

听音辨鼓：平面区域的反谱问题

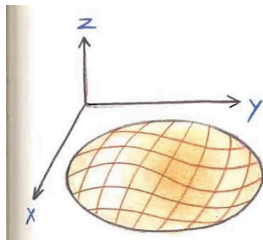
魏巧玲

首都师范大学

2020年10月12日

Laplace 算子谱

Laplace spectrum



鼓面-弹性膜 (Vibrating membrane) 的纵向位移 $z = f(x, y, t)$ 满足波动方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

设 $f(x, y, t) = u(x, y)h(t)$, 得到空间方程和时间方程

$$\Delta u = -\lambda u, \quad h''(t) = -\lambda h(t)$$

鼓面边界固定: u 满足 Dirichlet 边界条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$.

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 考虑带 Dirichlet 边值的 Laplace 算子

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

其特征值全体

$$\text{Sp}(\Omega) := \{0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k \cdots\}$$

称为 Laplace 算子谱 (Laplace spectrum).

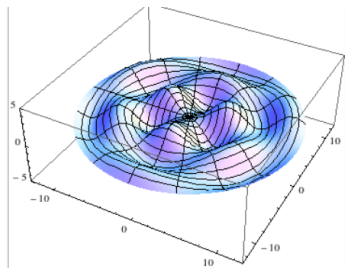
注: Laplace 算子是否存在一系列离散的特征值是 19 世纪数学物理的一个重要问题, 直到 20 世纪初用积分方程理论得到解决。

例子

圆盘 (Disk) D 的 Laplace 算子谱由 Bessel 函数的零点给出。

考虑极坐标变换 $(x, y) \mapsto (r, \theta)$, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 在极坐标系下,

$$\Delta u = u_{rr} + r^{-1}v_r + r^{-2}v_{\theta\theta}$$



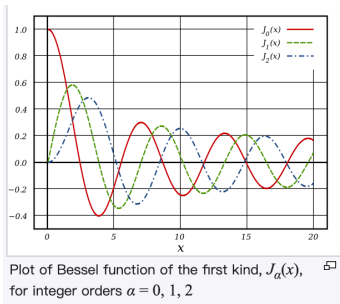
设 $u = R(r)\Theta(\theta)$,

$$\Delta u = -\lambda u \Rightarrow \frac{rR'' + rR' + r^2\lambda R}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0$$

$r^2 R'' + rR' + (r^2\lambda - n^2)R = 0$, Bessel 方程

解为 $R(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r)$, 再由 Dirichlet 边界条件

$$u|_{\{r=1\}} = 0 \Rightarrow J_n(\sqrt{\lambda}) = 0.$$



设 $\rho(m, n)$ 是 Bessel 函数 J_n 的第 m 个零点, 则 $\lambda = \rho(m, n)^2 \in Sp(D)$, 且 $n = 0$ 时重数为 1, $n \geq 1$ 时重数为 2.

Inverse spectral problem

“ La Physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes...,elle nous fait sentir la solution.”

H.Poincaré

1910 Gottingen, H.A.Lorentz

Old and New Problems Physics

”It is here that arises the mathematical problem to prove that the number of sufficiently high overtones which lies between ν and $\nu + d\nu$ is independent of the shape of the enclosure and is simply proportional to its volume.”

Inverse spectral problem

Lorentz 猜想：高频决定面积

$$N(\lambda) := \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \sim \frac{|\Omega|}{2\pi} \lambda, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

这里 $N(\lambda)$ 是所有小于 λ 的特征值的个数, $|\Omega|$ 表示区域 Ω 的面积, \sim 指

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{|\Omega|}{2\pi}.$$

由 Herman Weyl 用 Hilbert 的积分方程理论 (theory of integral equations) 解决.

Inverse spectral problem

1966 M.Kac The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 4, Part 2: Papers in Analysis (Apr.,1966), pp. 1-23

Can one hear the shape of a drum?

猜想

如果两张鼓面发出相同频率的声音，它们是否形状一样？

$Sp(\Omega_1) = Sp(\Omega_2)$ implies $\Omega_1 = \Omega_2$ up to isometry?

Inverse spectral problem

Kac

如果一个平面区域的 Laplace 算子谱和圆 (Disk) 的一样, 则它是圆。

考虑 Laplace 算子的 Heat trace

$$h(t) := \text{trace}(e^{-t\Delta}) = \sum_{\lambda \in Sp(\Omega)} e^{-\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t}$$

注: $h(t) = \int u(x, x, t) dx$, 其中 $u(x, y, t)$ 是热方程 $\partial_t u = \Delta u$ 的基本解。

Inverse spectral problem

1. 区域的面积和周长是谱不变量 (spectral invariants):

$$h(t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{-1-j/2}, \quad t \downarrow 0$$

系数 $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ 给出一族谱不变量, 其中

$$a_0 = (4\pi)^{-1} |\Omega|;$$

$$a_1 = \frac{1}{4} (4\pi)^{-1/2} \ell_{\partial\Omega}$$

2. 等周不等式:

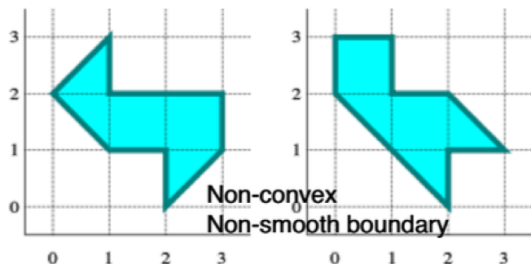
$$4\pi |\Omega| \leq L^2$$

” = ” 成立当且仅当区域是圆。

Inverse spectral problem

1990 C.Gordon; D.Webb , American Scientist, 84 (January–February): 46–55

You can't hear the shape of a drum!



目前已知的反例都是非凸的，非光滑的。

Inverse spectral problem

我们需要对区域 (边界) 加上限制条件, 来获得正面的答案!

定义 (谱确定性 spectrally determinacy)

我们称一个区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 在区域类 \mathcal{M} 中具有谱确定性 (spectrally determined), 如果对任意

$$\Omega' \in \mathcal{M} \quad Sp(\Omega') = Sp(\Omega)$$

都有 Ω' 等距同构于 Ω (旋转加平移) .

Inverse spectral problem

定理 (H.Zelditch, Annals, 09)

一个**通有的 (generic)**、 \mathbb{Z}_2 **对称的**、**解析的** 区域在其同类区域中具有谱确定性。

1. 解析性 (Analytic): 谱信息通常给出区域边界在闭测地线附近的 (局部) Taylor 展开, 而解析性可以连接局部和整体。

实解析: Taylor 展开收敛

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

考察:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

1.

2. 对称性 (Symmetric): 1 维 Schrodinger 算子的反谱问题, 没有唯一性

3. 通有性 (Generic): 如闭测地线的非退化性, 非多重, etc.
Generic: "typical property":

3.1 测度论: 几乎处处成立;

3.2 拓扑: 在开稠集, 或更一般的, 可数个开稠集的交集上成立 (G_δ 集)。

e.g. A generic real number is irrational.

A generic matrix is invertible.

Related Inverse spectral problem

听音辨流形

(M, g) 为 (紧) Riemann 流形, 由度量 g 可定义 Laplace-Bertrami 算子

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

其中 $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$, $[g^{ij}]$ 是 $[g_{ij}]$ 的逆矩阵, $|g| = \det(g_{ij})$.

$Sp(\Delta_g)$ 是否能唯一确定度量 g (up to isometry)?

定理 (Otal, Annals 90)

负曲率黎曼面在同类曲面中具有谱确定性。

半经典薛定谔算子 (Semi-classical Schrodinger operator)

$$\hat{H}_h := -\frac{\hbar^2}{2}\Delta_g + V$$

其中 V 为势函数。

薛定谔算子谱 $Sp(\hat{H}_h)$ 是否唯一确定势函数 V ?

$$Spec : (M, g, V) \rightarrow Sp(\hat{H}_h)$$

是否是 1-1 的?

定理 (Guillemin, Uribe, Math. Res. Lett. 07)

设 $M = \mathbb{R}^n$, 若势函数 V 是解析的、轴对称的, 具有 (某种) 非退化性, 则薛定谔算子谱 $Sp(\hat{H}_h)$ 唯一决定其势函数 V .

相关反谱问题

关于对称性

一维 Schrodinger 算子: $V \in L^1[0, L]$, Hill 方程

$$y'' + V(x)y = \lambda y$$

1. 需要两种谱来确定势函数 V : Dirichlet 边值谱确定 V 的 Fourier 展开的 \cos 部分, Neumann 边值谱确定其 \sin 部分。
2. 如果只有一种谱, 需要对称性 $V(L-x) = V(x)$ 来确定 V ; Borg (1946), Levinson (1949) and Marchenko (1955)。。。

Spectral rigidity

另一方面，如果对区域进行连续形变，对应一个比谱确定性更弱的概念

定义 (谱刚性 Spectral rigidity)

一个区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 在区域类 \mathcal{M} 中具有谱刚性 (spectrally rigid), 如果它在 \mathcal{M} 中没有非平凡的等谱形变 (isospectral deformation), 即:

若 $(\Omega_t)_{0 \leq t \leq 1}$ 是 Ω 在 \mathcal{M} 中的任意一族 C^1 光滑的形变, s.t. $\Omega_0 = \Omega$, $Sp(\Omega_t) = Sp(\Omega)$, 则 $(\Omega_t)_t$ 是等距同构族 (isometric family)。

Spectral rigidity

对于 C^∞ 光滑区域,

Osgood, Phillips and Sarnak 88,89

等谱区域集在 C^∞ 拓扑下是紧的。

Sarnak 猜想

一个等谱区域集只包含孤立 (isolated) 区域。

换句话说, 即 C^∞ 平面区域具有局部谱刚性 (local spectral rigidity)。

长度谱和弹球系统

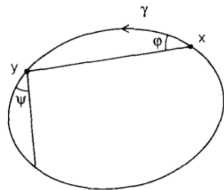
Length spectrum

考虑区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 定义其长度谱 Length Spectrum

$$\mathcal{L}(\Omega) := \{\text{所有闭 (分段) 测地线的长度}\} \cup \mathbb{N}l_{\partial\Omega}$$

带边区域的测地线: 在区域内部是直线, 在边界上做入射角等于反射角的反射。

$$\begin{aligned} f_{\Omega} : \partial\Omega \times (-\pi, \pi) &\rightarrow \partial\Omega \times (-\pi, \pi) \\ (x, \varphi) &\mapsto (y, \psi) \\ \text{入射角} &= \text{反射角} \end{aligned}$$



$$\mathcal{L}(\Omega) = \{\text{弹球映射的所有周期轨长度}\} \cup \mathbb{N}l_{\partial\Omega}$$

定义 (动力学谱确定性)

我们称一个区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 在区域类 \mathcal{M} 中具有动力学谱确定性 (dynamically spectrally determined), 如果 Ω 在等距同构意义下, 是 \mathcal{M} 中唯一拥有该长度谱的元素。

定义 (动力学谱刚性)

一个区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 在区域类 \mathcal{M} 中具有动力学谱刚性 (dynamically spectrally rigid), 如果它在 \mathcal{M} 中没有非平凡的保长度谱形变 (isospectral deformation)。

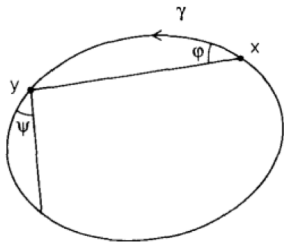
Quantum and classical mechanics

量子动力学



Laplace 算子谱

经典动力学



长度谱

对于一个通有的 (generic) 流形 (带边或无边)

Laplace 算子谱决定长度谱。

1. 紧的无边黎曼流形: Colin de Verdière (73), Duistermaat and Guillemin (75) and Chazarain (73)
2. 带边区域: Andersson–Melrose (77), V. Guillemin and R. B. Melrose (79)

考虑 Laplace 算子的 wave trace:

$$w_{\Omega}(t) := \operatorname{Tr}(e^{-it\sqrt{\Delta}}) = \sum_{\lambda_j \in \operatorname{Sp}(\Omega)} \exp(-it\sqrt{\lambda_j})$$

定理 (Andersson–Melrose, 77)

对严格凸的光滑平面区域, 有如下 **Poisson 关系** :

$$\operatorname{sing\,supp} w_{\Omega}(t) \subset \pm \mathcal{L}(\Omega) \cup \{0\}.$$

其中 $\operatorname{sing\,supp} w_{\Omega}(t)$ 表示 $w_{\Omega}(t)$ 作为分布函数的非光滑点集。

V. Guillemin and R. B. Melrose (79)

对于一个通有 (generic) 的严格凸区域,

$$\text{sing supp } w_{\Omega}(t) = \pm\mathcal{L}(\Omega) \cup \{0\}.$$

特别的, 其长度谱由 Laplace 算子谱决定。

$$w_{\Omega}(t) \equiv e_0(t) + \sum_{L \in \mathcal{L}(\Omega)} e_L(t)$$

其中 $\text{sing supp } e_0 = \{0\}$, $\text{sing supp } e_L = \{L\}$.

$$e_0(t) \sim \sum_{j \geq 0} a'_j(t + i0)^{-2+j}$$

系数 $\{a'_j\}_{j=0}^{\infty}$ 和 heat trace 的系数 $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ 是代数等价的。

$$e_L(t) = a_{L,-1}(t - L + i0)^{-1} + \dots$$

$$a_{L,-1} = \sum_{L_w=L} a_{w,-1} := \sum_{L_w=L} i^{\sigma_w} (-1)^{N_w} L_w^{\#} \frac{1}{|I - df^{N_w}(w)|^{1/2}}$$

这里是对所有长度为 L 的周期轨求和, σ_w 为周期轨的 Maslov 指数, N_w 为反弹次数, $L_w^{\#}$ 为周期轨的最小长度。

注: “通有性”: 周期轨的 Poincaré 映射是非退化的, 即在一条经过 $w \in \partial\Omega$ 的 q -周期轨处, $|I - df^q(w)| \neq 0$, etc.

Inverse spectral problem

反谱问题:

How much (local) geometry can be attracted from the spectral invariants?

一般解决策略:

1. 定义一系列谱不变量 (spectral invariants): heat trace, wave trace, zeta function;
2. 用几何的或动力系统的不变量来计算上述谱不变量; Laplacian spectrum "sees" periodic orbits / broken geodesics
3. 由几何不变量来确定区域。

Billiards

弹球系统 (Billiards)最早是由 G.D.Birkhoff 提出的作为动力系统试验场的模型,

“在这里, 至少形式上, 那些繁琐无关的动力学细节几乎都消失了, 只需要考虑其中各种有意思的定性问题”。

A.B.Katok “Billiard table as a mathematician’s playground”

“mathematicians play by launching billiard balls on tables of various forms and observe (and also try to predict) what happens... various questions, conjectures, methods of solution, etc. in the theory of dynamical systems are “tested” on various types of billiard problems.”

不同类型的弹球系统：

1. 椭圆的 Elliptic : 光滑的、凸区域
2. 抛物的 parabolic : 多边形区域
3. 双曲的 hyperbolic: Bunimovich stadium

Dynamical systems

- ▶ **动力系统 (Dynamical system)** : 研究一个系统随时间的演变规律。
- ▶ 起源于牛顿力学, 常微分方程的定量研究发展到定性理论的研究,
H. Poincaré “New Methods of Celestial Mechanics” (1892–1899)
- ▶ 三要素: 状态空间 M (phase space), 时间 $\Sigma = \mathbb{R}, \mathbb{N}$ (time), 演化规律 T (law of evolution):

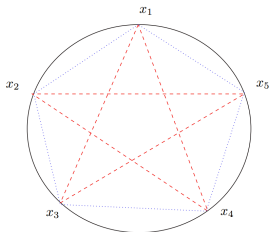
$$T^t : M \rightarrow M, \quad x \mapsto T^t x, \quad T^{t+s} = T^t \circ T^s$$

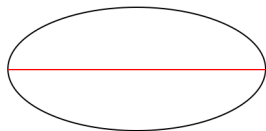
e.g. $x'(t) = v(x(t))$, $\varphi^t(x)$ is the solution with initial position x

周期轨的存在性

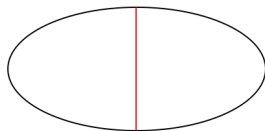
定理 (Birkhoff)

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为平面凸区域, 则对于任意 $\omega = p/q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/2]$, p, q 互素, 存在至少两条 (几何) 不一样的以 ω 为旋转数周期轨道 (即周期为 q , 绕边界转 p 次)。





max 2-orbit



min-max 2-orbit

1. 极大轨道: 对区域的内接 q -多边形取周长最大

2. 极小极大轨:

“vary the polygon of maximum length continuously, without changing the order of its vertices and diminishing the perimeter as little as possible, so as finally to advance the vertices cyclically”

变分法寻找周期轨：生成函数的临界点

给定平面凸区域 Ω , 设其边界 $\partial\Omega$ 的弧长参数化为

$$\gamma : [0, \ell_{\partial\Omega}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto \gamma(s)$$

则边界上任意两点的线段长

$$L(s, s') = \|\gamma(s) - \gamma(s')\|_{\mathbb{R}^2}$$

为弹球映射 $f: (s, \cos \theta) \rightarrow (s', \cos \theta')$ 的生成函数 (generating function), 即

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial s}(s, s') = -\cos \theta \\ \frac{\partial L}{\partial s_1}(s, s') = \cos \theta' \end{cases}$$

证明:

$$\frac{\partial \|\gamma(s) - \gamma(s')\|}{\partial s} = \frac{\gamma(s) - \gamma(s')}{\|\gamma(s) - \gamma(s')\|} \cdot \frac{d\gamma(s)}{ds} = -\cos \theta \quad \blacksquare$$

记 $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_q = s_1)$, 以 \mathbf{s} 为顶点做 Ω 的内接 q 多边形, 其长度为

$$L(\mathbf{s}) := \sum_{i=1}^q L(s_i, s_{i+1})$$

引理

多边形 $\bar{\mathbf{s}} = (s_1, \dots, s_q = s_1)$ 为 q -周期轨道当且仅当 $\bar{\mathbf{s}}$ 是 $L(\mathbf{s})$ 的临界点, i.e. $\partial_{s_i} L(\bar{\mathbf{s}}) = 0, i = 1, \dots, q$

证明: $\partial_{s_i} L(\bar{\mathbf{s}}) = \partial_2 L(s_{i-1}, s_i) + \partial_1 L(s_i, s_{i+1}) = 0$, 即在 s_i 处入射角等于反射角。 \blacksquare

例子：圆周上的 billiard

1. 弹球映射

$$f: (s, \theta) \rightarrow (s + 2R\theta, \theta)$$

2. 生成函数

$$L(s, s') = 2R \sin\left(\frac{s - s'}{2R}\right)$$

3. 对于任意旋转数 p/q , 存在一族周期轨, 其长度为 $2R \sin(\frac{\pi p}{q})$,

$$\mathcal{L}(\text{Disk}) = \mathbb{N}\{2\pi R\} \cup \left\{q\left(2R \sin\left(\frac{\pi p}{q}\right)\right)\right\}$$

可积性 (integrability)

1. 相空间 (phase space) 被不变曲线 $C_{\theta_0} = \{(s, \theta) | \theta = \theta_0\}$ 充满 (foliated) ; 弹球映射 f 限制在每个不变曲线上是个旋转运动: 简单起见, 设 $R = 1/2\pi$, $C_{\theta_0} = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$,

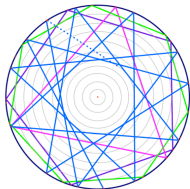
$$f|_{C_{\theta_0}} : S^1 \rightarrow S^1, \quad s \mapsto s + \frac{\theta_0}{\pi}$$

定义 **旋转数** (rotation number) :

$$\omega(f|_{C_{\theta_0}}) = \frac{\theta_0}{\pi}$$

- 1.1 ω 为有理数, 每一个轨道都是周期的;
- 1.2 ω 为无理数, 每一个轨道在 S^1 中稠密。(传递性 transitive, 遍历性 ergodic)

- 1.
2. 每个不变曲线 C_{θ_0} 在圆盘上对应一个半径为 $\rho_0 = R \cos \theta_0$ 的同心圆：所有跟这个同心圆相切的轨道，经过反射之后仍然保持与其相切。



定义 (caustic)

设 Ω 是平面上的严格凸区域，它的一个凸 caustic 是指 Ω 内部的一条 C^1 光滑曲线 Γ ，使得在弹球映射下，每条跟 Γ 相切的轨道经过反射之后仍然保持与其相切。

1. 构型空间的 caustics 和相空间的不变曲线对应。

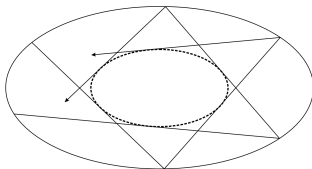
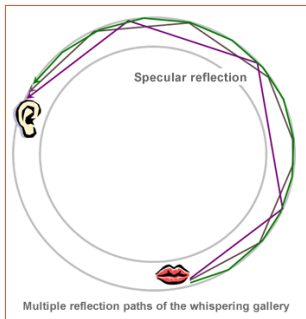


Fig. 3.3. A convex caustic

2. 弹球映射 f 诱导 Γ 自身到自身的变换, $f|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow \Gamma$, 可定义旋转数 ω .

String construction: 任给一个光滑凸区域, 都可以在它外部找到一个以它为 caustic 的区域。

Whispering Gallery



标记长度谱 (Marked Length spectrum):

$$\mathcal{ML}_\Omega\left(\frac{p}{q}\right) := \max\{\text{旋转数为 } p/q \text{ 的周期轨长度}\}$$

$$\mathcal{ML}(\Omega) = \left\{ \mathcal{ML}_\Omega\left(\frac{p}{q}\right), p/q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/2] \right\}$$

1. 标记长度谱不变量不一定是谱不变量: $\mathcal{L}(\Omega_1) = \mathcal{L}(\Omega_2)$ 不一定能推出 $\mathcal{ML}(\Omega_1) = \mathcal{ML}(\Omega_2)$;
2. 在连续形变下, 标记长度谱不变量是谱不变量:
若 $\mathcal{L}(\Omega_t) = \mathcal{L}(\Omega)$, $0 \leq t \leq 1$ 可以推出 $\mathcal{ML}(\Omega_t) = \mathcal{ML}(\Omega)$; ($\mathcal{L}(\Omega)$ 是生成函数的临界值, 由 Sard 引理, $\mathcal{L}(\Omega)$ 是零测集。)

标记长度谱和 Aubry-Mather 理论的 Mather 极小平均作用函数 β_Ω 有关:

$$\beta_\Omega\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{1}{q}\mathcal{ML}_\Omega\left(\frac{p}{q}\right)$$

Main Principle 每个由极小作用 β_Ω 计算得到的量, 都是标记长度谱的谱不变量 (*marked length spectral invariants*).

例子：圆周上的 billiard

$$\mathcal{ML}\left(\frac{p}{q}\right) = 2R \sin(\pi p/q)$$

$$\beta(\omega) = -2R \sin(\pi\omega).$$

$$\beta'(0) = -2\pi R = -\ell_{\partial D}$$

$$\beta'(\omega) = -2\pi R \cos \pi\omega = -|\Gamma_\omega|$$

其中 $|\Gamma_\omega|$ 为旋转数为 ω 的 caustic 的长度。

注：(J.Mather) β 在 p/q 处可微当且仅当存在一条由旋转数为 p/q 的周期轨构成的不变曲线 /caustic。

设 Ω 是一个严格凸的光滑区域,

$$\beta(\omega) = -\ell_{\partial\Omega}\omega + \frac{1}{24C^3}\omega^3 + O(\omega^4) \quad \omega \rightarrow 0$$

其中 $C = \int_0^{\ell_{\partial\Omega}} \rho^{-2/3}(s) ds$, ρ 为曲率半径 (Siburg Thm. 3.2.5)。

由 β 给出的一些标记谱不变量

1. β 在 0 处总是可微的, $\beta'(0) = -\ell_{\partial\Omega}$.
2. $-\beta(1/2) = \text{diam}(\Omega)$;
3. $C = (\int_0^{\ell_{\partial\Omega}} \rho^{-2/3}(s) ds)^{-1}$.

Lazutkin coordinates

在区域边界附近，弹球映射是个近可积系统 (nearly intergrable):

1. Lazutkin 坐标变换 $(s, \theta) \rightarrow (x, y)$,

$$x = C \int_0^s \rho^{-2/3}(s') ds', \quad y = 4C\rho^{-1/3}(s) \sin \frac{\theta}{2}$$

其中 $\rho(s)$ 为 $\partial\Omega$ 的曲率半径, $C=(\int_0^{\ell_{\partial\Omega}} \rho^{-2/3})^{-1}$ 。

2. 在 Lazutkin 坐标下，弹球映射在边界 $\{y = 0\}$ (等价的, $\omega \rightarrow 0$) 附近表现出近圆 (近可积) 行为:

$$f: (x, y) \mapsto (x + y + O(y^3), y + O(y^4)), \quad y \rightarrow 0$$

单位圆盘在所有严格凸的光滑区域中具有动力学谱刚性。

证明：利用结构常数 $C^{-1} = \int_0^{\ell_{\partial\Omega}} \rho^{-2/3}(s) ds$ 与区域边界周长是标记谱不变量。

设 $\theta(s)$ 为 $\partial\Omega$ 在 s 处的切方向与 x 轴的夹角，由定义 $\frac{ds}{d\theta} = \rho(s)$ 。令 $\chi(\theta) = \rho(s)$ ，则

$$\int_0^{\ell_{\partial\Omega}} \rho^{-2/3}(s) ds = \int_0^{2\pi} \chi(\theta) d\theta \leq \left(\int_0^{2\pi} \chi \right)^{1/3} \left(\int_0^{2\pi} 1 \right)^{2/3} = (\ell_{\partial\Omega})^{1/3} \cdot (2\pi)^{2/3}.$$

其中 \leq 为 Holder 不等式， $=$ 成立当且仅当 χ 是常数，从而 Ω 是单位圆。

Marvizi–Melrose spectral invariants

1. 极大 (p, q) 周期轨长度 $L_{p,q}^{max}$ 关于 $q \rightarrow \infty$ 的渐近分解:

$$\begin{aligned} L_{p,q}^{max} &= -q\beta\left(\frac{p}{q}\right) \sim -q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \beta^{(2k+1)}(0) \left(\frac{p}{q}\right)^{2k+1} \\ &=: p\ell_{\partial\Omega} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{p,k} q^{-2k}, \quad q \rightarrow \infty \end{aligned}$$

2. Marvizi-Melrose 证明了上述估计对任意 (p, q) 轨道, $q \rightarrow \infty$ 成立。换句话说, 当周期很大时, 所有周期轨长度趋向于极大。

$$L_{p,q} \sim p\ell_{\partial\Omega} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{p,k} q^{-2k}, \quad q \rightarrow \infty$$

其中 $\{c_{1,k}\}_{k \geq 1}$ 称为 Marvizi–Melrose 谱不变量。

1. Marvizi–Melrose 谱不变量 $\{c_{1,k}\}_{k \geq 1}$ 是一些积分不变量，由曲率半径的分次幂和各阶导数的多项式的积分给出，形如 $\int P_j(\rho, \rho^{(1)}, \dots, \rho^{(k)}) ds$ 。
2. 特别的， $c_{1,1} = \frac{1}{3!} \beta'''(0) = \frac{1}{4} C^3$ ，其中 $C = (\int \rho^{-2/3})^{-1}$ 是谱不变量。从而

单位圆盘在所有严格凸的光滑区域中具有谱确定性。

3. (L.Buhovsky, Kaloshin 18) Marvizi–Melrose 谱不变量不是一族完备的谱不变量：存在两个非同构的区域具有相同的 Marvizi–Melrose 谱不变。

Other invariants :Lyapounov exponents

(G.Huang,V.Kaloshin,A.Sorrentino, Duke 17) 对于通有的 (generic) 光滑严格凸的平面区域, 其 (双曲) 极大周期轨处的 Lyapounov 指数 (df^n 的特征值) 是标记谱不变量。

Spectral rigidity in smooth case

定理 (De Simoi, Kaloshin, Wei Annals 07)

一个 C^k ($k \geq 8$) 光滑的, 具有 \mathbb{Z}_2 对称性的近圆区域在同类区域中具有动力学谱刚性。

- ▶ 光滑情形的局部结果;
- ▶ 需要对称性;
- ▶ 近圆是指 $\|\gamma_\Omega - \gamma_D\|_{C^k} \leq \delta$

思路：利用标记长度谱 $\mathcal{ML}(\frac{1}{q})$, $q \geq 2$ 。

设 $(\Omega_\tau)_{\leq \tau \leq 1}$ 为 Ω 的等谱形变, γ_τ 为 $\partial\Omega_\tau$ 的参数化,

$$\gamma_\tau(s) = \gamma(s) + \tau n(s)N(s)$$

其中 $N(s)$ 表示外法向, $n(s)$ 为外法向上的形变大小。

$$\beta_\tau^q := \beta_\tau\left(\frac{1}{q}\right) = \max L_\tau(s_1, \dots, s_q) \quad q \geq 2$$

为 Ω_τ 对应的极大周期轨长度, 则等谱条件为

$$0 = \frac{d}{d\tau} \beta_\tau^q = \sum_{k=0}^{q-1} n(s_q^k(\tau)) \sin \theta_q^k(\tau)$$

其中 $(s_q^k(\tau), \theta_q^k(\tau))_{k=1}^q$ 为极大周期轨。

定义无穷小形变算子 (infinitesimal deformation operator):

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\Omega : C^r(S^1) &\rightarrow \mathbb{R}^\infty \\ n &\mapsto (\ell_q(n))_q\end{aligned}$$

则谱刚性问题的转化为:

线性算子 \mathcal{T}_{Ω_t} 是否是单射, i.e. $\mathcal{T}_{\Omega_t}^{-1}(0) = \{0\}$?

对称性

1. 形变 n 可取偶函数, Fourier 展开 $n(s) = \sum_{k=0} n_k \cos 2\pi s$;
2. 周期轨可取初始位置 $s_q^0 = 0$.

例子: (周长为 1 的) 圆的周期轨 $(s_q^k = s_q^0 + \frac{k}{q}, \theta_q^k = \frac{\pi}{q})_{k=0}^{q-1}$,

计算无穷小形变算子 \mathcal{T}_D :

取 $e_k = \cos 2\pi kx, k \geq 2$,

$$\ell_q(e_k) = \sum_{j=0}^{q-1} \cos 2\pi \frac{k}{q} \sin \frac{\pi}{q} = \begin{cases} q \sin(\pi/q), & k = q \\ 0, & k \neq q \end{cases}$$

模掉常系数, 矩阵表示为

$$\tilde{T} = (\mu_q \tilde{\ell}_q(e_k))_{q,k} = (\mu_q \ell_q(e_k))_{q,k} = I + \dots$$

对形变空间取合适的范数, 可使 \tilde{T}_D 有有界逆;

近圆性

1. $q > N$ 充分大时, 在 Lazutkin 坐标 (x, y) 下, 轨道表现为近圆行为 (渐近等分布)

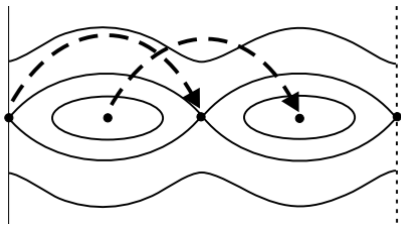
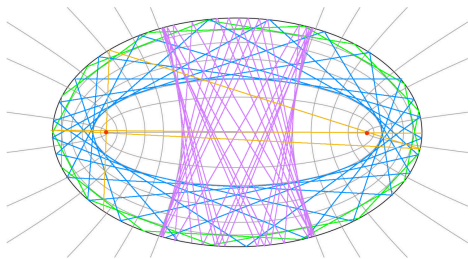
$$x_q^k = x_q^0 + \frac{k}{q} + O(q^{-2}), \quad y_q^k = \frac{1}{q} + O(q^{-3}) \quad q \rightarrow \infty$$

2. $q < N$ 时, 用区域的近圆性一致控制轨道近圆。
3. 控制 $\|\tilde{T}_\Omega - \tilde{T}_D\| < \delta$.

Ellipse

椭圆上的弹球映射轨道分为三种情形：记椭圆的两个焦点为 F_1, F_2

1. 穿过两个焦点连线 $\overline{F_1F_2}$ 的轨道，每次反弹后都继续穿过 $\overline{F_1F_2}$;
2. 穿过一个焦点的轨道，反弹后穿过另一个焦点；
3. 不经过 $\overline{F_1F_2}$ 的轨道永远不经过 $\overline{F_1F_2}$ 。



可积性

1. 圆是唯一全局可积 (globally integrable) 的平面区域 (Bialy)。
2. 椭圆局部可积 (convex caustics by confocal ellipses do not foliated the whold domain, the segment between two foci is left out)

定义: a domain is called intergrable if the union of all smooth convex caustics has nonempty interior.

Birkhoff conjecture: 是否存在椭圆之外的 (局部) 可积的区域。

椭圆

定理 (Local Birkhoff conjecture, Avila, Sorrentino, Kaloshin, Annals 16)

设 Ω 是 C^k 有理可积 (rationally integrable) 的严格凸区域, 即对于任意 $q \geq 2$, 存在旋转数为 $1/q$ 的 caustic, 其对应的不变曲线由旋转数为 $1/q$ 的周期轨构成, 若 Ω 接近小离心率的椭圆, 则它是椭圆。

推论

小离心率椭圆具有动力学谱刚性。

定理 (H.Hezari,H.Zelditch 18)

小离心率的椭圆在光滑区域中具有谱确定性。

注：不需要对称性，凸性，不需要靠近椭圆。

1. 和充分小离心率的椭圆等谱的区域必定是近圆区域：利用 heat trave 的渐近展开给出的谱不变量（由边界曲率表达的结构常数）；
2. 对于近圆区域：
 - 2.1 可以从长度谱 $\mathcal{L}(\Omega)$ 中分离出 $\mathcal{L}_{1,q}(\Omega)$ ；
 - 2.2 $\mathcal{L}_{1,q}(\Omega) \subset \text{sing supp} w_{\Omega}(t)$

Outer Billiard

相关阅读文献

1. Laplace 算子谱方面:

- ▶ M.Kac, 1966, Can you hear the shape of a drum?
- ▶ C.Gordon;D.Webb,1990, You can't hear the shape of drum!
- ▶ H.Zelditch, 2015, Survey on the inverse spectral problem.

2. 弹球、长度谱方面:

- ▶ K.F.Siburg, The Principle of Least Action in Geometry and Dynamics (Book, Chapter 3).
- ▶ S.Tabachnikov, Geometry and Billiards. (Book)
- ▶ A.B.Katok,Billiard table as a mathematician's playground.

谢谢!