q}$ $\leftrightsquigarrow$ une variété algébrique X sur $\mathbb{Q}$
  - ses solutions sur $\mathbb{Q}$ $\leftrightsquigarrow$ l'ensemble des points rationnels $X(\mathbb{Q})$
- Questions ?
  - $X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$?
  - $X(\mathbb{Q})$ est gros ou petit (s'il n'est pas vide) ?

Les corps locaux

- $\mathbb{Q}$ = l'ensemble de nombres rationnels
- Pour p un nombre premier ou $p = \infty$, on a un corps $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ tel que
  - (a)$\mathbb{Q}_p$ est muni d'une topologie complète.
  - (b)$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ est dense.

Les corps locaux

- $\mathbb{Q}$ = l'ensemble de nombres rationnels
- Pour p un nombre premier ou $p = \infty$, on a un corps $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ tel que
  - (a)$\mathbb{Q}_p$ est muni d'une topologie complète.
  - (b)$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ est dense.

Les corps locaux

- $\mathbb{Q}$ = l'ensemble de nombres rationnels
- Pour p un nombre premier ou $p = \infty$, on a un corps $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ tel que
  - (a)$\mathbb{Q}_p$ est muni d'une topologie complète.
  - (b)$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ est dense.

Les corps locaux

- $\mathbb{Q}$ = l'ensemble de nombres rationnels
- Pour p un nombre premier ou $p = \infty$, on a un corps $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ tel que
  - (a)$\mathbb{Q}_p$ est muni d'une topologie complète.
  - (b)$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ est dense.

Le principe de Hasse

- À partir de maintenant,
  on suppose que $X_{/\mathbb{Q}}$ est une variété projective (associée à une famille d'équations $\{f_i \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]; 1 \leqslant i \leqslant r\}$)
- un fait évident :
  une famille d'équations a des solutions dans $\mathbb{Q} \Rightarrow$ elle a des solutions dans $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\mathbb{R}$)
- Plus précisément : $X(\mathbb{Q}) \hookrightarrow X(\mathbb{Q}_p)$.
- $$X(\mathbb{Q}) \subset \prod_p X(\mathbb{Q}_p) = X(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$$
- $X(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \emptyset \Rightarrow X(\mathbb{Q}) = \emptyset$

Le principe de Hasse

- À partir de maintenant,
  on suppose que $X_{/\mathbb{Q}}$ est une variété projective (associée à une famille d'équations $\{f_i \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]; 1 \leqslant i \leqslant r\}$)
- un fait évident :
  une famille d'équations a des solutions dans $\mathbb{Q} \Rightarrow$ elle a des solutions dans $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\mathbb{R}$)
- Plus précisément : $X(\mathbb{Q}) \hookrightarrow X(\mathbb{Q}_p)$.
- $$X(\mathbb{Q}) \subset \prod_p X(\mathbb{Q}_p) = X(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$$
- $X(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \emptyset \Rightarrow X(\mathbb{Q}) = \emptyset$

Le principe de Hasse

- À partir de maintenant,
  on suppose que $X_{/\mathbb{Q}}$ est une variété projective (associée à une famille d'équations $\{f_i \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]; 1 \leqslant i \leqslant r\}$)
- un fait évident :
  une famille d'équations a des solutions dans $\mathbb{Q} \Rightarrow$ elle a des solutions dans $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\mathbb{R}$)
- Plus précisément : $X(\mathbb{Q}) \hookrightarrow X(\mathbb{Q}_p)$.
- $$X(\mathbb{Q}) \subset \prod_p X(\mathbb{Q}_p) = X(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$$
- $X(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \emptyset \Rightarrow X(\mathbb{Q}) = \emptyset$

Le principe de Hasse

- À partir de maintenant,
  on suppose que $X_{/\mathbb{Q}}$ est une variété projective (associée à une famille d'équations $\{f_i \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]; 1 \leqslant i \leqslant r\}$)
- un fait évident :
  une famille d'équations a des solutions dans $\mathbb{Q} \Rightarrow$ elle a des solutions dans $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\mathbb{R}$)
- Plus précisément : $X(\mathbb{Q}) \hookrightarrow X(\mathbb{Q}_p)$.
- $$X(\mathbb{Q}) \subset \prod_p X(\mathbb{Q}_p) = X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$$
- $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) = \emptyset \Rightarrow X(\mathbb{Q}) = \emptyset$

Le principe de Hasse

- À partir de maintenant,
  on suppose que $X_{/\mathbb{Q}}$ est une variété projective (associée à une famille d'équations $\{f_i \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]; 1 \leqslant i \leqslant r\}$)
- un fait évident :
  une famille d'équations a des solutions dans $\mathbb{Q} \Rightarrow$ elle a des solutions dans $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\mathbb{R}$)
- Plus précisément : $X(\mathbb{Q}) \hookrightarrow X(\mathbb{Q}_p)$.
- $$X(\mathbb{Q}) \subset \prod_p X(\mathbb{Q}_p) = X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$$
- $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) = \emptyset \Rightarrow X(\mathbb{Q}) = \emptyset$

Le principe de Hasse et l'approximation faible

- Question :

$$X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \neq \emptyset \stackrel{?}{\Rightarrow} X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

Définition

On dit qu'une variété projective $X_{/\mathbb{Q}}$ satisfait *le principe de Hasse* si $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \neq \emptyset \Rightarrow X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$; elle satisfait *l'approximation faible* si $X(\mathbb{Q}) \subset X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ est dense.

-

Le principe de Hasse et l'approximation faible

- Question :

$$X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \neq \emptyset \stackrel{?}{\Rightarrow} X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

Définition

On dit qu'une variété projective $X_{/\mathbb{Q}}$ satisfait *le principe de Hasse* si $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \neq \emptyset \Rightarrow X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$; elle satisfait *l'approximation faible* si $X(\mathbb{Q}) \subset X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ est dense.

Exemples du PH et de l'AF

- Minkowski : X, définie par $a_1X_1^2 + \cdots + a_nX_n^2 = 0$, $a_i \in \mathbb{Q}^*$ satisfait le principe de Hasse.
- Théorie des corps de classes : X =une variété de Severi-Brauer ($X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{P}^n$), satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.
- Contre-exemple. Selmer : X, définie par $3X_1^3 + 4X_2^3 + 5X_3^3 = 0$, ne satisfait pas le principe de Hasse.
- $\emptyset = X(\mathbb{Q}) \subset X(\mathbb{A}) \neq \emptyset$
- Pourquoi ? Comment l'expliquer ? Réponse : l'Obstruction de Brauer-Manin.

Exemples du PH et de l'AF

- Minkowski : X, définie par $a_1X_1^2 + \cdots + a_nX_n^2 = 0$, $a_i \in \mathbb{Q}^*$ satisfait le principe de Hasse.
- Théorie des corps de classes : $X =$une variété de Severi-Brauer ($X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{P}^n$), satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.
- Contre-exemple. Selmer : X, définie par $3X_1^3 + 4X_2^3 + 5X_3^3 = 0$, ne satisfait pas le principe de Hasse.
- $\emptyset = X(\mathbb{Q}) \subset X(\mathbb{A}) \neq \emptyset$
- Pourquoi ? Comment l'expliquer ? Réponse : l'Obstruction de Brauer-Manin.

Exemples du PH et de l'AF

- Minkowski : X, définie par $a_1X_1^2 + \cdots + a_nX_n^2 = 0$, $a_i \in \mathbb{Q}^*$ satisfait le principe de Hasse.
- Théorie des corps de classes : X =une variété de Severi-Brauer ($X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{P}^n$), satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.
- Contre-exemple. Selmer : X, définie par $3X_1^3 + 4X_2^3 + 5X_3^3 = 0$, ne satisfait pas le principe de Hasse.
- $\emptyset = X(\mathbb{Q}) \subset X(\mathbb{A}) \neq \emptyset$
- Pourquoi ? Comment l'expliquer ? Réponse : l'Obstruction de Brauer-Manin.

Exemples du PH et de l'AF

- Minkowski : X, définie par $a_1X_1^2 + \cdots + a_nX_n^2 = 0$, $a_i \in \mathbb{Q}^*$ satisfait le principe de Hasse.
- Théorie des corps de classes : X =une variété de Severi-Brauer ($X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{P}^n$), satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.
- Contre-exemple. Selmer : X, définie par $3X_1^3 + 4X_2^3 + 5X_3^3 = 0$, ne satisfait pas le principe de Hasse.
- $\emptyset = X(\mathbb{Q}) \subset X(\mathbb{A}) \neq \emptyset$
- Pourquoi ? Comment l'expliquer ? Réponse : l'Obstruction de Brauer-Manin.

Exemples du PH et de l'AF

- Minkowski : X, définie par $a_1X_1^2 + \cdots + a_nX_n^2 = 0$, $a_i \in \mathbb{Q}^*$ satisfait le principe de Hasse.
- Théorie des corps de classes : $X =$une variété de Severi-Brauer ($X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{P}^n$), satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.
- Contre-exemple. Selmer : X, définie par $3X_1^3 + 4X_2^3 + 5X_3^3 = 0$, ne satisfait pas le principe de Hasse.
- $\emptyset = X(\mathbb{Q}) \subset X(\mathbb{A}) \neq \emptyset$
- Pourquoi ? Comment l'expliquer ? Réponse : l'Obstruction de Brauer-Manin.

Obstruction de Brauer-Manin

- Le groupe de Brauer : (Grothendieck) $Br(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ est un invariant cohomologique de X.
- $\rightsquigarrow$ sous-ensemble de Brauer-Manin $X(\mathbb{A})^{Br}$ de $X(\mathbb{A})$
- $X(\mathbb{Q}) \subset X(\mathbb{A})^{Br} \subset X(\mathbb{A})$
- Si $X(\mathbb{A})^{Br} = \emptyset$, l'absence d'un $\mathbb{Q}$-point rationnel est bien expliquée par l'obstruction de Brauer-Manin.

Obstruction de Brauer-Manin

- Le groupe de Brauer : (Grothendieck) $Br(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ est un invariant cohomologique de X.
- $\rightsquigarrow$ sous-ensemble de Brauer-Manin $X(\mathbb{A})^{Br}$ de $X(\mathbb{A})$
- $X(\mathbb{Q}) \subset X(\mathbb{A})^{Br} \subset X(\mathbb{A})$
- Si $X(\mathbb{A})^{Br} = \emptyset$, l'absence d'un $\mathbb{Q}$-point rationnel est bien expliquée par l'obstruction de Brauer-Manin.

Obstruction de Brauer-Manin

- Le groupe de Brauer : (Grothendieck) $Br(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ est un invariant cohomologique de X.
- $\rightsquigarrow$ sous-ensemble de Brauer-Manin $X(\mathbb{A})^{Br}$ de $X(\mathbb{A})$
- $X(\mathbb{Q}) \subset X(\mathbb{A})^{Br} \subset X(\mathbb{A})$
- Si $X(\mathbb{A})^{Br} = \emptyset$, l'absence d'un $\mathbb{Q}$-point rationnel est bien expliquée par l'obstruction de Brauer-Manin.

Obstruction de Brauer-Manin

- Le groupe de Brauer : (Grothendieck) $Br(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ est un invariant cohomologique de X.
- $\rightsquigarrow$ sous-ensemble de Brauer-Manin $X(\mathbb{A})^{Br}$ de $X(\mathbb{A})$
- $X(\mathbb{Q}) \subset X(\mathbb{A})^{Br} \subset X(\mathbb{A})$
- Si $X(\mathbb{A})^{Br} = \emptyset$, l'absence d'un $\mathbb{Q}$-point rationnel est bien expliquée par l'obstruction de Brauer-Manin.

Obstruction de BM

- Exemple de Selmer : $X : 3X_1^3 + 4X_2^3 + 5X_3^3 = 0$, on a $X(\mathbb{A})^{Br} = \emptyset$, le fait que $X(\mathbb{Q}) = \emptyset$ est donc expliqué par l'obstruction de Brauer-Manin.

Définition

On dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'existence des points rationnels* si $X(\mathbb{A})^{Br} \neq \emptyset \Rightarrow X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$; on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible* si $X(\mathbb{Q})$ est dense dans $X(\mathbb{A})^{Br}$.

Obstruction de BM

- Exemple de Selmer : $X : 3X_1^3 + 4X_2^3 + 5X_3^3 = 0$, on a $X(\mathbb{A})^{Br} = \emptyset$, le fait que $X(\mathbb{Q}) = \emptyset$ est donc expliqué par l'obstruction de Brauer-Manin.

Définition

On dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'existence des points rationnels* si $X(\mathbb{A})^{Br} \neq \emptyset \Rightarrow X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$; on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible* si $X(\mathbb{Q})$ est dense dans $X(\mathbb{A})^{Br}$.

Situation pour une courbe

- $X =$ une courbe=une courbe (projective) géométriquement intègre lisse, $g = g(X) = dimH^0(X, \Omega)$ le genre de X.
- Si $g = 0$, X satisfait le principe de Hasse.

Théorème (Manin)

Si $g = 1$, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour l'existence des points rationnels sur X (en supposant que $\text{Ш}(Jac(X))$ soit fini).

-

Conjecture (Skorobogatov)

L'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour l'existence des points rationnels sur tout courbe projective X (en supposant que $\text{Ш}(Jac(X))$ soit fini).

-

Situation pour une courbe

- X = une courbe=une courbe (projective) géométriquement intègre lisse, $g = g(X) = dimH^0(X, \Omega)$ le genre de X.
- Si $g = 0$, X satisfait le principe de Hasse.

Théorème (Manin)

Si $g = 1$, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour l'existence des points rationnels sur X (en supposant que $Ш(Jac(X))$ soit fini).

-

Conjecture (Skorobogatov)

L'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour l'existence des points rationnels sur tout courbe projective X (en supposant que $Ш(Jac(X))$ soit fini).

-

Situation pour une courbe

- $X =$ une courbe=une courbe (projective) géométriquement intègre lisse, $g = g(X) = dimH^0(X, \Omega)$ le genre de X.
- Si $g = 0$, X satisfait le principe de Hasse.

Théorème (Manin)

Si $g = 1$, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour l'existence des points rationnels sur X (en supposant que $Ш(Jac(X))$ soit fini).

Conjecture (Skorobogatov)

L'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour l'existence des points rationnels sur tout courbe projective X (en supposant que $Ш(Jac(X))$ soit fini).

Situation pour une courbe

- X = une courbe=une courbe (projective) géométriquement intègre lisse, $g = g(X) = dimH^0(X, \Omega)$ le genre de X.
- Si $g = 0$, X satisfait le principe de Hasse.

Théorème (Manin)

Si $g = 1$, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour l'existence des points rationnels sur X (en supposant que $Ш(Jac(X))$ soit fini).

Conjecture (Skorobogatov)

L'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour l'existence des points rationnels sur tout courbe projective X (en supposant que $Ш(Jac(X))$ soit fini).

Zéro-cycles de degré 1

- Un théorème de Faltings dit que, pour une courbe de genre $\geqslant 2$, il n'y a pas beaucoup de points rationnels sur $\mathbb{Q}$.
- On va considérer les zéro-cycles de degré 1

Définition

Soit X une variété projective, le groupe abélien libre $Z_0(X) = \bigoplus_P \mathbb{Z} \cdot P$ engendré par l'ensemble des points fermés P de X est dit le groupe des *zéro-cycles* de X.

-
- $deg : Z_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}; z = \sum_i n_i P_i \mapsto \sum_i n_i [\mathbb{Q}(P_i) : \mathbb{Q}]$
- En particulier, un point rationnel $P \in X(\mathbb{Q})$ est un zéro-cycle de degré 1. Il y a beaucoup plus de zéro-cycles de degré 1 que de points rationnels.

Zéro-cycles de degré 1

- Un théorème de Faltings dit que, pour une courbe de genre $\geqslant 2$, il n'y a pas beaucoup de points rationnels sur $\mathbb{Q}$.
- On va considérer les zéro-cycles de degré 1

Définition

Soit X une variété projective, le groupe abélien libre $Z_0(X) = \bigoplus_P \mathbb{Z} \cdot P$ engendré par l'ensemble des points fermés P de X est dit le groupe des *zéro-cycles* de X.

- $deg : Z_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}; z = \sum_i n_i P_i \mapsto \sum_i n_i [\mathbb{Q}(P_i) : \mathbb{Q}]$
- En particulier, un point rationnel $P \in X(\mathbb{Q})$ est un zéro-cycle de degré 1. Il y a beaucoup plus de zéro-cycles de degré 1 que de points rationnels.

Zéro-cycles de degré 1

- Un théorème de Faltings dit que, pour une courbe de genre $\geqslant 2$, il n'y a pas beaucoup de points rationnels sur $\mathbb{Q}$.
- On va considérer les zéro-cycles de degré 1

Définition

Soit X une variété projective, le groupe abélien libre $Z_0(X) = \bigoplus_P \mathbb{Z} \cdot P$ engendré par l'ensemble des points fermés P de X est dit le groupe des *zéro-cycles* de X.

- $deg : Z_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}; z = \sum_i n_i P_i \mapsto \sum_i n_i [\mathbb{Q}(P_i) : \mathbb{Q}]$
- En particulier, un point rationnel $P \in X(\mathbb{Q})$ est un zéro-cycle de degré 1. Il y a beaucoup plus de zéro-cycles de degré 1 que de points rationnels.

Zéro-cycles de degré 1

- Un théorème de Faltings dit que, pour une courbe de genre $\geqslant 2$, il n'y a pas beaucoup de points rationnels sur $\mathbb{Q}$.
- On va considérer les zéro-cycles de degré 1

Définition

Soit X une variété projective, le groupe abélien libre $Z_0(X) = \bigoplus_P \mathbb{Z} \cdot P$ engendré par l'ensemble des points fermés P de X est dit le groupe des *zéro-cycles* de X.

- *deg* : $Z_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}; z = \sum_i n_i P_i \mapsto \sum_i n_i [\mathbb{Q}(P_i) : \mathbb{Q}]$
- En particulier, un point rationnel $P \in X(\mathbb{Q})$ est un zéro-cycle de degré 1. Il y a beaucoup plus de zéro-cycles de degré 1 que de points rationnels.

Zéro-cycles de degré 1

- Un théorème de Faltings dit que, pour une courbe de genre $\geqslant 2$, il n'y a pas beaucoup de points rationnels sur $\mathbb{Q}$.
- On va considérer les zéro-cycles de degré 1

Définition

Soit X une variété projective, le groupe abélien libre $Z_0(X) = \bigoplus_P \mathbb{Z} \cdot P$ engendré par l'ensemble des points fermés P de X est dit le groupe des *zéro-cycles* de X.

- $deg : Z_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}; z = \sum_i n_i P_i \mapsto \sum_i n_i [\mathbb{Q}(P_i) : \mathbb{Q}]$
- En particulier, un point rationnel $P \in X(\mathbb{Q})$ est un zéro-cycle de degré 1. Il y a beaucoup plus de zéro-cycles de degré 1 que de points rationnels.

Zéro-cycles de degré 1 sur une courbe

- Notion du principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1
- Notion de l'obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles de degré 1

Théorème (Saito 1989, Colliot-Thélène 1997)

Soit X une courbe avec $Ш(Jac(X))$ fini. L'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour l'existence (et "l'approximation faible" à un certain sens) des zéro-cycles de degré 1 sur X.

-

Zéro-cycles de degré 1 sur une courbe

- Notion du principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1
- Notion de l'obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles de degré 1

Théorème (Saito 1989, Colliot-Thélène 1997)

Soit X une courbe avec $Ш(Jac(X))$ fini. L'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour l'existence (et "l'approximation faible" à un certain sens) des zéro-cycles de degré 1 sur X.

Zéro-cycles de degré 1 sur une courbe

- Notion du principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1
- Notion de l'obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles de degré 1

Théorème (Saito 1989, Colliot-Thélène 1997)

Soit X une courbe avec $Ш(Jac(X))$ fini. L'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour l'existence (et "l'approximation faible" à un certain sens) des zéro-cycles de degré 1 sur X.

Variété de dimension > 1

- Si X est une variété de dimension > 1, y a-t-il des résultats sur X ?
- Le cas le plus simple : $X \longrightarrow C$ une fibration sur une courbe C.
- Idée : Résultat précédent pour C + Méthode des fibrations

Variété de dimension > 1

- Si X est une variété de dimension > 1, y a-t-il des résultats sur X ?
- Le cas le plus simple : $X \longrightarrow C$ une fibration sur une courbe C.
- Idée : Résultat précédent pour C + Méthode des fibrations

Variété de dimension > 1

- Si X est une variété de dimension > 1, y a-t-il des résultats sur X ?
- Le cas le plus simple : $X \longrightarrow C$ une fibration sur une courbe C.
- Idée : Résultat précédent pour C + Méthode des fibrations

Résultats récents

- On suppose toujours que $Ш(Jac(C))$ soit un groupe fini.

Théorème (Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer 1998)

Soit $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration avec
-les hypothèses techniques
-les fibres satisfont le principe de Hasse (pour les zéro-cycles de degré 1)
Alors, X satisfait le principe de Hasse pour l'existence de zéro-cycles de degré 1.

-

Théorème (Frossard 2003)

Soit $X \longrightarrow C$ une fibration en variétés de Severi-Brauer. Alors, l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence de zéro-cycles de degré 1 sur X est la seule.

Résultats récents

- On suppose toujours que $Ш(Jac(C))$ soit un groupe fini.

Théorème (Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer 1998)

Soit $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration avec
-les hypothèses techniques
-les fibres satisfont le principe de Hasse (pour les zéro-cycles de degré 1)
Alors, X satisfait le principe de Hasse pour l'existence de zéro-cycles de degré 1.

Théorème (Frossard 2003)

Soit $X \longrightarrow C$ une fibration en variétés de Severi-Brauer. Alors, l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence de zéro-cycles de degré 1 sur X est la seule.

Résultats récents

- On suppose toujours que $\text{Ш}(Jac(C))$ soit un groupe fini.

Théorème (Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer 1998)

Soit $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration avec
-les hypothèses techniques
-les fibres satisfont le principe de Hasse (pour les zéro-cycles de degré 1)
Alors, X satisfait le principe de Hasse pour l'existence de zéro-cycles de degré 1.

Théorème (Frossard 2003)

Soit $X \longrightarrow C$ une fibration en variétés de Severi-Brauer. Alors, l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence de zéro-cycles de degré 1 sur X est la seule.

Mon travail

- Question naturelle : Plus généralement, pour $X \longrightarrow C$ y a-t-il un énoncé généralisant les deux résultats précédents ?

Théorème

Soit $X \longrightarrow C$ une fibration avec
-les hypothèses techniques
-les fibres satisfont le principe de Hasse (pour les zéro-cycles de degré 1)
Alors, l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence de zéro-cycles de degré 1 sur X est la seule.

-
- Merci beaucoup !

Mon travail

- Question naturelle : Plus généralement, pour $X \longrightarrow C$ y a-t-il un énoncé généralisant les deux résultats précédents ?

Théorème

Soit $X \longrightarrow C$ une fibration avec
-les hypothèses techniques
-les fibres satisfont le principe de Hasse (pour les zéro-cycles de degré 1)
Alors, l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence de zéro-cycles de degré 1 sur X est la seule.

- Merci beaucoup !

Mon travail

- Question naturelle : Plus généralement, pour $X \longrightarrow C$ y a-t-il un énoncé généralisant les deux résultats précédents ?

Théorème

Soit $X \longrightarrow C$ une fibration avec
-les hypothèses techniques
-les fibres satisfont le principe de Hasse (pour les zéro-cycles de degré 1)
Alors, l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence de zéro-cycles de degré 1 sur X est la seule.

- Merci beaucoup !